MAT 1739 Calcul

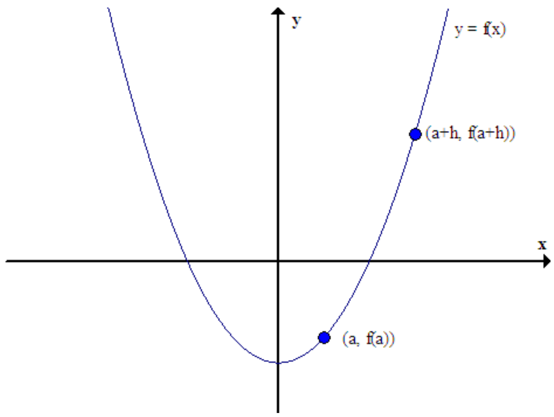
Chapitre 1

Objectifs

- comprendre les taux de changement moyen et instantané ainsi que leur lien avec les pentes des droites sécantes et tangentes
- être capable de calculer le taux de changement moyen et estimer le taux de changement instantané à partir d'une équation, d'un graphe ou d'un tableau de données
- comprendre le concept de limite et être capable d'utiliser les propriétés de base de la limite pour trouver des limites de suites et de fonctions
- comprendre le concept de continuité et être capable de déterminer si une fonction est continue ou non en un point donné
- être capable de reconnaître les principales discontinuités qui peuvent apparaître sur le graphe d'une fonction
- être capable de reconnaître la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand elle apparaît dans l'évaluation d'une limite et savoir ce qu'il faut faire pour trouver cette limite
- comprendre la définition de dérivée d'une fonction en un point et comme fonction, ainsi qu'être capable d'utiliser ces définitions pour calculer des dérivées
- être capable d'utiliser les différentes notations de la dérivée

Taux de changement et pentes des courbes

On considère une fonction $y = f(x)$. Si on change x de $x = a$ à $x = a + \Delta x = a + h$, avec un incrément en x de $\Delta x = h$, alors la valeur de la fonction (si elle n'est pas constante) va changer de $f(a)$ à $f(a + h)$.

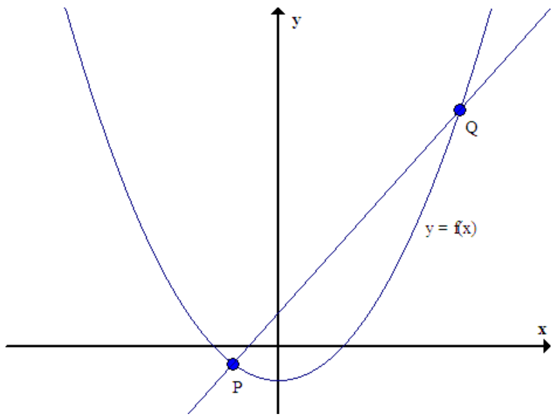


Si on note le changement de la valeur de la fonction, $\Delta f = f(a + h) - f(a)$, relativement au changement de la variable indépendante x, $\Delta x = (a + h) - a = h$, on a $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, qui est le taux de changement moyen de la fonction sur l'intervalle $a \leq x \leq a + h$.

L'exemple le plus simple de cette notion est probablement la vitesse d'un objet en mouvement. Si vous parcourez une distance de 120 km en une heure et demi, votre vitesse moyenne sera de $\dfrac{120 \text{ km}}{1.5 \text{ h}} = 80$ km/h (et c'est la variation de la position divisé par la variation du temps).

Revenons à ce qu'on a vu ci-haut. Notez que l'expression $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ (appelée quotient différentiel) représente la pente de la droite tracée entre les deux points $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$ de la courbe.

Une droite qui passe par deux points P et Q de la courbe $y = f(x)$ est appelée une droite sécante.



Exemple:
Trouver la pente de la droite sécante qui passe par les points $(-1, 1)$ et $(2, 4)$ de la courbe $y = x^2$.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4-1}{2-(-1)} = \dfrac{3}{3} = 1$ et la droite est $y = x + 2$ (*est-ce que vous voyez ça ?*).

Exemple:
Supposons que la population d'une petite ville a été recensée à chaque année de 2001 à 2010.

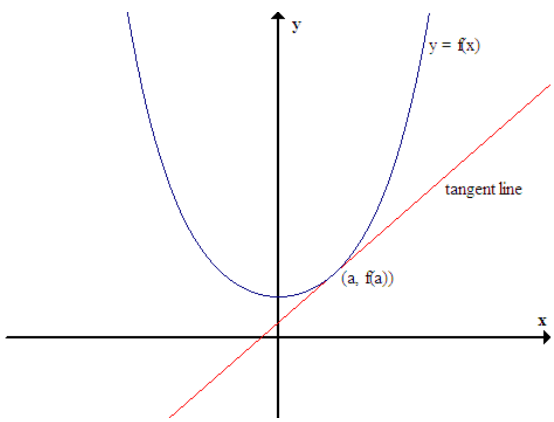
Année	Population
2001	6210
2002	6347
2003	6523
2004	6704
2005	6851
2006	6975
2007	7087
2008	7214
2009	7326
2010	7472

(i) Quel était le taux de changement moyen de la population pendant cette période ?
(ii) Et pendant celle de 2006 à 2010 ?

(i) $\dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{7472-6210}{2010-2001} \approx 140$ personnes/année
(ii) $\dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{7472-6975}{2010-2006} \approx 124$ personnes/année

Dans l'exemple ci-dessus impliquant la distance parcourue, nous avons obtenu la vitesse moyenne de 80 km/h sur toute la distance. C'est peu probable qu'on ait vraiment conduit à exactement 80 km/h pendant 1.5 heures – plus probable que par moments on soit allé plus vite et en d'autres moments, plus lentement. De plus, la vitesse moyenne ne nous indique pas à quelle vitesse on a conduit à un moment donné, ce qui correspond plutôt à la vitesse instantanée (vitesse à un moment particulier).

Comment pourrait-on trouver le taux de changement instantané d'une fonction $y = f(x)$ au point $x = a$? On reconnaît que ça correspond à la "pente" de la courbe en ce point, qui doit être égale à la pente de la tangente à la courbe en ce point.



La droite tangente à la courbe en un point $P = (a, f(a))$ est la droite qui passe par le point et est la meilleure approximation de la courbe autour de ce point.

Donc, si on a le graphe de la fonction, on peut tracer la droite tangente et trouver sa pente. (*Mais ce ne serait qu'une approximation ou estimation puisqu'on ne peut pas tracer la droite tangente exactement.*)

Si on a une table de valeurs, on peut calculer le taux de changement moyen sur un intervalle aussi court que l'on veut qui contient le point qui nous intéresse (*mais comme dans le cas précédent, seulement une estimation*).

Exemple:
Le taux de changement instantané m de la population de la ville en 2004 est approximativement
$m \approx \dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{P(2005) - P(2004)}{2005 - 2004} = \dfrac{6851 - 6704}{1} = 147$ personnes/année.

Notez que dans n'importe quel cas (graphique ou numérique), notre meilleure option est de trouver une estimation. Pourquoi a-t-on ce problème ? Parce qu'on connait seulement un point, soit $(a, f(a))$, par lequel passe la droite tangente. On ne peut pas calculer la pente (ou trouver l'équation) de la droite ne sachant qu'un seul point. Clairement, si on veut calculer le taux de changement instantané (*c'est exactement ce que nous voulons*), on doit trouver une méthode pour le faire.

Taux de changement utilisant l'équation d'une fonction

Si on a l'équation de la fonction, $y = f(x)$, on peut trouver des estimations plus précises du taux de changement instantané en $x = a$, si on trouve le taux de changement moyen sur un petit intervalle $a \leq x \leq a + h$.

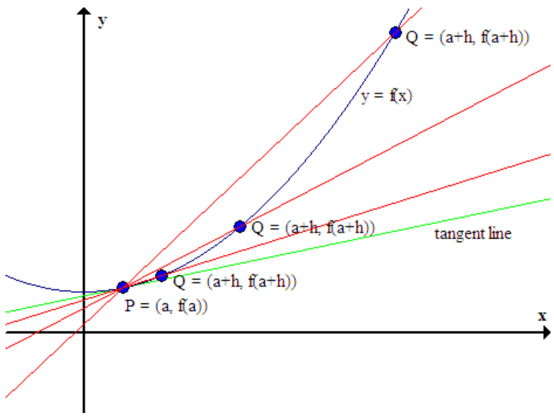
Exemple:
La position (en mèters) d'un objet en mouvement est donnée par $s(t) = 2t^2 + 3t + 2$, où t est mesuré en secondes. Quelle sera la vitesse instantanée de cet objet au temps $t = 2$ s ?

La pente de la droite sécante (qu'on utilise comme une approximation de la droite tangente) qui passe par $P = (2, s(2))$ et $Q = (2 + h, s(2 + h))$ est

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2+h) - s(2)}{(2+h) - 2}$$
$$= \frac{2(2+h)^2 + 3(2+h) + 2 - (2(2)^2 + 3(2) + 2))}{h}$$
$$= \frac{2(4 + 4h + h^2) + 6 + 3h + 2 - 16}{h}$$
$$= \frac{8 + 8h + 2h^2 + 6 + 3h + 2 - 16}{h}$$
$$= \frac{11h + 2h^2}{h}$$
$$= 11 + 2h$$

si $h = 1$ s, $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 13$ m/s
si $h = 0.1$ s, $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 11.2$ m/s
si $h = 0.01$ s, $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 11.02$ m/s
et donc on voit que la vitesse instantanée de l'objet au temps $t = 2$ s est de 11 m/s.

Qu'est-ce qu'on a fait dans cet exemple ? On a utilisé des droites sécantes pour faire une approximation de la droite tangente.



Plus h est petit, plus Q est proche de P et mieux est la droite sécante comme approximation de la droite tangente. Et lorsque h tend vers zéro, le quotient différentiel $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, qui est la pente de la droite sécante ou le taux de changement moyen sur l'intervalle $a \leq x \leq a+h$ tend de plus en plus vers la pente de la droite tangente ou le taux de changement instantané en $x = a$.

Mais qu'est-ce qu'on veut dire par h tend vers 0 et plus généralement qu'une quantité tend de plus en plus vers une autre quantité ?

Limites

L'ensemble des nombres naturels est $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Une suite infinie est une liste infinie de nombres générés par une fonction $f(n) = a_n$ dont le domaine est $\mathbb{N}$.

Exemple:
$2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{27}, \dfrac{2}{81}, \ldots$
Le terme général ici est $a_n = \dfrac{2}{3^n}$ et lorsque n devient plus grand, les valeurs deviennent de plus en plus petites ou proches de 0. Il y a un a_n pour tout n, aussi grand que soit n. Lorsque n devient de plus en plus grand indéfiniment, on dit que n tend vers l'infini et on écrit $n \to \infty$. Lorsque $n \to \infty, a_n \to 0$. On peut alors utiliser la notation de limite: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{3^n} = 0$.

Exemple:
Si $a_n = (-1)^n$, on a la suite
$1, -1, 1, -1, \ldots$
Ici, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ n'existe pas parce que les termes de la suite ne tendent pas vers une

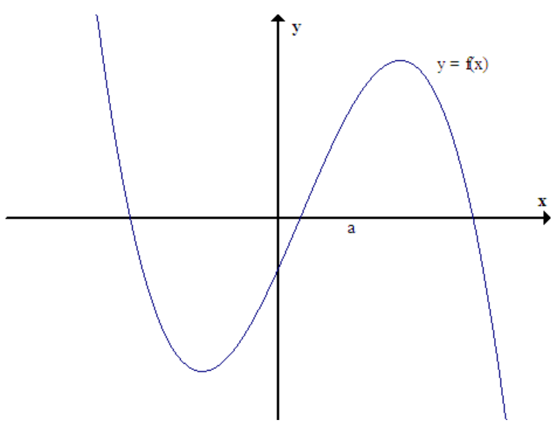
valeur particulière.

Exemple:
$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$
Ici, $a_n = 2^n$ et alors $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$. Cette limite n'existe pas parce que les termes de la suite augmentent sans cesse, devenant de plus en plus grands. Par conséquent, ils ne tendent pas vers une valeur particulière (finie).

∞ n'est pas un nombre – il représente l'idée d'une augmentation infinie.

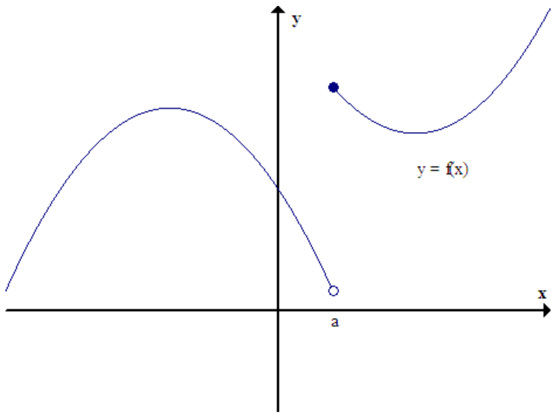
Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, où L est un nombre fini quelconque, alors la suite $\{a_n\}$ admet une limite. Lorsque $n \to \infty$ et on dit que la suite <u>converge vers L</u>, ce qui signifie que quand n augmente, les valeurs de a_n tendent vers L.

Ayant une fonction $f(x)$, on peut aussi regarder ce qui se passe lorsque $x \to a$, *ie* considérer $\lim_{x\to a} f(x)$.



On peut approcher a du côté gauche, où $x < a$ ou du côté droit, où $x > a$. Cela nous mène vers <u>la limite du côté gauche</u> $\lim_{x\to a^-} f(x)$ et <u>la limite du côté droit</u> $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

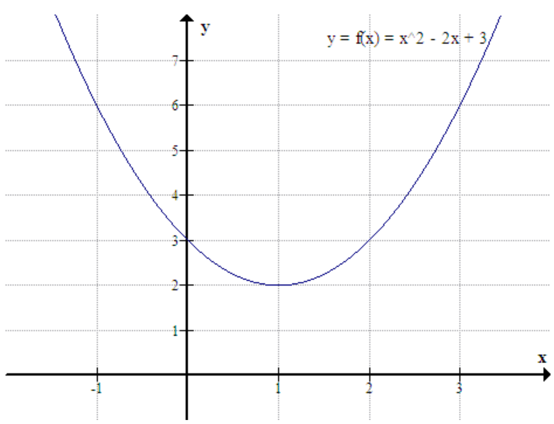
Supposons que $\lim_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existent toutes les deux, mais sont différentes (pas égales).



Alors $\lim_{x \to a} f(x)$ ne peut pas exister parce que $f(x)$ ne tend pas vers une valeur unique lorsque $x \to a$.

Qu'est-ce qui se passe si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$? Alors $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et a la même valeur à gauche et à droite.

Exemple:
Considérez la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Que vaut $\lim_{x \to 2} f(x)$?



D'après le graphe, on peut voir que lorsque $x \to 2^-$ (*ie* du côté gauche, $x = 1.9, 1.99, 1.999, \ldots$), la valeur de la fonction va augmenter jusqu'à 3. Et lorsque $x \to 2^+$ (*ie* du côté droit, $x = 2.1, 2.01, 2.001, \ldots$), la valeur de la fonction va diminuer jusqu'à 3.
Donc, on a $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 = \lim_{x \to 2^+} f(x)$ et donc $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.
On aurait pu aussi l'observer numériquement.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.9	2.81	2.1	3.21
1.99	2.9801	2.01	3.0201
1.999	2.998001	2.001	3.002001

Est-ce que vous voyez ce que ces valeurs nous disent à propos de $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ *et* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$*, donc de* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *?*

Si on regarde l'exemple ci-dessus, on constate que $\lim_{x\to 2} f(x)$ est tout simplement la valeur de $f(x)$ en $x = 2$. En fait. si on traçait le graphe de la fonction f de chaque côté de $x = 2$, on n'apercevrait aucun trou dans le graphe, *ie* la courbe approche continuement le point $(2, f(2))$. Cela signifie que la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 3$ est continue en $x = 2$.

On dit que $f(x)$ est continue en $x = a$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites.
(i) $f(a)$ est définie
(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Une fonction est continue en $x = a$ si on peut tracer le graphe autour de $x = a$ sans lever le crayon. Une fonction est appelée continue si elle est continue en tout point x de son domaine. S'il y a un point où on a un trou dans le graphe, on a une discontinuité (au moins l'une des trois conditions ci-dessus n'est pas satisfaite).

Limites et continuité

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent et c est une constante, on a les propriétés de la limite suivantes.
(i) $\lim_{x\to a} c = c$
(ii) $\lim_{x\to a} x = a$
(iii) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
(iv) $\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$
(v) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$
(vi) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \quad \text{si } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
(vii) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n, \quad \text{si } n \text{ est rationnel}$
(viii) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}, \quad \text{si la racine du membre de droite existe}$

Ces propriétés nous permettent de calculer beaucoup de limites en procédant par substitution.

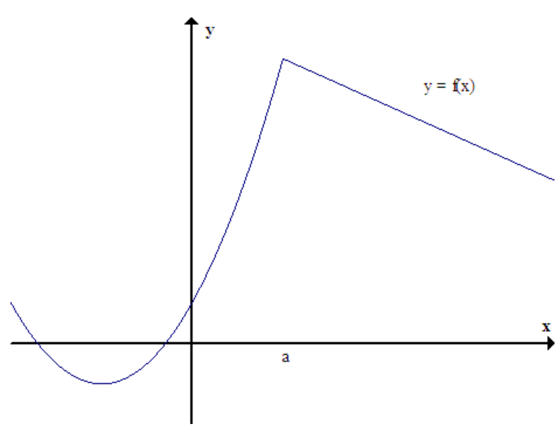
Exemples:

(i) $\lim_{x \to -3} 27 = 27$
(ii) $\lim_{x \to -3} x = -3$
(iii) $\lim_{x \to 2}(2x^3 + 3x - 4) = 2\left(\lim_{x \to 2} x\right)^3 + 3\left(\lim_{x \to 2} x\right) - \lim_{x \to 2} 4 = 2(2)^3 + 3(2) - 4 = 18$
(iv) $\lim_{x \to 1} \dfrac{5x}{x-1} = \dfrac{5\left(\lim_{x \to 1} x\right)}{\lim_{x \to 1}(x-1)} = \dfrac{5}{0}$ n'existe pas
(v) $\lim_{x \to 4} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+2}} = \sqrt{\dfrac{\left(\lim_{x \to 4} x\right)^2 + 1}{\left(\lim_{x \to 4} x\right) + 2}} = \sqrt{\dfrac{4^2+1}{4+2}} = \sqrt{\dfrac{17}{6}}$

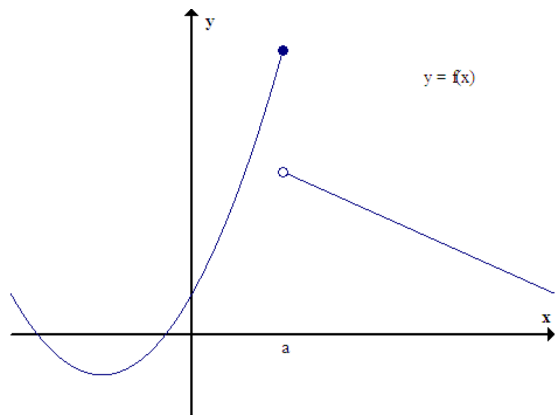
Les fonctions algébriques, rationnelles et polynômiales usuelles sont continues partout dans leurs domaines. Leurs limites (dans le domaine) peuvent donc être calculées par une simple substitution.

Exemples:
(i) $\lim_{x \to -1}(2x^2 + 7x - 2) = 2(-1)^2 + 7(-1) - 2 = -7$
(ii) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x+7}{x-2} = \dfrac{3+7}{3-2} = \dfrac{10}{1} = 10$
(iii) $\lim_{x \to 2} \sqrt{x-7} = \sqrt{-5}$ n'existe pas (2 *n'appartient pas au domaine*)
(iv) $\lim_{x \to 2} \sqrt{2x+1} = \sqrt{2(2)+1} = \sqrt{5}$

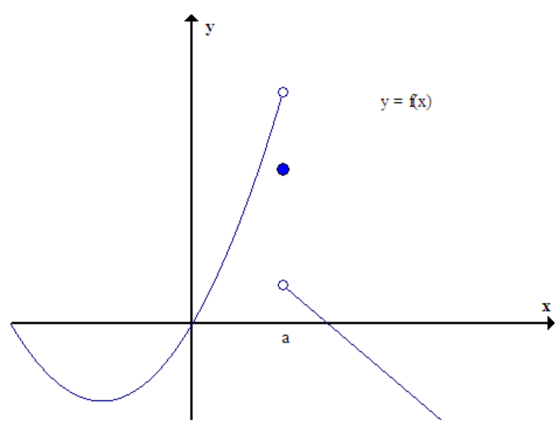
On a dit que $f(x)$ est continue en $x = a$ si $f(a)$ est définie, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Cela correspond à la possibilité de tracer le graphe de $f(x)$ sans lever le crayon ou sans qu'il y ait un trou dans le graphe en $x = a$. Mais qu'est-ce qui se passe s'il y a une discontinuité en $x = a$? Considérons les graphes suivants.



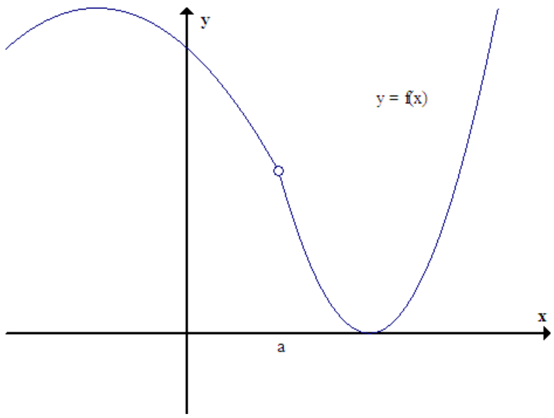
$f(a)$ est définie, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ donc $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. De plus, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et donc $f(x)$ est continue en $x = a$.



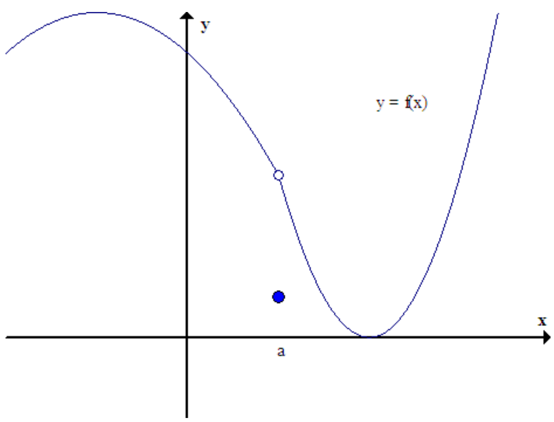
$f(a)$ est définie, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existe et $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe mais $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, donc $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas. Conséquemment, $f(x)$ n'est pas continue en $x = a$. Cette situatuion sera appelée discontinuité de saut.



$f(a)$ est définie, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existe et $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe mais $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, donc $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas. Conséquemment $f(x)$ est discontinue en $x = a$. Nous avons à nouveau une discontinuité de saut.

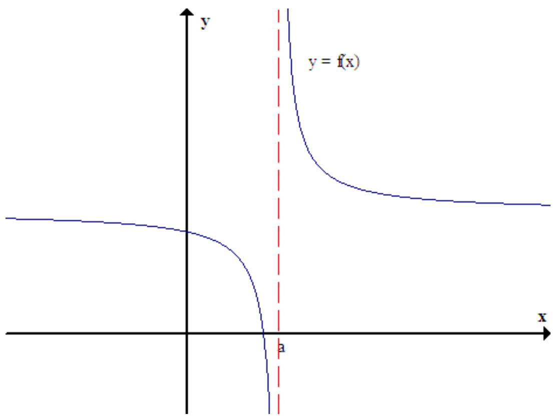


$f(a)$ n'est pas définie, mais $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ donc $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, mais $f(x)$ est discontinue en $x = a$. Cette situation sera appelée trou ou discontinuité apparente.



$f(a)$ est définie, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ donc $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, mais $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, donc $f(x)$

est discontinue en $x = a$. Nous avons à nouveau un trou ou une discontinuité apparente.

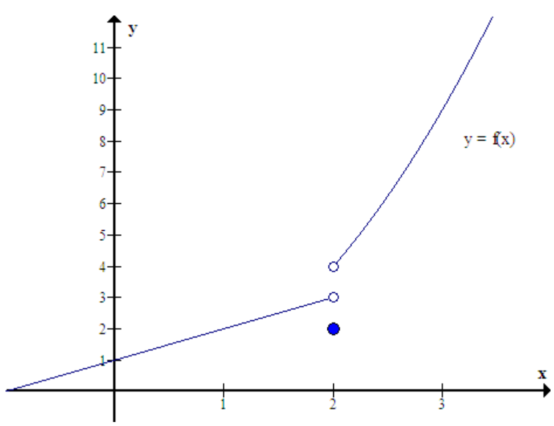


$f(a)$ n'est pas définie, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ n'existe pas, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ n'existe pas, donc $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas. $f(x)$ est discontinue en $x = a$. On a affaire à une asymptote verticale.

Exemple:

Considérez la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < 2, \\ 2, & x = 2, \\ x^2, & x > 2. \end{cases}$

C'est un exemple d'une fonction définie par parties.



$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (1 + x) = 3,$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 = 4,$
donc $\lim_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas (donc $f(x)$ ne peut pas être continue en $x = 2$).
Par ailleurs, $f(2) = 2$

et $f(x)$ admet une discontinuité de saut en $x = 2$.

Calculons les limites suivantes.
(i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$
(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
(iii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)^2-1}{x-2}$

La substitution dans toutes ces limites conduit à une <u>forme indéterminée</u> $\frac{0}{0}$ (qui n'est pas définie). On peut évaluer de telles limites en faisant quelques manipulations.

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$
$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}$ *(mise en facteur)*
$= \lim\limits_{x\to 3} (x+3)$ *(élimination du facteur en commun – permis parce que $x \neq 3$)*
$= 6$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \times \dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$ *(rationalisation du numérateur)*
$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$
$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$
$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$ *(élimination du facteur en commun)*
$= 1/4$

(iii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)^2-1}{x-2}$
$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x+1-1}{x-2}$ *(développement des parenthèses)*
$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$
$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x(x-2)}{x-2}$ *(factorisation)*
$= \lim\limits_{x\to 2} x$ *(élimination du facteur en commun)*
$= 2$

(Toutes ces discontinuités sont apparentes.)

Exemple:

Est-ce que $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 5x + 4}$ est continue en $x = -1$? Est-ce que la limite existe en $x = -1$?

$f(-1) = \frac{0}{0}$, donc $f(x)$ n'est pas définie en $x = -1$. Cette fonction ne peut pas être continue en ce point.

$\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 5x + 4}$
$\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+1)(x+4)}$
$\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x-3}{x+4}$
$= -4/3$
donc oui, $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x)$ existe.
Cette discontinuité est apparente – donc le graphe de la fonction va avoir un trou au point $(-1, -4/3)$.

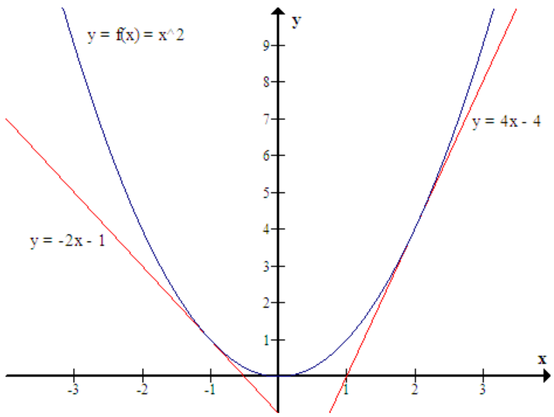
Introduction aux dérivées

Revenons maintenant à ce dont on a discuté en introduction de cette section. On a dit que le taux de changement instantané d'une fonction $y = f(x)$ au point $P = (a, f(a))$, qui est la pente m de la droite tangente au graphe en ce point, peut être approximé par la pente de la droite sécante qui passe par les points P et $Q = (a + h, f(a + h))$. Ceci donne le quotient différentiel
$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, et cette approximation est meilleure lorsque h tend vers 0. On comprend maintenant que cela signifie prendre la limite lorsque $h \to 0$, donc $m = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Notez que cette limite donne toujours une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ si on substitue $h = 0$. On doit donc faire quelques manipulations pour calculer ces limites.

Le taux de changement instantané de $y = f(x)$ en $P = (a, f(a))$ est égal à la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = a$ et est aussi appelé <u>la dérivée de $y = f(x)$ en $x = a$</u>, noté $f'(a)$.
Ainsi $f'(a) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
(on dira alors que la dérivée $f'(a)$ est calculée <u>à partir de sa définition</u>).

Exemple:
Considérez la fonction $y = f(x) = x^2$. Trouvez la dérivée et les équations des droites

tangentes en $x = -1$ et $x = 2$.



$$\begin{aligned}
f'(-1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 - (-1)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1 - 2h + h^2) - (1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -2 + h \\
&= -2
\end{aligned}$$

donc la droite tangente passe par $(-1, 1)$ et a pour pente $m = -2$. L'équation de la tangente est donnée par $y - y_0 = m(x - x_0)$ (*forme pente au point*), soit $y - 1 = (-2)(x - (-1))$ ou $y = -2x - 1$.

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(4 + 4h + h^2) - (4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 4 + h \\
&= 4
\end{aligned}$$

donc la droite tangente est donnée par $y - 4 = (4)(x - 2)$ ou $y = 4x - 4$.

Si on regarde le graphe de $y = f(x) = x^2$, on peut voir qu'on serait capable de tracer la droite tangente à la courbe en tout point mais sa pente depend de la valeur de x. Donc

la dérivée d'une fonction est elle-même une fonction de x. On peut la trouver comme suit :
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Donc, pour $f(x) = x^2$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - (x^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 2x + h \\
&= 2x \quad \textit{(est-ce que cela correspond à ce qu'on a obtenu dans l'exemple ci-dessus ?)}
\end{aligned}
$$

Il existe d' autres notations pour la dérivée : soit $y = f(x)$, alors $f'(x) = y'$ et $f'(x) = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$ (cela vient de $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$) et $f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x)$ (notation d'opérateur). Si on évalue la dérivée en $x = a$, $f'(a) = y'(a) = \dfrac{dy}{dx}|_{x=a} = \dfrac{df}{dx}|_{x=a}$. $\dfrac{dy}{dx}$ est lu comme lettre "d" y sur "d" x et cela représente la dérivée de y par rapport à x.

Exemple:
Soit $f(x) = x^3$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x^3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\
&= 3x^2.
\end{aligned}
$$

Exemple:
Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \right]
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$
$$= \frac{-1}{x^2}.$$

Est-ce que vous avez remarqué quelque chose ? On vient de considérer des cas semblables :

$f(x)$	$f'(x)$
x^3	$3x^2$
x^2	$2x$
x^{-1}	$-x^{-2}$

Est-ce que vous voyez le lien ?

Qu'est-ce qui se passe si $y = f(x) = mx + b$, une droite ? Alors, la droite devrait être tangente à elle-même partout et donc, la pente de la tangente serait toujours m. Vérifons que $f'(x) = m$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(m(x+h)+b) - (mx+b)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} m$$
$$= m\ .$$

Exemple:

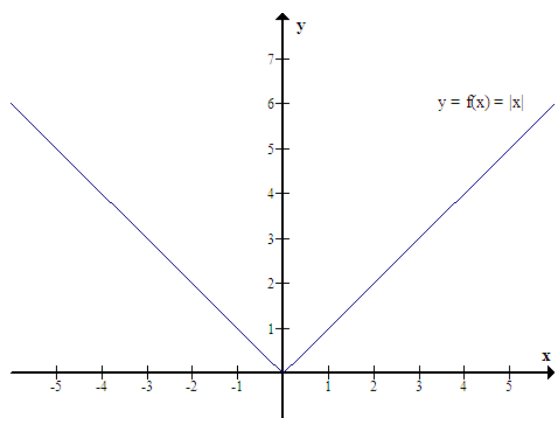
Revenons à notre objet en mouvement dont la position est donnée par la fonction $s(t) = 2t^2 + 3t + 2$ (où $s(t)$ est en mètres et t en secondes). La vitesse $v(t)$ de l'objet est le taux de changement instantané de la position par rapport au temps, ou la dérivee de $s(t)$ par rapport à t :

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2(t+h)^2 + 3(t+h) + 2) - (2t^2 + 3t + 2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2(t^2 + 2th + h^2) + 3t + 3h + 2) - (2t^2 + 3t + 2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4th + 2h^2 + 3h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 4t + 2h + 3$$
$$= 4t + 3\ .$$

En particulier, la vitesse au temps $t = 2$ s est $v(2) = s'(2) = 4(2) + 3 = 11$ m/s.

Puisque la dérivée (soit le taux de changement instantané ou la pente de la droite tangente) est définie par une limite, il est possible qu'elle n'existe pas pour tout x. On dit que $f(x)$

est <u>dérivable en $x = a$</u> si $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe. Comment $f'(a)$ peut ne pas exister ? Si a n'appartient pas au domaine de f, $f(a)$ n'est pas définie et $f'(a)$ ne peut pas exister. Si f n'est pas continue en $x = a$, $f'(a)$ ne va pas exister non plus (*on ne peut pas tracer la droite tangente à la courbe en ce point*). Mais, il est aussi possible que $f(x)$ soit continue en $x = a$ alors que $f'(a)$ n'existe pas. Considérons la fonction valuer absolue $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$



Notez que $f(x)$ est continue en $x = 0$ parce que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$. Mais, si $f'(0)$ existe, on doit avoir $f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$. On doit considérer les deux limites (à gauche et à droite) séparément, car la définition de la fonction valeur absolue est différente pour des valeurs positives et négatives. $\lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{-h}{h} =$

Et $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$.

Donc $\lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$, conséquemment $f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ n'existe pas. La fonction $y = f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0. Le graphe de $y = f(x) = |x|$ a alors un <u>angle</u> ou une <u>rupture de pente</u> en $x = 0$.

$f'(a)$ n'existe pas non plus s'il y a un <u>point de rebroussement</u> ou une <u>tangente verticale</u> en $x = a$.

Problèmes pratiques

1. On considère les données suivantes. Trouvez le taux de changement moyen de la fonction $g(t)$ sur les intervalles suivants.

(a) $0 \leq t \leq 2$
(b) $0 \leq t \leq 4$
(c) $4 \leq t \leq 7$

t	$g(t)$
0	1
1	3
2	6
3	9
4	14
5	20
6	28
7	37
8	49

2. Utilisez les taux de changement pour estimer la vitesse instantanée d'un objet en mouvement au temps $t = 3$ s si la position de l'objet est donnée par la fonction $s(t) = 4t^2 - 2t + 1$ (en m).

3. Trouvez les limites des suites suivantes.
(a) $1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \frac{13}{6}, \frac{13}{7}, \ldots, 2 + \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$
(b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, 3^{1-n}, \ldots$
(c) $0.6, 0.66, 0.666, 0.6666, 0.66666, \ldots$
(d) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots, (-1)^{n-1}n, \ldots$

4. Trouvez les limites.
(a) $\lim_{x\to -2} x^2 + 3x - 7$
(b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x+7}$
(c) $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x+2}{x^2+4}}$
(d) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x+4}}$

5. Considérez la fonction $f(x) = \begin{cases} x+4 & x < -2 \\ 2 & -2 \leq x < 1 \\ 1-x^2 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$.
Déterminez si la fonction a des discontinuités. Si c'est le cas, de quel(s) type(s) ?

6. Considérez $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Est-ce que $g(x)$ est définie pour $x = 2$? Est-ce que $g(x)$ est continue en $x = 2$? Est-ce que $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ existe ?

7. Trouvez les limites.
(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2+3x}{x+x^2}$
(b) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{9-x}$
(c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{x}}{4-x}$
(d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$

8. Quelle est la dérivée de $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$?

9. Si un objet en mouvement a une fonction de position $s(t) = 4t^2 + 2t$ (en m), quelle est la vitesse au temps $t = 5$ s ?

10. Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe $y = \dfrac{1}{x^2}$ au point $(1, 1)$?

Solutions des problèmes pratiques

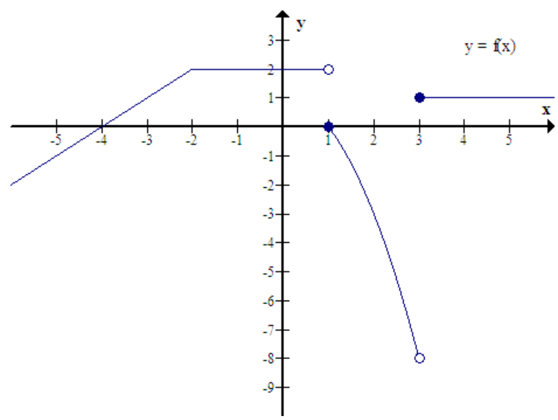
1. (a) $\dfrac{g(2)-g(0)}{2-0} = \dfrac{6-1}{2} = 5/2$
(b) $\dfrac{g(4)-g(0)}{4-0} = \dfrac{14-1}{4} = 13/4$
(c) $\dfrac{g(7)-g(4)}{7-4} = \dfrac{37-14}{3} = 23/3$

2. $v(3) \approx \dfrac{s(3+h)-s(3)}{h}$
$= \dfrac{(4(3+h)^2-2(3+h)+1)-(4(3)^2-2(3)+1)}{h}$
$= \dfrac{4(9+6h+h^2)-6-2h+1-4(9)+6-1}{h}$
$= \dfrac{24h+4h^2-2h}{h} = \dfrac{22h+4h^2}{h} = 22+4h$
donc si $h = 0.1$, $v(3) \approx 22.4$ m/s
si $h = 0.01$, $v(3) \approx 22.04$ m/s
si $h = 0.001$, $v(3) \approx 22.004$ m/s.
On conclut que $v(3) = 22$ m/s.

3. (a) Puisque $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \dfrac{(-1)^n}{n} = 2$
(b) Clairement $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{3^n} = 0$
(c) Ici la suite converge vers 2/3, donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2/3$
(d) Pas de limite ou la limite n'existe pas

4. (a) $4-6-7=-9$
(b) $10/10 = 1$
(c) $\sqrt{3/5}$
(d) $2/\sqrt{4} = 1$

5.



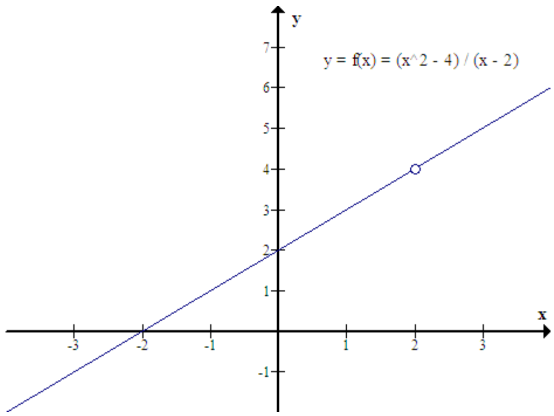
D'après le graphe, on voit que la fonction est continue en $x = -2$, mais il y a des discontinuités de saut en $x = 1$ et $x = 3$

OU

puisque la définition de $f(x)$ change en $x = -2, 1, 3$, on regarde ce qui se passe en ces points :
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} x + 4 = 2$ et $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 2 = 2$
donc $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$ et puisque $f(-2) = 2$, la fonction est continue en $x = -2$
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2 = 2$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 - x^2 = 0$
donc $\lim_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas, la fonction a une discontinuité de saut en $x = 1$
$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 1 - x^2 = -8$ et $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 1 = 1$
donc $\lim_{x \to 3} f(x)$ n'existe pas, la fonction a une discontinuité de saut en $x = 3$

6. Non, $g(2)$ n'est pas définie (car division par 0 ou forme indéterminée $\frac{0}{0}$)
Non, puisque $g(2)$ n'est pas définie, $g(x)$ ne peut pas être continue là
Oui, puisque $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$

$\langle$Notez que $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$, $(x \neq 2)$, *ie* que le graphe de $g(x)$ ressemble à celui de la droite $y = x + 2$ avec un trou en $(2, 4)$, conséquemment la discontinuité est un trou (ou discontinuité apparente).⟩



7. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+3x}{x+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(2x+3)}{x(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+3}{1+x} = 3$

(b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{9-x} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{9-x}\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\right) = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{(9-x)(\sqrt{x}+3)} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{-1}{\sqrt{x}+3} = -1/6$

(c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{x}}{4-x} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\frac{x-4}{4x}}{4-x} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-1}{4x} = -1/16$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} x^2+3x+9 = 27$

8. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\left(\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$

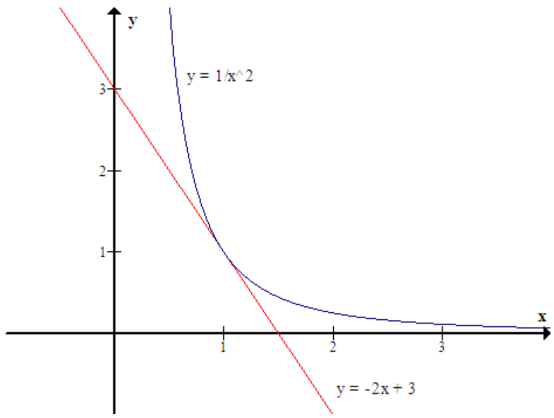
9. $v(5) = s'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(5+h)-s(5)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4(5+h)^2+2(5+h)-110}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4(25+10h+h^2)+10+2h-110}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{42h+4h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 42+4h = 42 \text{ m/s}$

10. $m = y'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - \frac{1}{(1)^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1 - 1 - 2h - h^2}{(1+h)^2} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{-2-h}{(1+h)^2} = -2$
donc $y - 1 = (-2)(x-1) \implies y = -2x = 3$



Chapitre 2

Objectifs

- être familier avec les règles de différentiation de base (constante, multiplication par une constante, somme et différence, puissance, produit, quotient et dérivation en chaîne) et être capable de les utiliser pour trouver les dérivées des fonctions données
- être capable d'utiliser les dérivées pour résoudre des problèmes sur les taux de changement, ainsi que des applications pratiques de physique et gestion
- être capable de trouver les derivées secondes (et plus) des fonctions en utilisant les règles de dérivation

Dérivées des polynômes

Regardons de plus près la différentiation (on suppose que toutes les fonctions ci-dessous sont dérivables).

Supposons que $f(x) = c$, une fonction constante. Alors
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$
ie $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$, ce qu'on appelle <u>la règle de la constante</u>.
Le taux de changement d'une constante est 0, ce qui est évident puisque la constante ne change pas.

Supposons $f(x) = cg(x)$, alors
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$= \lim_{h\to 0} \dfrac{cg(x+h) - cg(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{c(g(x+h) - g(x))}{h} = c\left(\lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) = cg'(x)$
ie $\dfrac{d}{dx}(cg(x)) = c\dfrac{d}{dx}(g(x))$, ce qu'on appelle <u>la règle de la multiplication par une constante</u>.

Et si $f(x) = p(x) \pm q(x)$, alors
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{(p(x+h) \pm q(x+h)) - (p(x) \pm q(x))}{h}$
$= \lim_{h\to 0} \dfrac{p(x+h) - p(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \dfrac{q(x+h) - q(x)}{h} = p'(x) \pm q'(x)$
ie $\dfrac{d}{dx}(p(x) \pm q(x)) = p'(x) \pm q'(x)$, ce qu'on appelle la règle de la somme ou de la différence.

Maintenant, que ce passe-t-il si $f(x) = x^n$? Les exemples qu'on a vu suggèrent que $f'(x) = nx^{n-1}$ ou $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$. Si $n \in \mathbb{N}$, on peut facilement prouver que c'est vrai:
$\dfrac{d}{dx}(x^n) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$
$= \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n\right]$
$= \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left[nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right]$
$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^2 + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$
$= nx^{n-1}$

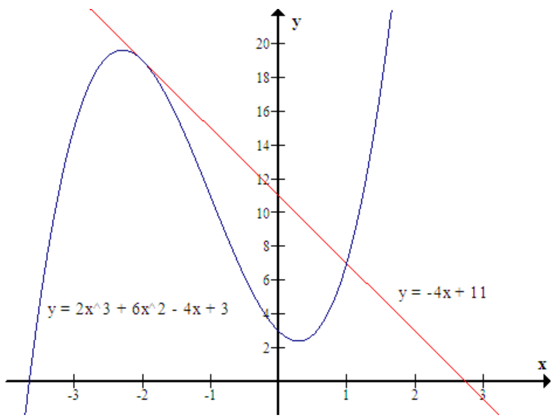
Mais on a aussi vu les exemples qui suggèrent que la règle est vraie pour les entiers négatifs et puissances rationnelles. En fait, la règle de la puissance $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ est vraie pour tout n réel (*on ne peut pas le prouver maintenant*).

Exemples:
(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$
(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(4x^2\right) = 4\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right) = 4(2x) = 8x$
(iii) Si $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x$, alors $f'(x) = 2(4x^3) - 3(2x) + 1 = 8x^3 - 6x + 1$.
(iv) Si $y = 3t^2 - \sqrt{t}$, alors $\dfrac{dy}{dt} = 6t - \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.
(*Notez que les règles sont indépendentes des variables choisies.*)

Exemple:
Trouvez l'équation de la droite tangente à $y = f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 3$ au point $x = -2$.

La pente de la droite est $m = f'(-2)$.
$f'(x) = 6x^2 + 12x - 4$, donc $m = f'(-2) = 6(-2)^2 + 12(-2) - 4 = -4$.
Le point sur le graphe a pour coordonnée $y = f(-2) = 2(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4(-2) + 3 = 19$.

Donc la droite tangente est $y - 19 = (-4)(x - (-2))$ ou $y = -4x + 11$.



Exemple:
La hauteur, en mètres, d'un objet lancé du toit d'un bâtiment d'une hauteur de 60 m après t secondes est $h(t) = 60 - 4.9t^2$.
(i) Quelle est la vitesse de l'objet après 2 s ?
(ii) Quelle est la vitesse au moment où l'objet atteint le sol ?

(i) La vitesse est $v(t) = h'(t) = -9.8t$, donc après 2 s, $v(2) = -19.6$ m/s (*le signe négatif veut dire le mouvement est dirigé vers le bas*).
(ii) L'objet atteint le sol quand $h(t) = 0$ ou $4.9t^2 = 60$ ou $t = 3.5$ s, donc $v(3.5) = 34.3$ m/s.

La règle du produit

Supposons qu'on a un produit de deux fonctions, $p(x) = f(x)g(x)$. On voudrait que $p'(x) = f'(x)g'(x)$, mais un simple exemple peut démontrer que ce n'est pas vrai. Si $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$, alors $p(x) = x^5$, donc $p'(x) = 5x^4$. Mais $f'(x)g'(x) = (3x^2)(2x) = 6x^3$. Clairement, $p'(x) \neq f'(x)g'(x)$.

Que vaut la dérivée du produit de fonctions dérivables ?

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \qquad (\textit{on additionne 0}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}
\end{aligned}$$

$= \left(\lim_{h\to 0} g(x+h)\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0} f(x)\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$
$= g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$

La règle du produit est $\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
ie la dérivée de la première fonction fois la deuxième fonction plus la première fonction fois la dérivée de la deuxième fonction.

Revenons à notre exemple: $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (3x^2)(x^2) + (x^3)(2x) = 5x^4 = \frac{d}{dx}\left(x^5\right)$.

Exemples:
(i) $\frac{d}{dx}\left((x^2+1)(x^2+3x-2)\right)$
$= \left(\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)\right)(x^2+3x-2) + (x^2+1)\left(\frac{d}{dx}\left(x^2+3x-2\right)\right)$
$= (2x)(x^2+3x-2) + (x^2+1)(2x+3)$
$= 2x^3 + 6x^2 - 4x + 2x^3 + 2x + 3x^2 + 3$
$= 4x^3 + 9x^2 - 2x + 3$
(ii) Si $f(t) = (t+1)(3t^4 - t^2)$,
alors $f'(t) = (1)(3t^4 - t^2) + (t+1)(12t^3 - 2t)$
$= 3t^4 - t^2 + 12t^4 + 12t^3 - 2t^2 - 2t$
$= 15t^4 + 12t^3 - 3t^2 - 2t$.
(iii) Si $y = (2x^2+1)^2 = (2x^2+1)(2x^2+1)$,
alors $\frac{dy}{dx} = (4x)(2x^2+1) + (2x^2+1)(4x)$
$= 2(2x^2+1)(4x)$
$= (8x)(2x^2+1)$
$= 16x^3 + 8x$.

Et que vaut $\frac{d}{dx}\left((2x^2+1)^3\right)$?
$\frac{d}{dx}\left((2x^2+1)^3\right) = \frac{d}{dx}\left((2x^2+1)^2(2x^2+1)\right)$
$= (2(2x^2+1)(4x)(2x^2+1) + (2x^2+1)^2(4x))$
$= 3(2x^2+1)^2(4x)$ (*Est-ce que vous voyez la forme générale ?*)

Exemple:
Un café vend 100 mochas par jour pour \$2.75 chacun. Les propriétaires du café ont déterminé que pour chaque augmentation du prix de 25¢, ils vont vendre 5 mochas de moins à chaque jour.
Si on pose n la quantité de 25¢ augmentations de prix, alors le prix de mocha sera $2.75 + 0.25n$ et la quantité vendue sera $100 - 5n$.
Donc le revenu des ventes de mochas sera $R(n) = (2.75 + 0.25n)(100 - 5n)$.
Alors $\frac{dR}{dn} = (0.25)(100 - 5n) + (2.75 + 0.25n)(-5)$
$= 25 - 1.25n - 13.75 - 1.25n$

$= 11.25 - 2.5n.$

Vitesse, accélération et dérivée seconde

Supposons qu'un objet en mouvement a une fonction de position $s(t)$. Alors $s(t)$ donne la distance entre l'objet et l'origine au moment t. Le signe de $s(t)$ nous dit de quel côté de l'origine l'objet se trouve – habituellement on prend les directions vers le haut et vers la droite comme positives. La vitesse est donnée par $v(t) = s'(t)$. Si $v(t) > 0$, l'objet se déplace dans la direction positive, et si $v(t) < 0$, il se déplace dans la direction négative. La magnitude de la vitesse d'un objet est donnée par $|v(t)|$. Si on dérive encore une fois on aura l'accélération de l'objet, ce qui est le taux de changement de vitesse avec du temps, *ie* $a(t) = v'(t)$.

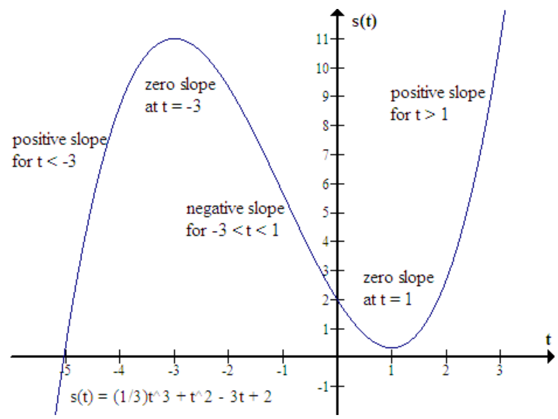
On a : $a(t) = v'(t) = \dfrac{d}{dt}(v(t)) = \dfrac{d}{dt}(s'(t)) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right) = \dfrac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$,
soit la deuxième dérivée de la fonction de position $s(t)$. L'objet accélère ou ralentit dépendemment des signes de $v(t)$ et $a(t)$. Si $v(t)$ et $a(t)$ ont le même signe, l'objet accélère. Si $v(t)$ et $a(t)$ ont des signes différents, l'objet ralentit.

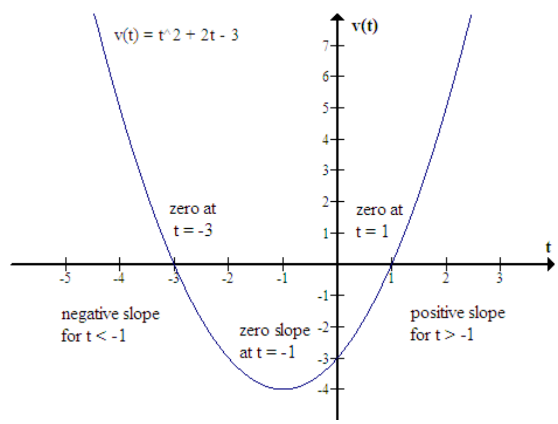
Donc, par exemple, si $v(t) < 0$ et $a(t) > 0$, l'object ralentit : $v(t) < 0$ signifie que l'objet se déplace dans la direction négative lorsque $a(t) > 0$ signifie que $v(t)$ augmente et donc devient de moins en moins négative et donc $|v(t)|$ diminue (*ça va avoir plus de sens si vous le lisez deux ou trois fois*).

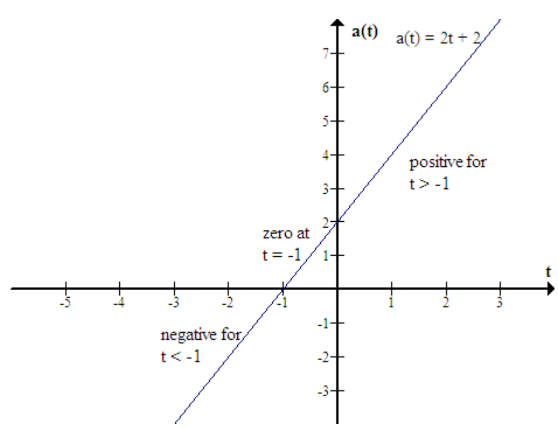
Exemple:
Une balle est lancée à la verticale vers le haut. Sa hauteur, en mètres, après t secondes, est $h(t) = -4.9t^2 + 20t + 2$.
La vitesse est $v(t) = h'(t) = -9.8t + 20$ et l'accélération est $a(t) = -9.8$ (*ce qui donne l'accélération gravitationnelle, notée g*).
$v(t) = 0$ quand $9.8t = 20$ ou $t = 2.04$ s.
À ce moment, la balle a atteint sa hauteur maximale $h(2.04) \approx 22.4$ m et commence à retomber vers le bas.

Exemple:
Un objet qui se déplace horizontalement vers la droite a pour fonction de position $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 3t + 2$ m, pour t mesuré en secondes.
La vitesse est $v(t) = s'(t) = t^2 + 2t - 3$ et l'accélèration est $a(t) = v'(t) = s''(t) = 2t + 2$.

Regardons les graphes pour voir les connexions entre $s(t)$, $v(t)$ et $a(t)$.





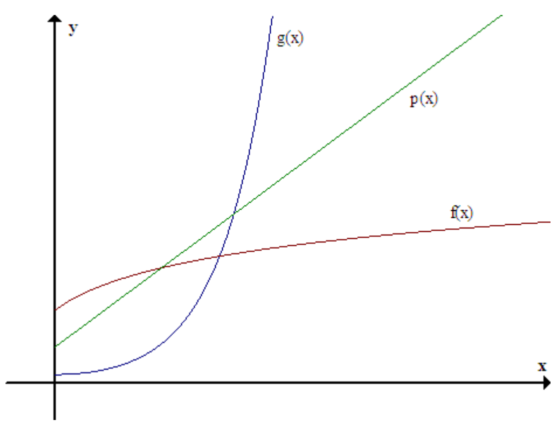


Par exemple, $s(t)$ a une pente zéro en $t = -3$ et $t = 1$. Ce sont des racines de $v(t)$. De plus,

$s(t)$ a un pente négative pour $-3 < t < 1$, précisement où $v(t)$ est négative. $v(t)$ a une pente zéro en $t = -1$, précisement où $a(t) = 0$.
Au moment $t = 0, s(0) = 2, v(0) = -3$ et $a(0) = 2$, donc l'objet est situé 2 m vers la droite de l'origine, a une vitesse de -3 m/s (*ie* vers la gauche) et une accélération de 2 m/s^2, donc il ralentit. Il va s'arrêter au moment $t = 1$ s (où $v(t) = 0$ et $s(t) = 1/3$), avant de commencer à se déplacer vers la gauche en accélérant constamment.

Exemples:
(i) Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 7x^3 - \pi x^2 - x + 1$. Alors
$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + 21x^2 - 2\pi x - 1$ et $f''(x) = 4x^2 + 42x - 2\pi$.
La troisième dérivée serait $f'''(x) = 8x + 42$ et la quatrième $f^{(4)}(x) = 8$.
(ii) Si $y = 3t^2 - \sqrt{t} + 5t$, alors
$\dfrac{dy}{dt} = 6t - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} + 5$ and $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 6 + \dfrac{1}{4t^{3/2}}$.

Exemple:
Considérons le graphe suivant.



Que peut-on dire à propos des dérivées premières et secondes de ces fonctions ? Puisque toutes les fonctions sont croissantes (leurs valeurs augmentent lorsque x augmente), toutes ont des pentes positives, donc $f' > 0$, $g' > 0$ et $p' > 0$. Mais comme $p(x)$ est une droite, $p''(x) = 0$. Et pour les dérivées secondes de f et g ? La pente de g augmente lorsque x augmente, donc $g'' > 0$. La pente de f diminue, donc $f'' < 0$.
Tracez des tangentes aux courbes pour des valeurs différentes de x pour mieux comprendre.

La règle de dérivation en chaîne

Si on a deux fonctions, $f(x)$ et $g(x)$, on peut les combiner pour obtenir de nouvelles fonctions, par exemple $f(x)g(x), f(x) + 2g(x), 3f(x) - \frac{1}{2}g(x)$, etc. Une autre façon de les combiner est de les composer, *ie* obtenir une fonction composée $f \circ g = f(g(x))$ et $g \circ f = g(f(x))$.

Exemple:
Si $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^2+2$, alors $f\circ g=f(g(x))=f(x^2+2)=\sqrt{x^2+2}$,
tandis que $g\circ f=g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+2=x+2$.
Notez qu'en général, $f\circ g\neq g\circ f$.

Dans la composition $f(g(x))$, on appelle $g(x)$ la fonction intérieure et $f(x)$ la fonction extérieure.
Considérons $q(x)=(2x^2+x-1)^4$. On a alors fonction extérieure $f(x)=x^4$ et comme fonction intérieure $g(x)=2x^2+x-1$.
Si vous avez des difficultés avec la définition de la partie intérieure d'une fonction composée, demandez-vous ce que vous devriez calculer premièrement pour évaluer une fonction composée en x.

Comment dériver des fonctions composées ?

Revenons à un exemple précédent : $\dfrac{d}{dx}\left((2x^2+1)^3\right)=3(2x^2+1)^2(4x)$.
Soit $f(x)=x^3$ et $g(x)=2x^2+1$, donc on a $f(g(x))=(2x^2+1)^3$.
Alors $f'(x)=3x^2$, donc $f'(g(x))=3(2x^2+1)^2$ et $g'(x)=4x$. Il semble que
$\dfrac{d}{dx}\left(f(g(x))\right)=\dfrac{d}{dx}\left((2x^2+1)^3\right)=3(2x^2+1)^2(4x)=f'(g(x))g'(x)$.

La règle de dérivation en chaîne stipule que si f et g sont dérivables, alors $\dfrac{d}{dx}\left(f(g(x))\right)=f'(g(x))g'(x)$,
soit la dérivée de la fonction extérieure par rapport à la fonction intérieure fois la dérivée de la fonction intérieure.

Exemple:
$\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x^4+5x^2}\right)$
$=\dfrac{d}{dx}\left((2x^4+5x^2)^{1/2}\right)$
$=\dfrac{1}{2}(2x^4+5x^2)^{-1/2}\dfrac{d}{dx}\left(2x^4+5x^2\right)$
$=\dfrac{1}{2}(2x^4+5x^2)^{-1/2}(8x^3+10x)$
$=\dfrac{8x^3+10x}{2\sqrt{2x^4+5x^2}}$
$=\dfrac{4x^3+5x}{\sqrt{2x^4+5x^2}}$.
Autre notation : si $y=f(u)$ et $u=g(x)$, alors $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.

Malgré les différences de notation, on retrouve la même règle de dérivation en chaîne :
si $y=f(u)$ et $u=g(x)$, alors $y=f(g(x))$, et
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(f(g(x))\right)$
$=f'(g(x))g'(x)$
$=f'(u)g'(x)$

$$= \frac{df}{du} u'(x) \qquad (\textit{puisque } u = g(x))$$
$$= \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$
$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad (\textit{comme } y = f(u)).$$

Si la fonction extérieure est une puissance, $f(x) = x^n$, on a un cas particulier de la règle de dérivation en chaîne appelé <u>règle de la fonction de puissance</u> :

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = \frac{d}{dx}\left((g(x))^n\right) = n(g(x))^{n-1}g'(x) \ .$$

Exemples:

(i) $\dfrac{d}{dx}\left((5x^2 - x)^7\right) = 7(5x^2 - x)^6(10x - 1)$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left((2x + 1)^4(6x^2 - 2)^3\right)$ $\quad$ (*règles du produit et de dérivation en chaîne*)

$= 4(2x + 1)^3(2)(6x^2 - 2)^3 + (2x + 1)^4(3)(6x^2 - 2)^2(12x)$

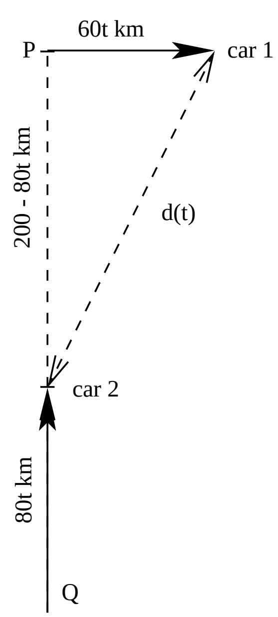
$= 4(2x + 1)^3(6x^2 - 2)^2\left[2(6x^2 - 2) + 9(2x + 1)\right]$

$= 4(2x + 1)^3(6x^2 - 2)^2(12x^2 + 18x + 5)$

(iii) Si $p(t) = \sqrt[3]{t^2 + 3t + 2} = (t^2 + 3t + 2)^{1/3}$, alors $p'(t) = \frac{1}{3}(t^2 + 3t + 2)^{-2/3}(2t + 3)$.

Exemple:

Au temps $t = 0$, une voiture commence à rouler vers l'est à partir du point P à 60 km/h. Une deuxième voiture, initialement au point Q situé à 200 km au sud pu point P, commence à rouler vers le nord à 80 km/h. Après t heures, quelle est la distance entre les voitures et quel est son taux de changement ?



La voiture 1 parcourt $60t$ km vers l'est de P et la voiture 2 parcourt $80t$ km vers le nord de Q, ce qui donne $200 - 80t$ km vers le sud de P.

La distance entre les voitures (*par le théorème Pythagore*) est donnée par
$d(t) = \sqrt{(60t)^2 + (200-80t)^2}$
$= \sqrt{3600t^2 + 40000 - 32000t + 6400t^2}$
$= \sqrt{10000t^2 - 32000t + 40000}$
$= 100\sqrt{t^2 - 3.2t + 4}$ km.
Le taux de changement est donné par
$d'(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)(t^2 - 3.2t + 4)^{-1/2}(2t - 3.2)$
$= \dfrac{50(2t-3.2)}{\sqrt{t^2 - 3.2t + 4}}$ km/h.
Après 1 heure, par exemple, $d(1) \approx 134$ km et $d'(1) \approx -44.7$ km/h
($d'(1) < 0$ *signifie que la distance entre les voiture diminue*).

Dérivées des quotients de fonction

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions dérivables (et $g(x) \neq 0$), quelle est la dérivée de leur quotient ?

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(f(x)(g(x))^{-1}\right)$
$= f'(x)(g(x))^{-1} + f(x)(-1)(g(x))^{-2}g'(x)$
$= \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ appelé <u>la règle du quotient</u>,
soit la dérivée du numérateur fois le dénominateur moins le numérateur fois la dérivée du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.

Exemples:
(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x+1}{3x+2}\right)$
$= \dfrac{\left(\frac{d}{dx}(2x+1)\right)(3x+2) - (2x+1)\left(\frac{d}{dx}(3x+2)\right)}{(3x+2)^2}$
$= \dfrac{(2)(3x+2) - (2x+1)(3)}{(3x+2)^2}$
$= \dfrac{1}{(3x+2)^2}$
(ii) Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{2x^2+x}$ alors
$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}(1)(2x^2+x) - (x+1)^{1/2}(4x+1)}{(2x^2+x)^2}$
$= \dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}\left[(2x^2+x) - 2(x+1)(4x+1)\right]}{(2x^2+x)^2}$
$= \dfrac{-(6x^2+9x+2)}{2(2x^2+x)^2\sqrt{x+1}}$.

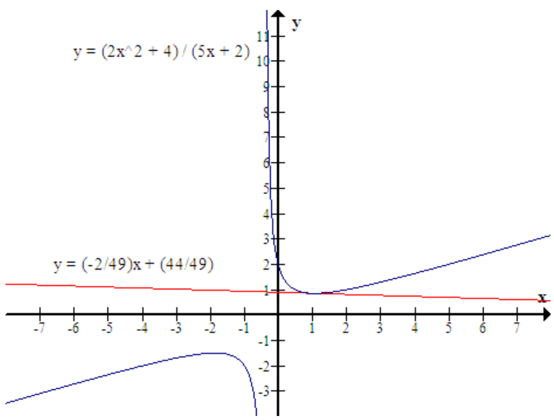
Exemple:

Trouvez l'équation de la tangente à la courbe $y = \dfrac{2x^2+4}{5x+2}$ en $x = 1$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x(5x+2)-(2x^2+4)(5)}{(5x+2)^2} = \dfrac{10x^2+8x-20}{(5x+2)^2}$,

donc la pente est $m = \dfrac{dy}{dx}|_{x=1} = \dfrac{10+8-20}{(7)^2} = \dfrac{-2}{49}$

et la droite tangente est $y - \frac{6}{7} = \frac{-2}{49}(x-1)$ ou $y = \frac{-2}{49}x + \frac{44}{49}$.



Exemple:

La valeur d'une voiture, en dollars, t ans après l'acquisition est donnée par $V(t) = \dfrac{20000+2t}{1+t}$.

Ainsi $V'(t) = \dfrac{2(1+t)-(20000+2t)}{(1+t)^2} = \dfrac{-19998}{(1+t)^2}$.

t	$V(t)$	$V'(t)$
0	20000	-19998
1	10001	-4999.50
2	6668	-2222
3	5001.50	-1249.88
4	4001.60	-799.92
5	3335	-555.50

Après $t = 2$ ans, par exemple, la valeur de la voiture est \$6668 et diminue de \$2222 par année (*cet exemple explique pourquoi beaucoup de gens achètent des voiture d'occasion*).

(Khan Academy video Calculus: "Quotient Rule" here)

Problèmes sur les taux de changement

On commence par quelques notions de gestion et d'économie. La demande ou fonction de prix, $p(x)$, est le prix par unité lorsque x unités sont vendues. La fonction de revenu est $R(x) = xp(x)$, le montant reçu lorsque x unités sont vendues au prix $p(x)$. La fonction de coût, $C(x)$, est le coût total de la production de x unités de produit. La fonction de profit est $P(x) = R(x) - C(x)$, le profit des ventes de x unités.

La fonction du coût marginal est $C'(x)$, le taux de changement du coût.
La fonction du revenu marginal est $R'(x)$, le taux de changement du revenu.
La fonction du profit marginal est $P'(x)$, le taux de changement du profit.
Toutes ces fonctions sont définies par rapport à x, la quantité d'unités vendues.

Le coût marginal en $x = 100$, $C'(100)$, par exemple, est un estimateur du coût réel de production d'une 101ème unité de produit, tandis que $P'(100)$ est un estimateur de la variation de profit si on vend une 101ème unité.

Exemple:
Un café vend 100 mochas par jour à \$2.75. On a vu que le café vendrait 5 mochas de moins par jour pour chaque augmentation du prix de 25¢.
Soit n le nombre de tranches d'augmentation du prix de 25¢ , alors le prix unitarie est $p = 2.75 + 0.25n$ et la quantité vendue est $x = 100 - 5n$. Ainsi $n = \dfrac{100 - x}{5} = 20 - 0.2x$, donc le prix unitaire est $p(x) = 2.75 + 0.25(20 - 0.2x) = 7.75 - 0.05x$ et le revenu est $R(x) = xp(x) = 7.75x - 0.05x^2$. Donc le revenu marginal est $R'(x) = 7.75 - 0.1x$. En augmentant le prix à \$3.25, le café vendra $x = 90$ mochas par jour et le revenu serait $R(90) = \$292.50$. Le revenu marginal sera de $R'(90) = -\$1.25$, *ie* le revenu diminue pour un prix unitarie de \$3.25.

Exemple:
Le coût de production de x unités d'un produit est $C(x) = -0.002x^2 + 10x + 4000$. Comparez le coût marginal pour 500 unités avec le coût de production de la 501ème unité.

$C'(x) = -0.004x + 10$, donc le coût margial est $C'(500) = 8$.
Le coût réel est $\Delta C = C(501) - C(500)$
$= (-0.002(501)^2 + 10(501) + 4000) - (-0.002(500)^2 + 10(500) + 4000) = 7.998$ (*très proche*).

Maintenant, regardons quelques notions de physique. L'énergie cinétique, en joules J, d'un objet ayant une masse de m kg et une vitesse de v m/s est $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Exemple:
Une balle de baseball ayant une masse 150 g est lancée verticalement avec une vitesse initiale de 30 m/s, donc sa vitesse au temps t est de $v(t) = 30 - 9.8t$.
L'énergie cinétique de la balle est de $K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.150)(30 - 9.8t)^2 = 0.075(30 - 9.8t)^2$, alors $K'(t) = 2(0.075)(30 - 9.8t)(-9.8) = -1.47(30 - 9.8t)$.

Donc $K'(2) = -15.288$ J/s et la balle ralentit lorsque son énergie cinétique diminue.

Problèmes pratiques

1. Trouvez les dérivées des fonctions suivantes.
(a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
(b) $g(t) = 3t^4 - \sqrt{2}t^2 + \dfrac{7}{t} - \dfrac{3}{t^4}$
(c) $y = (2x^2 + 5x)(6x + 3)$
(d) $p(r) = (3r + 1)^5(4r^3 + r)^2$
(e) $g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 6}$
(f) $q(x) = \dfrac{4x + 7}{x^2 + x}$
(g) $f(t) = \dfrac{\sqrt{t^2 + 1}}{5t^3 + 6t}$
(h) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{2x^2 + 4}}$

2. Trouvez les dérivées secondes des fonctions suivantes.
(a) $f(x) = 5x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 7x + 1$
(b) $g(t) = 4t^{3/2} + 6\sqrt{t}$
(c) $y = \dfrac{2x + 1}{4x + 3}$
(d) $p(r) = (3r^2 + 2r + 7)^4$

3. Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x^2 + 4}}$ en $x = 2$.

4. Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{3x + 2}\right)^2$ en $x = -1$.

5. Une fusée est tirée veticalement vers le haut. Sa hauteur, en mètres, après t secondes, est donnée par $h(t) = -4.9t^2 + 20t + 1$.
(a) Quelle est la hauteur maximale que la fusée atteint ?
(b) Combien de temps va se passer avant que la fusée atteigne le sol ?
(c) Quelle est la vitesse de la fusée au moment où elle atteint le sol ?

6. Est-ce qu'il y a des points sur la courbe $y = \dfrac{8x^2}{(x^2 + 2)^2}$ où la droite tangente est horizontale ? Si oui, lesquels ?

7. La population de tamias dans un parc est donnée par $P(t) = \sqrt{100t + 20t^2}$ pour t mesuré en années.
(a) Quel est le taux de croissance de la population après 3 ans ?
(b) Quand la population va-t-elle atteindre 30 tamias ?

8. Calculez la dérivée de $f(x) = \dfrac{(3x^3 + 4x^2 - 7x)^2}{(x^2 + 6x + 2)^3}$.

9. La valeur, en dollars, d'une nouvelle voiture t ans après son acquisition est donnée par $V(t) = \dfrac{22000 + 4t}{1 + 0.5t}$.
(a) Quelle est la valeur initiale de cette voiture ?
(b) Quel est le taux de dépréciation après 1, 2 et 3 ans ?

10. Le coût de production, en dollars, de x gadgets est $C(x) = 0.1x^2 + 30x + 100$. La fonction de demande ou de prix est $p(x) = 125 - 0.2x$.
(a) Trouvez les fonctions de revenu et de profit.
(b) Déterminez le coût marginal pour 100 gadgets.
(c) Déterminez le coût réel de la production de 101ème gadget.
(d) Quels sont le revenu marginal et le profit marginal pour la vente de 100 gadgets ?

Solutions des problèmes pratiques

1. (a) $f'(x) = 4x - 4$

(b) $g'(t) = 12t^3 - 2\sqrt{2}t - \dfrac{7}{t^2} + \dfrac{12}{t^5}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = (4x+5)(6x+3) + (2x^2+5x)(6) = 36x^2 + 72x + 15$

(d) $p'(r) = 5(3r+1)^4(3)(4r^3+r)^2 + (3r+1)^5(2)(4r^3+r)(12r^2+1)$

$= (3r+1)^4(4r^3+r)\left[15(4r^3+r) + 2(3r+1)(12r^2+1)\right]$

$= (3r+1)^4(4r^3+r)(132r^3+24r^2+21r+2)$

(e) $g'(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+4x+6)^{-1/2}(2x+4) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+6}}$

(f) $q'(x) = \dfrac{4(x^2+x) - (4x+7)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \dfrac{-(4x^2+14x+7)}{(x^2+x)^2}$

(g) $f'(t) = \dfrac{\frac{1}{2}(t^2+1)^{-1/2}(2t)(5t^3+6t) - (t^2+1)^{1/2}(15t^2+6)}{(5t^3+6t)^2}$

$= \dfrac{t(5t^3+6t) - (t^2+1)(15t^2+6)}{\sqrt{t^2+1}(5t^3+6t)^2} = \dfrac{-(10t^4+15t^2+6)}{\sqrt{t^2+1}(5t^3+6t)^2}$

(h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+x}{2x^2+4}\right)^{-1/2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+x}{2x^2+4}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+x}{2x^2+4}\right)^{-1/2}\left(\dfrac{(2x+1)(2x^2+4) - (x^2+x)(4x)}{(2x^2+4)^2}\right)$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x^2+4}{x^2+x}\right)^{1/2}\left(\dfrac{-2x^2+8x+4}{(2x^2+4)^2}\right)$

$= \dfrac{-x^2+4x+2}{\sqrt{x^2+x}(2x^2+4)^{3/2}}$

2. (a) $f'(x) = 20x^3 + 18x^2 - 8x + 7$, so $f''(x) = 60x^2 + 36x - 8$

(b) $g'(t) = 6t^{1/2} + 3t^{-1/2}$, so $g''(t) = 3t^{-1/2} - \frac{3}{2}t^{-3/2}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(4x+3) - (2x+1)(4)}{(4x+3)^2} = \dfrac{2}{(4x+3)^2} = 2(4x+3)^{-2}$

donc $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2(-2)(4x+3)^{-3}(4) = \dfrac{-16}{(4x+3)^3}$

(d) $p'(r) = 4(3r^2+2r+7)^3(6r+2) = (3r^2+2r+7)^3(24r+8)$,

donc $p''(r) = 3(3r^2+2r+7)^2(6r+2)(24r+8) + (3r^2+2r+7)^3(24)$

$= 3(3r^2+2r+7)^2\left[(6r+2)(24r+8) + 8(3r^2+2r+7)\right]$

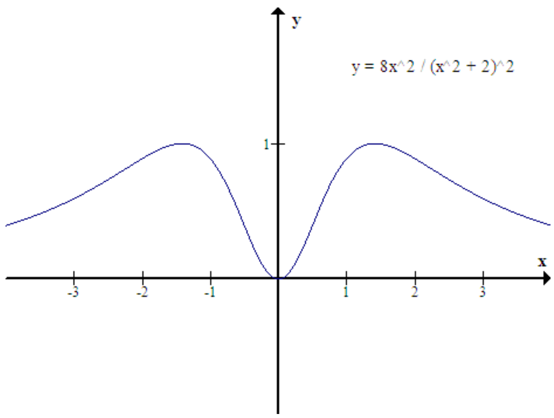
$= 3(3r^2+2r+7)^2(168r^2+112r+72)$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x^2+4}\right)^{-1/2}\left(\dfrac{(1)(x^2+4)-(x+1)(2x)}{(x^2+4)^2}\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+4}{x+1}\right)^{1/2}\left(\dfrac{4-x^2-2x}{(x^2+4)^2}\right)$
$= \dfrac{4-x^2-2x}{2\sqrt{x+1}(x^2+4)^{3/2}}$
donc la pente est $m = \dfrac{dy}{dx}|_{x=2} = \dfrac{4-2(2)-(2)^2}{2\sqrt{2+1}((2)^2+4)^{3/2}} = \dfrac{-4}{2\sqrt{3}(8)^{3/2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{3}(16\sqrt{2})} = \dfrac{-1}{8\sqrt{6}}$
et la droite est $y - \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{-1}{8\sqrt{6}}(x-2)$ ou $y = \frac{-1}{8\sqrt{6}}x + \frac{2}{8\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{3}{8}}$ ou $y \approx -0.051x + 0.714$

4. $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{x^2+1}{3x+2}\right)\left(\dfrac{2x(3x+2)-(x^2+1)(3)}{(3x+2)^2}\right) = \dfrac{2(x^2+1)(3x^2+4x-3)}{(3x+2)^3}$
donc la pente est $m = \dfrac{dy}{dx}|_{x=-1} = \dfrac{2((-1)^2+1)(3(-1)^2+4(-1)-3}{(3(-1)+2)^3} = \dfrac{2(2)(-4)}{(-1)^3} = 16$
et la droite est $y - 4 = 16(x-(-1))$ or $y = 16x + 20$

5. (a) la fusée est à sa hauteur maximale lorsque $v(t) = 0$, donc $v(t) = -9.8t + 20 \implies t \approx 2.041$ s
donc la hauteur maximale est $h(2.041) \approx 21.41$ m
(b) $h(t) = 0$ si $t = \dfrac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4(-4.9)(1)}}{2(-4.9)} = \dfrac{-20 \pm 20.484}{-9.8} = \cancel{-0.049}, 4.131$
donc ça prend 4.131 s pour atteindre le sol
(c) la vitesse quand elle frappe sera de $|v(4.131)| = |-9.8(4.131) + 20| = 20.484$ m/s

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{16x(x^2+2)^2 - 8x^2(2)(x^2+2)(2x)}{((x^2+2)^2)^2}$
$= \dfrac{16x(x^2+2) - 32x^3}{(x^2+2)^3} = \dfrac{32x - 16x^3}{(x^2+2)^3} = \dfrac{16x(2-x^2)}{(x^2+2)^3}$
donc $\dfrac{dy}{dx} = 0$ si $x = 0, \pm\sqrt{2}$.
Les tangentes horizontales sont en $(0,0)$ et $(\pm\sqrt{2}, 1)$



7. (a) $P'(t) = \dfrac{1}{2}(100t + 20t^2)^{-1/2}(100 + 40t) = \dfrac{50 + 20t}{\sqrt{100t + 20t^2}}$
donc $P'(3) = \dfrac{50 + 20(3)}{\sqrt{100(3) + 20(3)^2}} = \dfrac{50 + 60}{\sqrt{300 + 180}} \approx 5$ tamias par année
(b) $P(t) = \sqrt{100t + 20t^2} = 30 \implies 100t + 20t^2 = 900$
$\implies 20t^2 + 100t - 900 = 0 \implies t^2 + 5t - 45 = 0$
donc $t = \dfrac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)} = \dfrac{-5 \pm 14.318}{2} = \cancel{-9.66}, 4.66$
la population de tamia atteint 30 dans approximativement 4 ans et 8 mois

8. $f'(x) = \dfrac{2(3x^3 + 4x^2 - 7x)(9x^2 + 8x - 7)(x^2 + 6x + 2)^3 - (3x^3 + 4x^2 - 7x)^2(3)(x^2 + 6x + 2)^2(2x + 6)}{((x^2 + 6x + 2)^3)^2}$
$= \dfrac{2(3x^3 + 4x^2 - 7x)(x^2 + 6x + 2)^2\left[(9x^2 + 8x - 7)(x^2 + 6x + 2) - 3(3x^3 + 4x^2 - 7x)(x + 3)\right]}{(x^2 + 6x + 2)^6}$
$= \dfrac{2(3x^3 + 4x^2 - 7x)(23x^3 + 44x^2 + 37x - 14)}{(x^2 + 6x + 2)^4}$

9. (a) $V(0) = \$22000$
(b) $V'(t) = \dfrac{4(1+0.5t) - (22000+4t)(0.5)}{(1+0.5t)^2} = \dfrac{-10996}{(1+0.5t)^2}$
$V'(1) = -\$4887.11$ par année,
$V'(2) = -\$2749$ par année et
$V'(3) = -\$1759.36$ par année

10. (a) $R(x) = xp(x) = 125x - 0.2x^2$
$P(x) = R(x) - C(x) = 125x - 0.2x^2 - (0.1x^2 + 30x + 100) = 95x - 0.3x^2 - 100$
(b) $C'(x) = 0.2x + 30$, donc $C'(100) = \$50$
(c) $\Delta C = C(101) - C(100) = 0.1(101)^2 + 30(101) + 100 - (0.1(100)^2 + 30(100) + 100) = \$50.10$
(d) $R'(x) = 125 - 0.4x$, donc $R'(100) = \$85$
$P'(x) = 95 - 0.6x$, donc $P'(100) = \$35$
donc le revenu et le profit augmentent quand 100 unités sont vendues

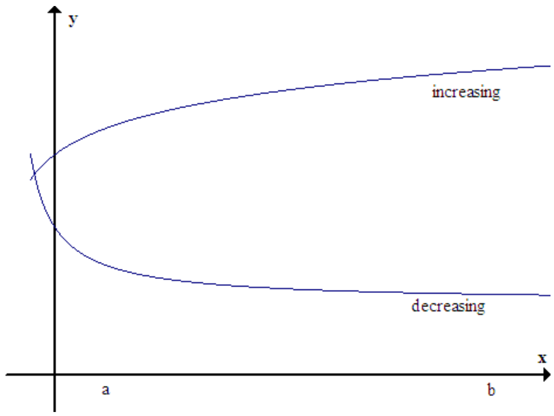
Chapitre 3

Objectifs

- comprendre les concepts de fonctions croissantes et décroissantes et leur lien avec la dérivée première
- comprendre le concept de point critique d'une fonction
- comprendre le concept des extrema globaux et locaux de fonctions et être capable de les trouver à l'aide de dérivées première et seconde et la méthode des intervalles
- comprendre le concept des fonctions concaves et convexes et leur lien avec la dérivée seconde
- être capable de trouver des points d'inflexion d'une fonction
- savoir si le graphe d'une fonction rationnelle a des asymptotes verticales et être capable de les identifier
- être capable d'esquisser le graphe d'une fonction en utilisant ses dérivées première et seconde
- être capable d'utiliser les dérivées pour résoudre des problèmes d'optimisation

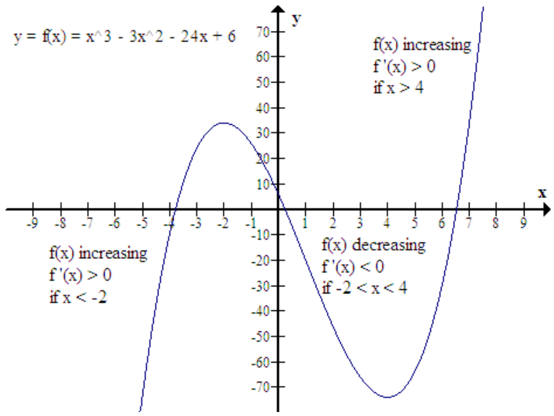
Fonctions croissantes et décroissamtes

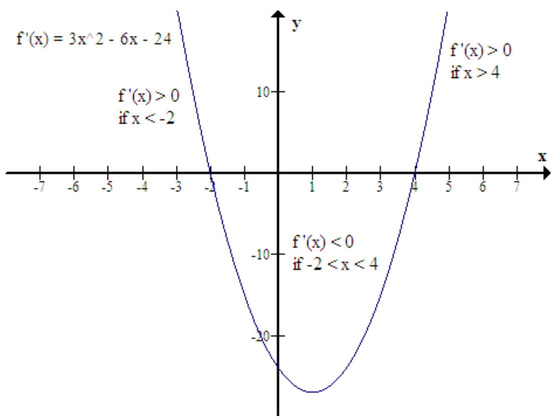
Une fonction $f(x)$ est dite croissante sur l'intervalle $a \leq x \leq b$ si la fonction augmente lorsque x augmente sur cet interval, *ie* $x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$. Elle est dite décroissante si la fonction diminue, *ie* $x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)$.



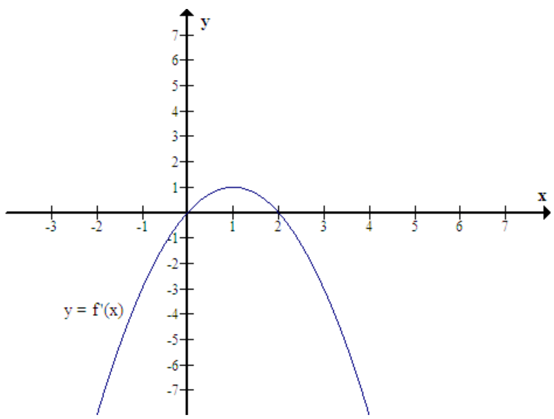
Notez le lien avec la dérivée première – si la fonction est croissante, alors les pentes des droites tangentes sont positives et, donc $f'(x) > 0$. Si la fonction est décroissante, alors les pentes des droites tangentes sont négatives et, donc $f'(x) < 0$.

Exemple:
Considérons $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 6$.
Alors $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8) = 3(x + 2)(x - 4)$,
donc $f'(x) = 0$ if $x = -2$ or $x = 4$.
Cela divise le domaine en trois intervalles $x < -2$, $-2 < x < 4$ and $x > 4$.
Si $x < -2$, $f'(x) > 0$, donc $f(x)$ est croissante.
Si $-2 < x < 4$, $f'(x) < 0$, donc $f(x)$ est décroissante.
Si $x > 4$, $f'(x) > 0$, donc $f(x)$ est croissante.

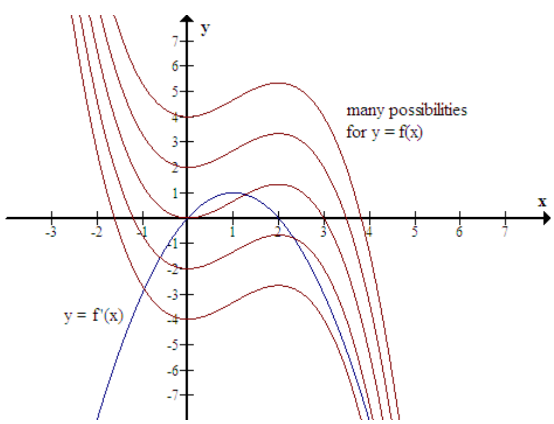

y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 6
f(x) increasing
f '(x) > 0
if x > 4
f(x) increasing
f '(x) > 0
if x < -2
f(x) decreasing
f '(x) < 0
if -2 < x < 4
x
y


f '(x) = 3x^2 - 6x - 24
f '(x) > 0
if x > 4
f '(x) > 0
if x < -2
f '(x) < 0
if -2 < x < 4
x
y

Exemple:
Supposons que le graphe de $f'(x)$ est comme suit :

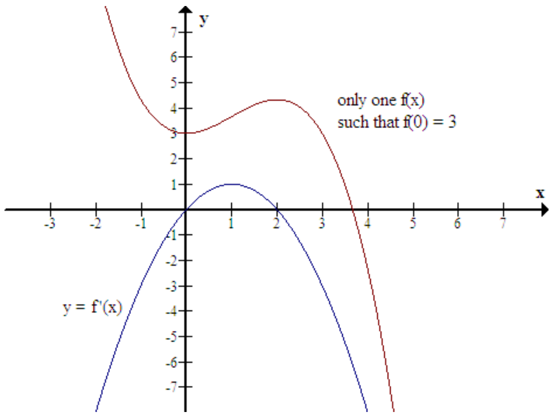


alors $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $x > 2$, impliquant que $f(x)$ est décroissante sur ces intervalles. Tandis que $f'(x) > 0$ sur $0 < x < 2$ donc $f(x)$ est croissante sur cet intervalle. Notez que $f'(x) = 0$ en $x = 0$ et $x = 2$ et, donc $f(x)$ a des tangentes horizontales en ces points (*ie* la pente est 0). Ainsi, on peut esquisser le graphe de $f(x)$.



Mais notez qu'il existe plusieurs (en fait, une infinité) fonctions $f(x)$ car on peut ajouter une constante à $f(x)$ et elles ont toutes la même dérivée $f'(x)$.

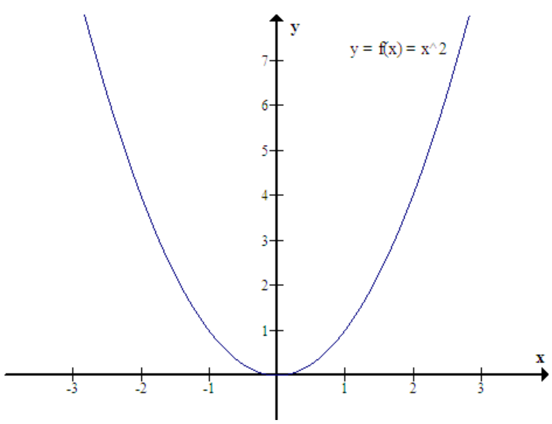
On a besoin d'informations supplémentaires pour identifier $f(x)$ de façon unique. Par exemple, supposons qu'on sait que $f(0) = 3$, alors on n'a qu'un seul choix de $f(x)$.



Maxima et minima

Une fonction $f(x)$ a un maximum global en $x = a$ si $f(a) \geq f(x)$ pour tout x dans le domaine (*ie* $f(a)$ est la plus grande valeur que la fonction atteint). Une fonction a un minimum global en $x = a$ si $f(a) \leq f(x)$ pour tout x dans le domaine (*ie* $f(a)$ est la plus petite valeur que la fonction atteint). *Une fonction peut avoir l'un, les deux ou aucun.*

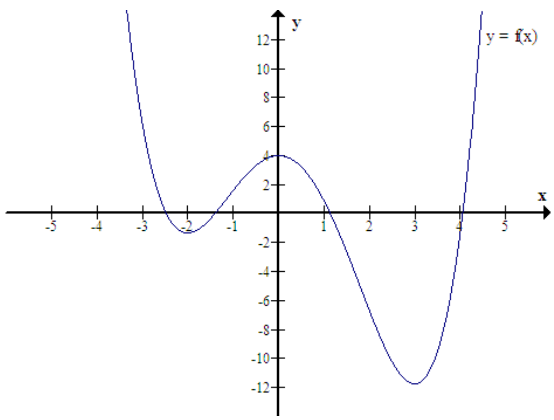
Exemple:
Considérons $f(x) = x^2$.



Cette fonction a un min global égal à 0 en $x = 0$, mais pas de max global parce que $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to \pm\infty$.

Outre des extrema globaux, une fonction peut aussi avoir des extrema locaux, soit la plus grande ou la plus petite valeur à proximité. La fonction $f(x)$ a un maximum local en $x = a$ si $f(a) \geq f(x)$ pour tout x proche de a (*ie* pour tout x sur un intervalle ouvert autour de a). Elle a un minimum local en $x = a$ si $f(a) \leq f(x)$ pour tout x proche de a.

Exemple:
Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 4$ comme illustrée dans le graphe ci-dessous.

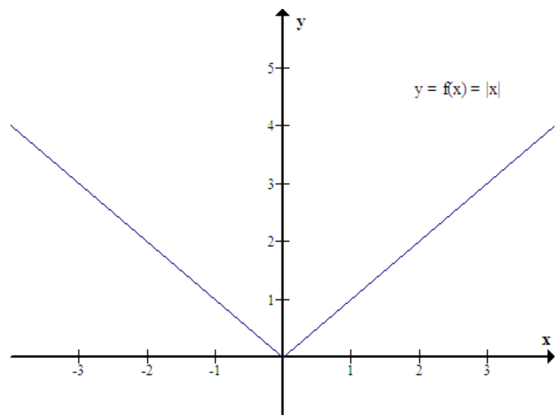


Cette fonction a un max local en $x = 0$, un min local en $x = -2$, un min local (et global) en $x = 3$ et pas de max global.

Notez que $f'(x) = x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x+2)(x-3)$ et donc $f'(x) = 0$ en $x = 0, -2$ et 3 – *ie* les extrema locaux. Ces points sont aussi appelés points critiques, puisque $f'(x) = 0$ pour cette fonction.

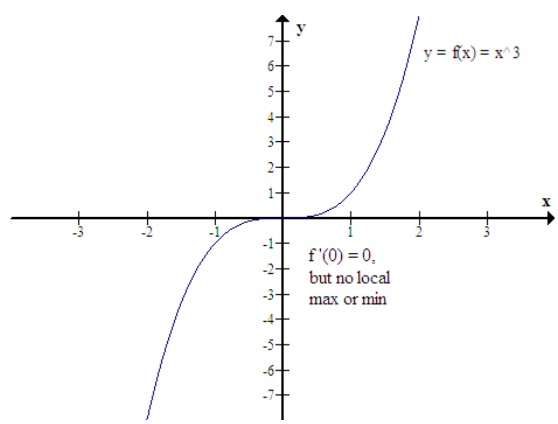
Un point critique d'une fonction $f(x)$ est une valeur a dans le domaine tel que $f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ n'est pas définie. Les extrema locaux sont parmis les points critiques – *ie* si $f(x)$ a un extremum local en $x = a$, alors $f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ n'est pas définie.

Pour comprendre que même si $f'(a)$ n'est pas définie $f(a)$ peut être un extremum local, considérons $f(x) = |x|$.



$f'(0)$ n'est pas définie, mais il y a un min local (et global) en $x = 0$.

Mais c'est aussi très important de commrendre que même si $x = a$ est un point critique de $f(x)$, $f(x)$ n'a pas nécessairement un extremum local en $x = a$. Par exemple, si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2 = 0$ si $x = 0$, mais il n'y a pas en ce point de max ou min local.



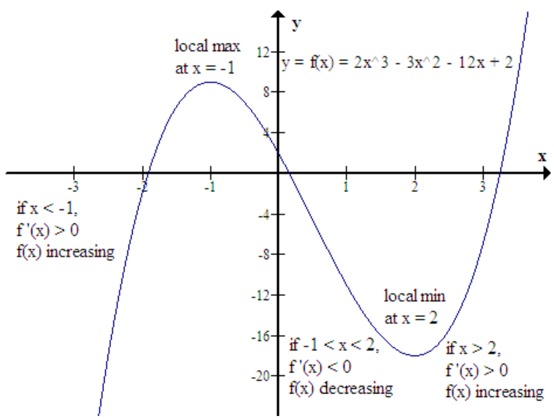
On peut distinguer un min local d'un max local en notant que la direction dans laquelle le signe de $f'(x)$ change est différente (*voir l'exemple ci-dessus*).

Le test de la dérivée première

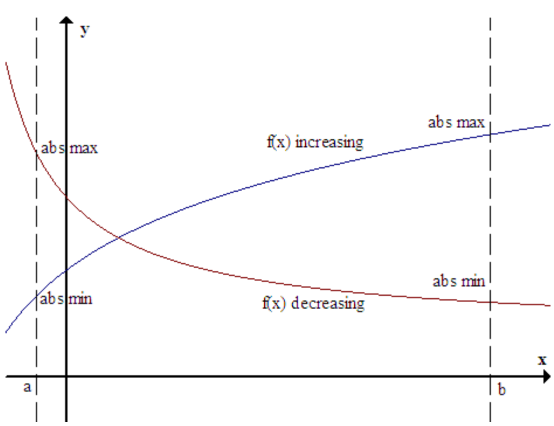
Supposons que $x = c$ est un point critique de $f(x)$.
(i) Si $f'(x)$ change le signe de $+$ à $-$ en $x = c$, alors $f(x)$ a un max local en $x = c$.
(ii) Si $f'(x)$ change le signe de $-$ à $+$ en $x = c$, alors $f(x)$ a un min local en $x = c$.
(iii) Si $f'(x)$ ne change pas le signe en $x = c$, alors il n'y a pas d'extremum local en ce point.

Pour comprendre que (iii) est vrai, regardons l'exemple avec $f(x) = x^3$ présenté ci-dessus.

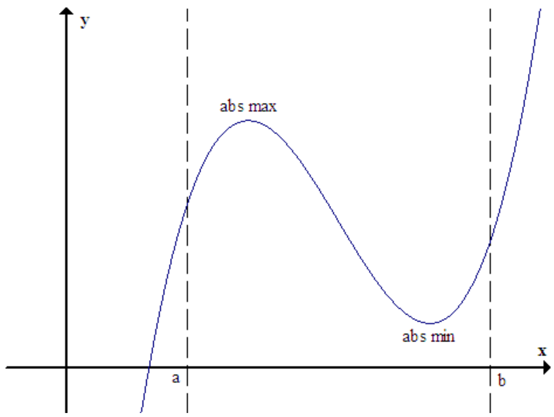
Exemple:
Considérons $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$.
Alors $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$,
donc les points critiques sont $x = -1$ et $x = 2$.
Si $x < -1$, $f'(x) > 0$ et $f(x)$ est croissante.
Si $-1 < x < 2$, $f'(x) < 0$ et $f(x)$ est décroissante. Alors il y a un max local en $x = -1$.
Si $x > 2$, $f'(x) > 0$ et $f(x)$ est croissante. Alors il y a un min local en $x = 2$.



Si $f(x)$ est une fonction continue définie sur un intervalle fermé $a \leq x \leq b$, alors $f(x)$ admet un max global ainsi qu'un min global sur l'intervalle. Mais où sont-ils ? Si $f(x)$ est monotone (croissante partout ou décroissante partout), les extrema seraient aux extrêmités de l'intervalle (voir le graphe ci-dessous).



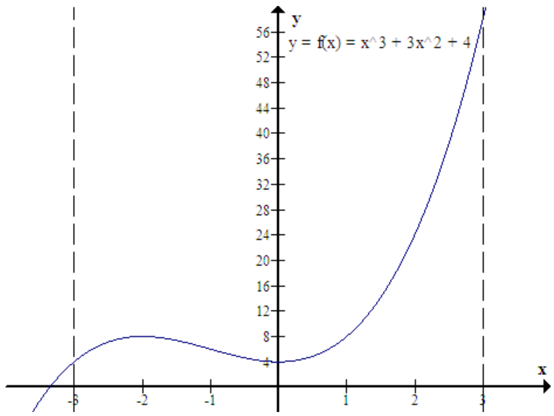
Sous quelle condition a-t-on un extremum à l'intérieur de l'intervalle ? La fonction doit être croissante et décroissante sur cet intervalle – ce qui signifie que la dérivée doit changer de signe – pour qu'il y ait un extremum local à l'intérieur de l'intervalle.



Ainsi on peut utiliser toutes ces propriétés et obtenir ce qu'on appelle la méthode d'intervalle fermé pour trouver les min et max globaux d'une fonction continue $f(x)$ sur un intervalle fermé $a \leq x \leq b$:
(i) Trouver les points critiques de $f(x)$ qui sont à l'intérieur de l'intervalle et évaluer la fonction en ces points.
(ii) Évaluer la fonction aux extrêmités de l'intervalle, soit en $x = a$ et $x = b$.
(iii) Comparer les valeurs et identifier un max et/ou min.

Exemple:
Trouver des extrema globaux de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$ sur l'intervalle $-3 \leq x \leq 3$.
$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$, donc les points critiques sont $x = -2$ et $x = 0$.
$f(-2) = 8, f(0) = 4$
$f(-3) = 4, f(3) = 58$

Ainsi le max global est 58 (en $x = 3$) et le min global est 4 (en $x = -3$ et $x = 0$).

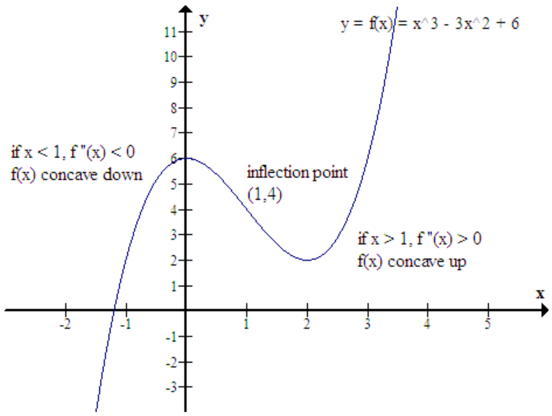


Concavité et test de la dérivée seconde

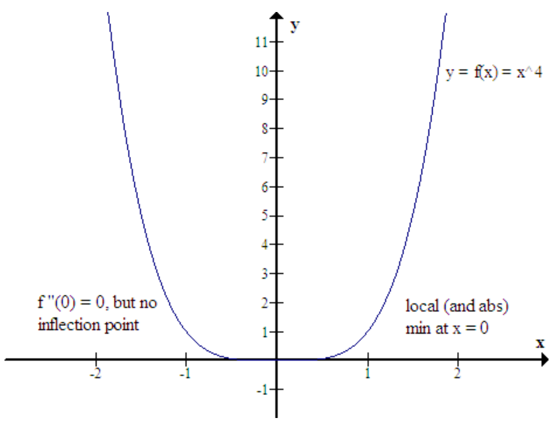
Si $f''(x) > 0$ sur un intervalle $a < x < b$, on dit que $f(x)$ est concave vers le haut sur l'intervalle. Dit autrement, la fonction est concave vers le haut lorsque la pente des droites tangentes augmente. Si $f''(x) < 0$, $f(x)$ est concave vers le bas. Un point où la concavité change est appelé point d'inflexion. Pour que la concavité change, il faut que $f''(x)$ change le signe et donc les points d'inflexion sont les points où $f''(x) = 0$ ou n'est pas définie. *Mais le fait que $f''(c) = 0$ ou n'est pas définie ne signifie pas qu'il y a nécessairement un point d'inflexion en $x = c$ – regardez l'exemple pour $f(x) = x^4$ ci-dessous.*

Exemple:
Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$, alors $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$,
donc $f''(x) = 0$ si $x = 1$.
Si $x < 1$, $f''(x) < 0$, donc $f(x)$ est concave vers le bas.
Si $x > 1$, $f''(x) > 0$, donc $f(x)$ est concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en

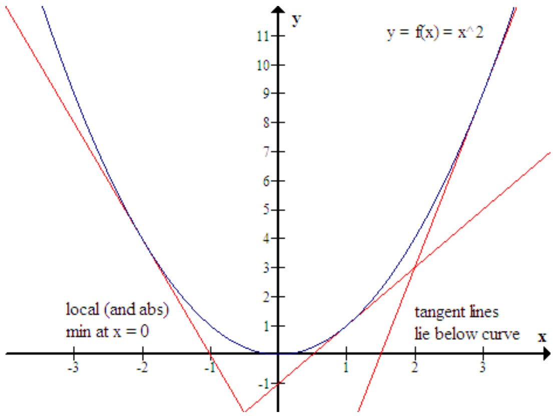
$x = 1$.

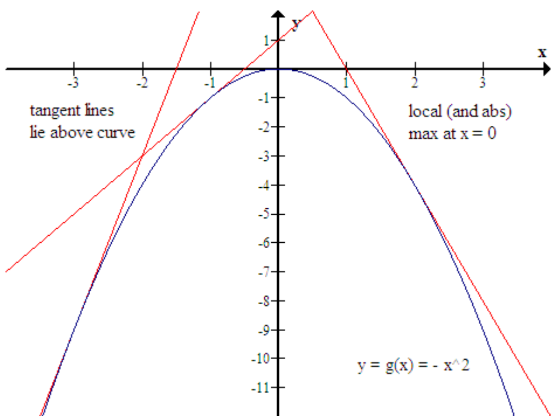


Exemple:
Si $f(x) = x^4$, alors $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$.
Alors $f''(0) = 0$, mais $f''(x) \geq 0$ pour tout x et la fonction est toujours concave vers le haut. Il n'y a pas de point d'inflexion puisque la concavité ne change pas.
Mais il y a un minimum local (et global) en $x = 0$.



Considérons les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2$. Alors $f'(x) = 2x, f''(x) = 2$, donc la fonction est toujours concave vers le haut et les droites tangentes se trouvent au-dessous de la courbe. La fonction admet un min local. Par ailleurs, $g'(x) = -2x, g''(x) = -2$ et cette fonction est toujours concave vers le bas. Les droites tangentes se trouvent toujours au-dessus de la courbe et la fonction $g(x)$ admet un max local. (*On remarquera que la droite* *tangente croise la courbe au point d'inflexion.*)





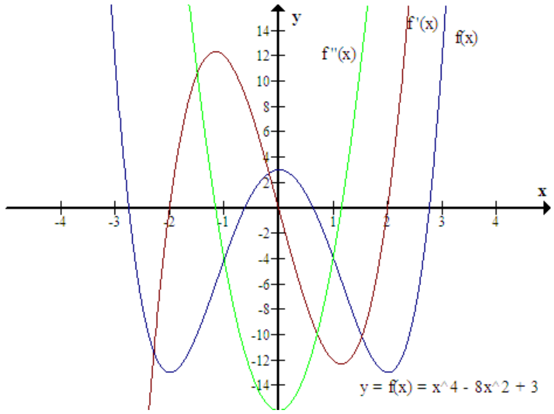
Ces graphes nous montrent le lien entre la concavité et les extrema locaux.

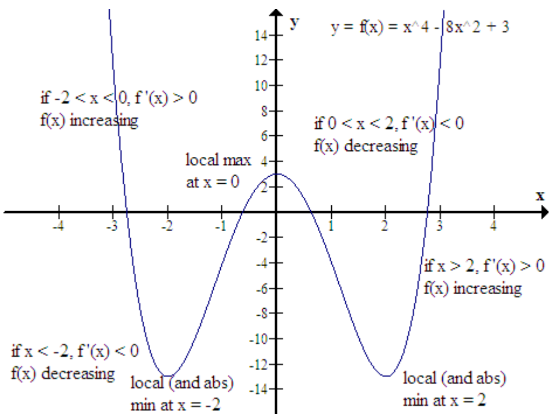
<u>Test de la dérivée seconde</u>
Supposons que $f'(c) = 0$ et $f''(c) \neq 0$.
(i) Si $f''(c) > 0$, $f(x)$ a un min local en $x = c$.
(ii) Si $f''(c) < 0$, $f(x)$ a un max local en $x = c$.

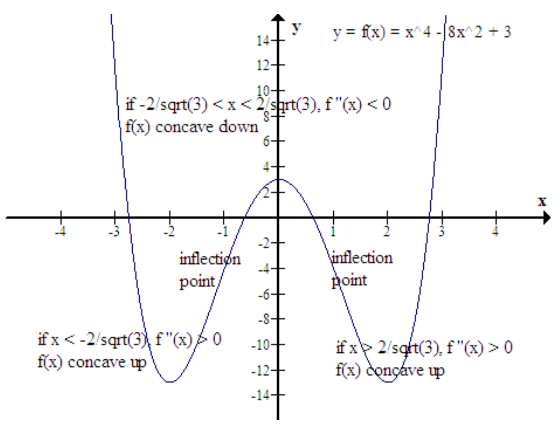
Exemple:
Considérons à nouveau l'exemple ci-dessus, soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.
Alors $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ et $f''(x) = 6x - 6$.
Ainsi $f'(x) = 0$ si $x = 0$ ou 2.
$f''(0) = -6 < 0 \implies$ max local en $x = 0$.
$f''(2) = 6 > 0 \implies$ min local en $x = 2$.

Exemple:
Considérons la fonction $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$
(*cette fonction est* <u>*paire*</u> *puisque* $f(-x) = f(x)$ *pour tout* x).
Alors $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x + 2)(x - 2)$
et donc $f'(x) = 0$ if $x = -2, 0$ ou 2.
Si $x < -2$, $f'(x) < 0 \implies f(x)$ est décroissante.
Si $-2 < x < 0$, $f'(x) > 0 \implies f(x)$ est croissante, donc $(-2, -13)$ est un min local (*par le test de la dérivée première*).
Si $0 < x < 2$, $f'(x) < 0 \implies f(x)$ est décroissante, donc $(0, 3)$ est un max local (*par le test de la dérivée première*).
Si $x > 2$, $f'(x) > 0 \implies f(x)$ est croissante, donc $(2, -13)$ est un min local (*par le test de la dérivée première*).
On a $f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4)$,
donc $f''(x) = 0$ si $x = \pm\sqrt{4/3} = \pm 2/\sqrt{3}$.
Si $x < -2/\sqrt{3}$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ est concave vers le haut.
Si $-2/\sqrt{3} < x < 2/\sqrt{3}$, $f''(x) < 0$ et $f(x)$ est concave vers le bas et il y a un point d'inflexion en $(-2/\sqrt{3}, -53/9)$.
Si $x > 2/\sqrt{3}$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ est concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en $(2/\sqrt{3}, -53/9)$.
De plus, on pourrait utiliser le test de la dérivée seconde pour identifier des extrema:
$f''(-2) > 0 \implies$ min local en $x = -2$,
$f''(0) < 0 \implies$ max local en $x = 0$,
et $f''(2) > 0 \implies$ min local en $x = 2$.

Regardez les graphes ci-dessous.







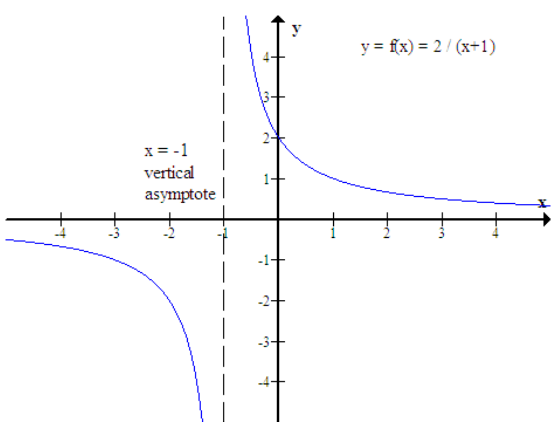
(Khan Academy video Calculus: “inflexion Points and Concavity Intuition” here)

Fonctions rationnelles de base

Une <u>fonction rationnelle</u> prend la forme $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Une fonction rationnelle n'est pas définie si $Q(x) = 0$ (*on ne peut pas diviser par 0*) et elle est continue partout dans son domaine, $\{x \,|\, Q(x) \neq 0\}$.

Si $x = a$ est une valeur telle que le dénominateur est égal à zéro et le numérateur ne l'est pas, *ie* $Q(a) = 0$ et $P(a) \neq 0$, la fonction rationnelle a une asymptote verticale en $x = a$. Plus précisément, $f(x)$ a une <u>asymptote verticale</u> en $x = a$ si $f(a)$ n'est pas définie et $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ et/ou $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$. *Si on regarde le graphe de $f(x)$, la courbe représentant la fonction ne croise pas l'asymptote verticale.*

Exemple:
Considérons $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$.
$f(x)$ n'est pas définie en $x = -1$ (le dénominateur vaut 0)
et $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \dfrac{2}{x+1} = -\infty$
et $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \dfrac{2}{x+1} = \infty$,
donc $x = -1$ est une asymptote verticale.



Les signes de $f'(x)$ et $f''(x)$ peuvent changer d'une côté à l'autre de l'asymptote $x = a$. On doit donc vérifier les signes de $f'(x)$ et $f''(x)$ de chaque côté lorsqu'on cherche les intervalles de croissance/décroissance et de concavité. *Mais il n'y a pas d'extremum local ou de point d'inflexion en $x = a$, même si le signe de la dérivée change puisqu'il n'y a pas de point sur le graphe de $f(x)$ en $x = a$.*

Exemple:

Considérons $f(x) = \dfrac{4}{x^2+x-6} = \dfrac{4}{(x+3)(x-2)}$.

$f(x)$ n'est pas définie en $x=-3$ et $x=2$.

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{4}{(x+3)(x-2)} = \infty$

et $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{4}{(x+3)(x-2)} = -\infty$,

donc il y a une asymptote verticale en $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4}{(x+3)(x-2)} = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4}{(x+3)(x-2)} = \infty$,

donc il y a une asymptote verticale en $x=2$.

$f(x) = \dfrac{4}{x^2+x-6} = 4(x^2+x-6)^{-1}$,

donc $f'(x) = -4(x^2+x-6)^{-2}(2x+1) = \dfrac{-4(2x+1)}{(x^2+x-6)^2}$.

$f'(x) = 0$ si $2x+1=0$ ou $x=-1/2$ (*lorsque le numérateur est égal à 0*).

Si $x<-3$, $f'(x)>0$, donc $f(x)$ est croissante.

Si $-3<x<-1/2$, $f'(x)>0$, donc $f(x)$ est croissante.

Si $-1/2<x<2$, $f'(x)<0$, donc $f(x)$ est décroissante et il y a un max local en $(-1/2,-16/25)$.

Si $x>2$, $f'(x)<0$, donc $f(x)$ est décroissante.

$f''(x) = -4\left[\dfrac{2(x^2+x-6)^2-(2x+1)(2)(x^2+x-6)(2x+1)}{(x^2+x-6)^4}\right]$

$= -4(2)\left[\dfrac{(x^2+x-6)-(2x+1)^2}{(x^2+x-6)^3}\right]$

$= -8\left(\dfrac{x^2+x-6-(4x^2+4x+1)}{(x^2+x-6)^3}\right)$

$= \dfrac{-8(-3x^2-3x-7)}{(x^2+x-6)^3}$

$= \dfrac{8(3x^2+3x+7)}{(x^2+x-6)^3}$,

donc $f''(x)=0$ si $3x^3+3x+7=0$,

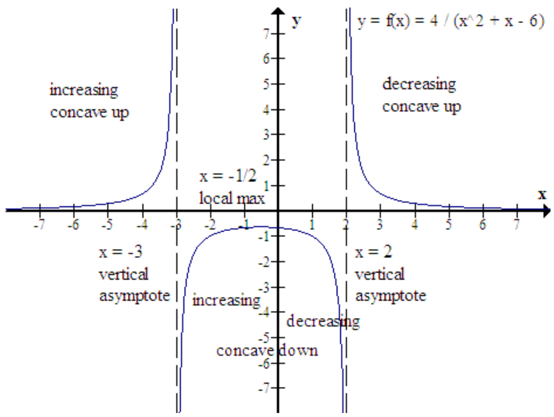
ou si $x = \dfrac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(3)(7)}}{2(3)} = \dfrac{-3\pm\sqrt{9-84}}{6}$. Il n'y a pas de racines réelles.

Si $x<-3$, $f''(x)>0$ et $f(x)$ est concave vers le haut.

Si $-3<x<2$, $f''(x)<0$ et $f(x)$ est concave vers le bas.

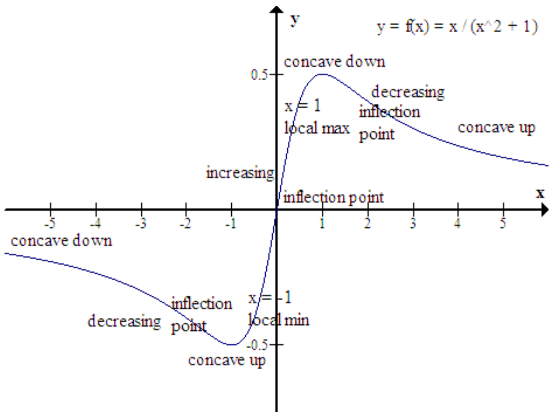
Si $x>2$, $f''(x)>0$ et $f(x)$ est concave vers le haut.

Mais il n'y a pas de points d'inflexion. *Pourquoi ?*



Exemple:
Considérons $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
(*cette fonction est* <u>*impaire*</u> *puisque* $f(-x) = -f(x)$ *pour tout* x).
Le dénominateur n'est jamais zéro, donc il n' a pas d'asymptotes verticales (*ie une fonction rationnelle n'a pas nécessairement des asymptotes verticales*).
$f'(x) = \dfrac{(1)(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$,
donc $f'(x) = 0$ si $x = \pm 1$.
Si $x < -1$, $f'(x) < 0 \implies f(x)$ est décroissante.
Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \implies f(x)$ est croissante et il y a un min local en $(-1, -1/2)$.
Si $x > 1$, $f'(x) < 0 \implies f(x)$ est décroissante et il y a un max local en $(1, 1/2)$.
$f''(x) = \dfrac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$
$= \dfrac{-2x(x^2+1) - 2(2x)(1-x^2)}{(x^2+1)^3}$
$= \dfrac{-2x[x^2+1+2(1-x^2)]}{(x^2+1)^3}$
$= \dfrac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$
$= \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$
Ainsi $f''(x) = 0$ si $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$.
Si $x < -\sqrt{3}$, $f''(x) < 0$ et $f(x)$ est concave vers le bas.
Si $-\sqrt{3} < x < 0$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ est concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$.
Si $0 < x < \sqrt{3}$, $f''(x) < 0$ et $f(x)$ est concave vers le bas et il y a un point d'inflexion en $(0, 0)$.
Si $x > \sqrt{3}$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ est concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en

$(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$.



Récapitulation

Si on veut esquisser le graphe d'une fonction $y = f(x)$, on peut comprendre le comportement de la fonction et identifier des points particuliers du graphe en identifiant :
(i) le domaine
(ii) les zéros (*où la courbe croise les axes des x et y*)
(iii) la parité de la fonction (*si la fonction est paire $f(-x) = f(x)$ ou impaire $f(-x) = -f(x)$, cependant la plupart des fonctions ne sont ni l'une ni l'autre*)
(iv) les asymptotes verticales
(v) les asymptotes horizontales (*vérifier si $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ou bien $\lim_{x\to\infty} f(x)$ sont des constantes*)
(vi) les intervalles de croissance et décroissance ainsi que les extrema locaux
(vii) les intervalles de concavité et points d'inflexion.

Exemple:
$y = f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
Cette fonction est définie pour tout x sauf $x = 0$, donc $x = 0$ peut être une asymptote verticale.
$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x + \dfrac{1}{x} = 0 - \infty = -\infty$
et $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x + \dfrac{1}{x} = 0 + \infty = \infty$.
Ainsi $x = 0$ est une asymptote verticale.
$f(0)$ n'est pas définie, donc il n'y a pas d'intersection avec l'axe des y.
$f(x) = 0$ ssi $x + \dfrac{1}{x} = 0$ ou $x^2 + 1 = 0$, ce qui est impossible (x *est réel*), donc il n'y a pas d'intersection avec l'axe des x non plus.
$f(-x) = (-x) + \dfrac{1}{(-x)} = -x - \dfrac{1}{x} = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$, donc cette fonction est impaire

(*la symétrie est par rapport à l'origine comme on verra avec le graphe*).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + \dfrac{1}{x} = -\infty - 0 = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x + \dfrac{1}{x} = \infty + 0 = \infty$,

donc il n'y a pas d'asymptotes horizontales.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$,

donc $f'(x) = 0$ si $x = \pm 1$.

Si $x < -1$, $f'(x) > 0$, donc $f(x)$ est croissante.

Si $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0$, donc $f(x)$ est décroissante et il y a un max local en $(-1, -2)$.

Si $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$, donc $f(x)$ est décroissante.

Si $x > 1$, $f'(x) > 0$, donc $f(x)$ est croissante et il y a un min local en $(1, 2)$.

Pourquoi a-t-on utilisé $x = 0$ pourdiviser les intervalles ?

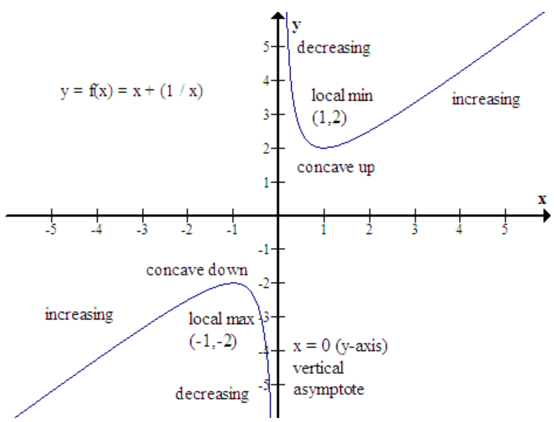
$f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \neq 0$ pour tout x.

Si $x < 0$, $f''(x) < 0$ et $f(x)$ est concave vers le bas.

Si $x > 0$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ est concave vers le bas.

Mais il n'y a pas de point d'inflexion. *Pourquoi ?*

Utilisons toutes ces informations pour esquisser le graphe.



Exemple:

$y = f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x$

$f(x)$ est un polynôme, donc cette fonction est définie pour tout x et il n'y a pas d'asymptotes verticales.

$f(0) = 0 \implies (0, 0)$ est l'intersection du graphe avec l'axe des y.

$f(x) = 0$ si $x^3 - 6x^2 - 36x = x(x^2 - 6x - 36) = 0$ ou si $x = 0$

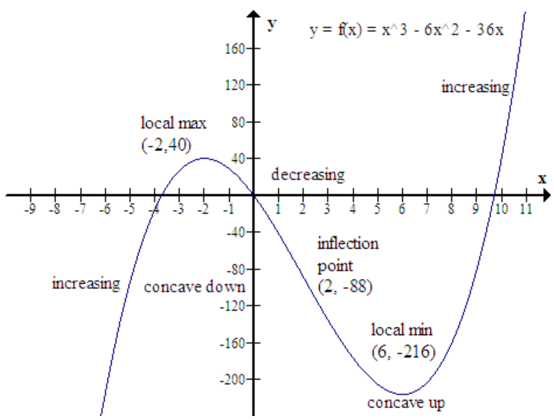
ou si $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(-36)}}{2(1)} = \dfrac{6 \pm \sqrt{5(36)}}{2} = \dfrac{6 \pm 6\sqrt{5}}{2} = 3 \pm 3\sqrt{5}$.

Ainsi les intersections avec l'axe des x sont $0, 3 - 3\sqrt{5} \approx -3.71$ et $3 + 3\sqrt{5} \approx 9.71$.

Cette fonction n'a pas de symétrie (*n'est ni paire, ni impaire*).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, donc pas d'asymptotes horizontales.

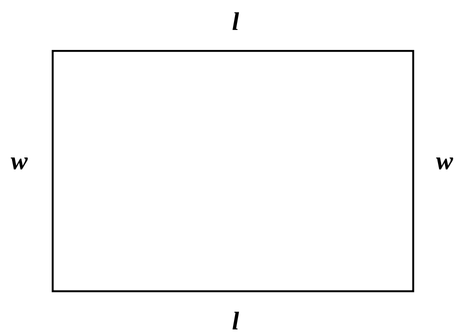
$f'(x) = 3x^2 - 12x - 36 = 3(x^2 - 4x - 12) = 3(x+2)(x-6)$,
donc $f'(x) = 0$ si $x = -2$ ou $x = 6$.
Si $x < -2$, $f'(x) > 0$, donc $f(x)$ est croissante.
Si $-2 < x < 6$, $f'(x) < 0$, donc $f(x)$ est décroissante et il y a un max local en $(-2, 40)$.
Si $x > 6$, $f'(x) > 0$, donc $f(x)$ est croissante et il y a un min local en $(6, -216)$.
$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$,
donc $f''(x) = 0$ si $x = 2$.
Si $x < 2$, $f''(x) < 0$, donc $f(x)$ est concave vers le bas.
Si $x > 2$, $f''(x) > 0$, donc $f(x)$ est concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en $(2, -88)$.



Problèmes d'optimisation

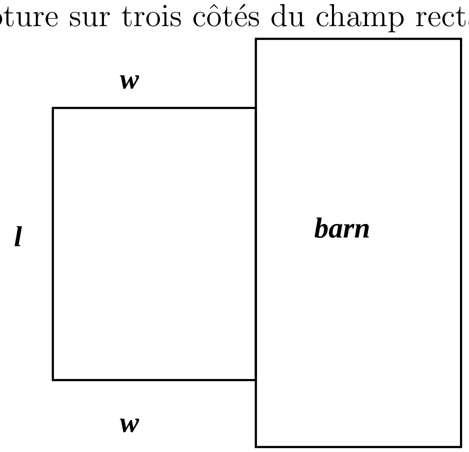
On veut utiliser nos connaissances pour trouver des extrema globaux d'une fonction sur un intervalle fermé ainsi que les tests basés sur les dérivées pour résoudre des problèmes practiques d'optimisation, par exemple, minimisation des coûts, maximisation de l'aire, etc. Voici certaines choses à prendre en compte :
(i) on doit être sûr de la question à resoudre et des données du problèmes ;
(ii) on doit identifier quelle fonction est à optimiser et sur quel intervalle. Cela demande de réduire le problème à une seule variable et de déterminer les contraintes à satisfaire.
(iii) un diagramme aide souvent.

Exemple:
Un agriculteur a 800 m de clôture et veut protéger un champ rectangulaire. Quelles dimensions vont maximiser l'aire du champ protégée ?



Soient l et w, les longueur et largeur du champ, respectivement.
On a dit que l'agriculteur possède 800 m de clôture, donc le périmètre du rectangle doit être de 800 m.
On a donc que $2l + 2w = 800$ ou $l + w = 400$.
L'aire protégée est $A = lw$, mais $w = 400 - l$, donc $A(l) = l(400 - l) = 400l - l^2$.
Clairement, $l \geq 0$ et puisque $w \geq 0$, on a $l \leq 400$ (*parce que* $l + w = 400$), donc, l'intervalle, sur lequel on minimse $A(l)$ est $0 \leq l \leq 400$.
$A'(l) = 400 - 2l$, donc $A'(l) = 0$ si $l = 200$.
$A(0) = 0$, $A(200) = 40\,000$ et $A(400) = 0$,
donc, l'aire maximale est de $40\,000$ m^2 si le champ est un carré de 200 m par 200 m.

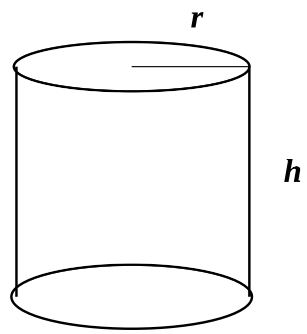
Exemple:
Et si l'agriculteur voulait mettre un enclos près de l'étable en utilisant seulement 100 m de clôture sur trois côtés du champ rectangulaire ?



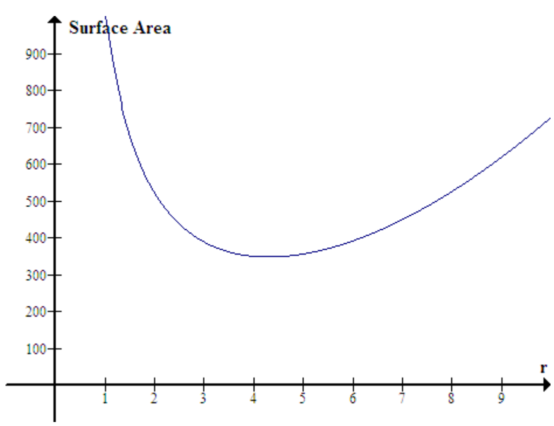
Maintenant $l + 2w = 100$, donc $w = (100 - l)/2$
et l'aire est $A(l) = l(100 - 1)/2 = 50l - l^2/2$ et l'intervalle est $0 \leq l \leq 100$. *Pourquoi ?*
Alors $A'(l) = 50 - l$, donc $A'(l) = 0$ si $l = 50$.
$A(0) = A(100) = 0$ et $A(50) = 1250$,
donc l'aire maximale est 1250 m^2 pour une taille de 50 m par 25 m, avec le côté de 50 m parallèle à l'étable.

Exemple:
Une boîte de conserve doit avoir un volume de 500 mL. Quelles dimensions vont minimiser

la quantité de métal nécessaire ?



Soit le rayon r et la hauteur h de la boîte de conserve.
La quantité de métal nécessaire est proportionelle à la surface du cylindre, qui est $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (*Est-ce que vous voyez ceci ?*).
Mais le volume doit du cylindre est donné par $V = \pi r^2 h = 500$ cm^3, donc $h = \dfrac{500}{\pi r^2}$.
Ainsi $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\dfrac{500}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \dfrac{1000}{r}$.
Clairement, les dimensions sont des valeurs positives.
$A'(r) = 4\pi r - \dfrac{1000}{r^2}$,
donc $A'(r) = 0$ si $4\pi r^3 = 1000$ ou $r^3 = \dfrac{1000}{4\pi} = \dfrac{250}{\pi}$ ou $r = \sqrt[3]{\dfrac{250}{\pi}} \approx 4.30$ cm.
$A''(r) = 4\pi + \dfrac{2000}{r^3} > 0$ pour tout $r > 0$, donc cette valeur est un min local (et global) de la fonction (*voir le graphe ci-dessous*).
La hauteur est alors $h = \dfrac{500}{\pi(4.3)^2} \approx 8.61$ cm
(*notez que la hauteur et le diamètre sont égaux dans ce cas*).



Exemple:
Supposons que le métal pour le fond et le couvercle de la boîte de concerve coûte deux fois

plus que celui pour le pourtour de la boîte. Quelles dimensions vont minimiser le coût de production du pot ?
Le coût sera $C = 2(2\pi r^2) + 2\pi rh = 4\pi r^2 + 2\pi rh$,
donc $C(r) = 4\pi r^2 + \dfrac{1000}{r}$.
Alors $C'(r) = 8\pi r - \dfrac{1000}{r^2}$, donc $C'(r) = 0$ si $r = \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}} \approx 3.41$ cm.
La hautuer $h \approx 13.69$ cm dans ce cas.
(*Notez que la hauteur est maintenant deux fois plus grande que le diamètre.*)

Exemple:
Si le coût de production de x gadgets est $C(x) = 0.1x^2 + 30x + 100$ et la fonction de prix est $p(x) = 125 - 0.2x$, combien de gadgets doit-on produire et vendre pour maximiser le profit ?
La fonction de profit est
$P(x) = R(x) - C(x)$
$= xp(x) - C(x)$
$= x(125 - 0.2x) - (0.1x^2 + 30x + 100)$
$= -0.3x^2 + 95x - 100.$
Donc $P'(x) = -0.6x + 95$, et alors $P'(x) = 0$ si $x = 95/0.6 \approx 158$.
$P''(x) = -0.6 < 0 \implies$ c'est un max local (et global) de la fonction (*on a alors une parabole ouverte vers le bas*).

Problèmes pratiques

1. Trouver les intervalles de croissance/décroissance des fonctions suivantes. Trouver et identifier tous les extrema locaux.
(a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$
(b) $g(t) = 2t^3 + 15t^2 - 84t + 13$
(c) $y = \dfrac{5}{x+3}$
(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

2. Trouver les intervalles de concavité et points d'inflexion des fonctions suivantes.
(a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$
(b) $g(t) = 2t^3 + 15t^2 - 84t + 13$
(c) $y = \dfrac{5}{x+3}$
(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

3. Trouver les min et max globaux des fonctions suivantes sur les intervalles donnés.
(a) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ on $[0, 5]$
(b) $y = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{8}{t}$ on $[1, 4]$
(c) $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 7$ on $[-1, 6]$
(d) $f(t) = t^4 - 8t^3 + 22t^2 - 24t$ on $[0, 4]$

4. Identifier les asymptotes verticales des fonctions suivantes.
(a) $f(x) = \dfrac{4}{x+6}$
(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$
(c) $y = \dfrac{2t}{t^2-4}$
(d) $g(r) = \dfrac{3r+1}{r^2-4r-12}$

5. Analyser la fonction $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ et esquisser son graphe.

6. Analyser la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x}$ et esquisser son graphe.

7. Analyser la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ et esquisser son graphe.

8. Analyser la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - x - 2}$ et esquisser son graphe.

9. Une boîte en carton sans couvercle doit être construite de manière que son fond soit deux fois plus long que large et son volume soit 2800 cm^3. Trouver les dimensions qui vont minimiser la quantité de carton nécessaire.

10. Le coût en essence par km d'un camion qui se déplace à v km/h est de $C(v) = \dfrac{v}{450} + \dfrac{13}{v}$.
(a) Quelle vitesse va minimiser le coût en essence par km ?
(b) Si le chauffeur est payé \$25 par heure, quelle vitesse va minimiser le coût total d'un voyage de 1500 km ?

Solutions des problèmes pratiques

1. (a) $f'(x) = 4x - 5$, donc $f'(x) = 0$ si $x = 5/4$
si $x < 5/4, f'(x) < 0$, alors $f(x)$ est décroissante
si $x > 5/4, f'(x) > 0$ donc $f(x)$ est croissante et il y a un min local en $x = 5/4$
(b) $g'(t) = 6t^2 + 30t - 84 = 6(t^2 + 5t - 14) = 6(t + 7)(t - 2)$, donc $g'(t) = 0$ si $t = 2$ ou -7
si $t < -7, g'(t) > 0$ donc $g(t)$ est croissante
si $-7 < t < 2, g'(t) < 0$ donc $g(t)$ est décroissante et il y a un max local en $t = -7$
si $t > 2, g'(t) > 0$ donc $g(t)$ est croissante et il y a un min local en $t = 2$
(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-5}{(x+3)^2} < 0$ pour tout $x \neq -3$, donc est toujours décroissante
(d) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, donc $f'(x) = 0$ si $x = 0$
si $x < 0, f'(x) < 0$ donc $f(x)$ est décroissante
si $x > 0, f'(x) > 0$ donc $f(x)$ est croissante et il y a un min local en $x = 0$

2. (a) $f'(x) = 4x - 5, f''(x) = 4 > 0 \implies$ est toujours concave vers le haut
(b) $g'(t) = 6t^2 + 30t - 84, g''(t) = 12t + 30$, donc $g''(t) = 0$ si $t = -30/12 = -5/2$
si $t < -5/2, g''(t) < 0$ donc $g(t)$ est concave vers le bas
si $t > -5/2, g''(t) > 0$ donc $g(t)$ est concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en $t = -5/2$
(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-5}{(x+3)^2}, \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{10}{(x+3)^3} \neq 0$ pour tout x
si $x < -3, y'' < 0$ donc est concave vers le bas
si $x > -3, y'' > 0$ donc est concave vers le haut (mais pas de point d'inflexion)
(d) $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$,

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2[(x^2+1) - 4x^2]}{(x^2+1)^3} = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

donc $f''(x) = 0$ si $x = \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0.577$
si $x < -1/\sqrt{3}, f''(x) < 0$, donc $f(x)$ est concave vers le bas
si $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}, f''(x) > 0$, donc $f(x)$ est concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en $x = -1/\sqrt{3}$
si $x > 1/\sqrt{3}, f''(x) < 0$, donc $f(x)$ est concave vers le bas et il y a un point d'inflexion $x = 1/\sqrt{3}$

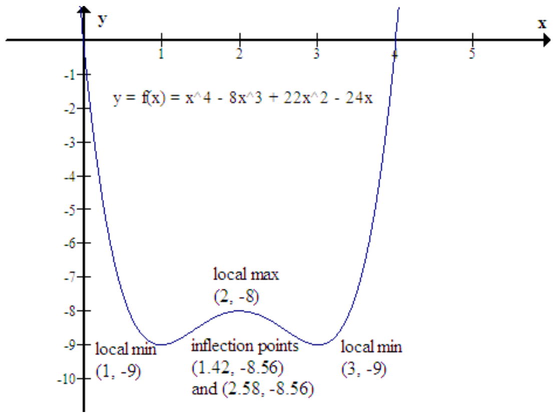
3. (a) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pour tout $x \neq -2$, donc $f(x)$ est toujours décroissante,
ainsi $f(0) = 3/2$ est le max et $f(5) = 3/7$ est le min
(b) $\dfrac{dy}{dt} = t - \dfrac{8}{t^2}, \dfrac{dy}{dt} = 0$ si $t^3 = 8 \implies t = 2$
le point critique $t = 2$ est sur l'intervalle $[1, 4]$
$f(1) = 17/2,\ f(2) = 6$ est le min, $f(4) = 10$ est le max
(c) $g'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x^2 - 5x + 4) = 6(x-1)(x-4)$

les points critiques $x = 1$ et $x = 4$ sont sur l'intervalle
$g(-1) = -34$ est le min, $g(1) = 18$, $g(4) = -9$, $g(6) = 43$ est le max
(d) $f'(t) = 4t^3-24t^2+44t-24 = 4(t^3-6t^2+11t-6) = 4(t-1)(t^2-5t+6) = 4(t-1)(t-2)(t-3)$
les trois points critiques sont sur l'intervalle
$f(0) = f(4) = 0$ est le max, $f(1) = f(3) = -9$ est le min, $f(2) = -8$

4. (a) $x = -6$
(b) aucun
(c) $t = \pm 2$
(d) $r = -2$ et $r = 6$

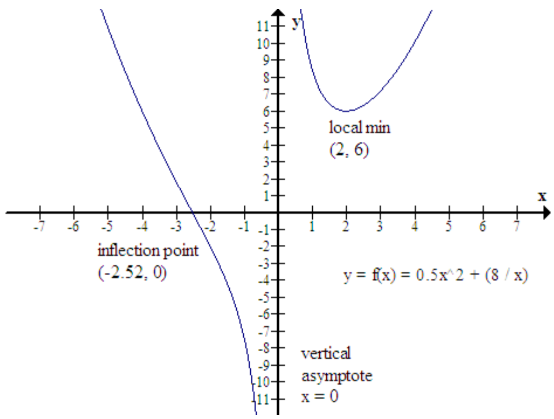
5. $f(x)$ est un polynôme, donc est définie pour tout x et n'a pas d'asymptotes verticales
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ donc pas d'asymptotes horizontales
n'est ni paire ni impaire
$f(0) = 0 \implies (0,0)$ est l'intersection avec l'axe des y
$f(x) = 0 \implies x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x = 0$ ou $x(x^3 - 8x^2 + 22x - 24) = 0$
ou $x(x-4)(x^2 - 4x + 6) = 0 \implies$ les intersections avec l'axe des x sont en $x = 0$ et $x = 4$
$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$
$\implies f'(x) = 0$ si $x = 1, 2, 3$
si $x < 1, f'(x) < 0, f(x)$ est décroissante
si $1 < x < 2, f'(x) > 0, f(x)$ est croissante et il y a un min local en $(1, -9)$
si $2 < x < 3, f'(x) < 0, f(x)$ est décroissante et il y a un max local en $(2, -8)$
si $x > 3, f'(x) < 0, f(x)$ est croissante et il y a un min local en $(3, -9)$
$f''(x) = 12x^2 - 48x + 44 = 4(3x^2 - 12x + 11)$,
donc $f''(x) = 0$ si $x = \dfrac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(11)}}{2(3)} = \dfrac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = \dfrac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6}$
$= 2 \pm 1/\sqrt{3} \approx 1.42, 2.58$
si $x < 2 - 1/\sqrt{3}, f''(x) > 0, f(x)$ est concave vers le haut
si $2 - 1/\sqrt{3} < x < 2 + 1/\sqrt{3}, f''(x) < 0, f(x)$ est concave vers le bas et il y a un point d'inflexion en $(1.42, -8.56)$
si $x > 2 + 1/\sqrt{3}, f''(x) > 0, f(x)$ est concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en

$(2.58, -8.56)$



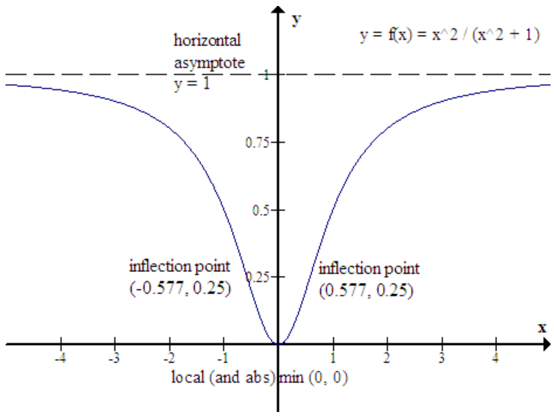
6. $f(x)$ est définie pour tout $x \neq 0$, donc pas d'intersection avec l'axe des y
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}\right) = 0 - \infty = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}\right) = 0 + \infty = \infty$, donc $x = 0$ est une asymptote verticale
n'est ni paire ni impaire
$f(x) = 0$ if $\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} = 0$ ou $x^3 = -16$ ou $x = \sqrt[3]{-16} \approx -2.52$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}\right) = \infty - 0 = \infty$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$, donc pas d'asymptote horizontale
$f'(x) = x - \frac{8}{x^2}$, donc $f'(x) = 0$ si $x = 2$
si $x < 0$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ est décroissante
si $0 < x < 2$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ est décroissante
si $x > 2$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ est croissante et il y a un min local en $(2, 6)$
$f''(x) = 1 + \frac{16}{x^3}$, donc $f''(x) = 0$ si $x^3 = -16$ ou $x = \sqrt[3]{-16} \approx -2.52$
si $x < \sqrt[3]{-16}$, $f''(x) > 0$, $f(x)$ est concave vers le haut
si $\sqrt[3]{-16} < x < 0$, $f''(x) < 0$, $f(x)$ est concave vers le bas et il y a un point d'inflexion en $(\sqrt[3]{-16}, 0)$

si $x > 0, f''(x) > 0, f(x)$ est concave vers le haut



7. $f(x)$ est définie pour tout x, donc pas d'asymptote verticale
$f(0) = 0$ et $f(x) = 0$ ssi $x = 0$, donc $(0, 0)$ est la seule intersection
$f(-x) = f(x)$ donc la fonction est paire
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$, donc $y = 1$ est une asymptote horizontale
$f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, donc $f'(x) = 0$ si $x = 0$
si $x < 0, f'(x) < 0, f(x)$ est décroissante
si $x > 0, f'(x) > 0, f(x)$ est croissante et il y a un min local (et global) en $(0, 0)$
$f''(x) = \dfrac{2(x^2+1)^2 - 2x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \dfrac{2[(x^2+1) - 4x^2]}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$
donc $f''(x) = 0$ si $x = \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0.577$
si $x < -1/\sqrt{3}, f''(x) < 0$, donc $f(x)$ est concave vers le bas
si $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}, f''(x) > 0$, donc $f(x)$ est concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en $(-1/\sqrt{3}, 1/4)$
si $x > 1/\sqrt{3}, f''(x) < 0$, donc $f(x)$ est concave vers le bas et il y a un point d'inflexion en

$(1/\sqrt{3}, 1/4)$



8. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - x - 2} = \dfrac{2}{(x+1)(x-2)}$ est définie pour tout $x \neq -1, 2$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2}{(x+1)(x-2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2}{(x+1)(x-2)} = -\infty$, donc $x = -1$ est une asymptote verticale

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2}{(x+1)(x-2)} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2}{(x+1)(x-2)} = \infty$, donc $x = 2$ est une asymptote verticale

$f(0) = -1$

$f(x) \neq 0$ pour tout x, donc pas d'intersection avec l'axe des x

n'est ni paire ni impaire $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x^2 - x - 2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \dfrac{0}{1} = 0$ ainsi $y = 0$ est une asymptote horizontale

$f'(x) = \dfrac{-2(2x-1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \dfrac{2(1-2x)}{(x^2 - x - 2)^2}$, donc $f'(x) = 0$ si $x = 1/2$

si $x < -1, f'(x) > 0, f(x)$ est croissante

si $-1 < x < 1/2, f'(x) > 0, f(x)$ est croissante

si $1/2 < x < 2, f'(x) < 0, f(x)$ est décroissante et il y a un max local en $(1/2, -8/9)$

si $x > 2, f'(x) < 0, f(x)$ est décroissante

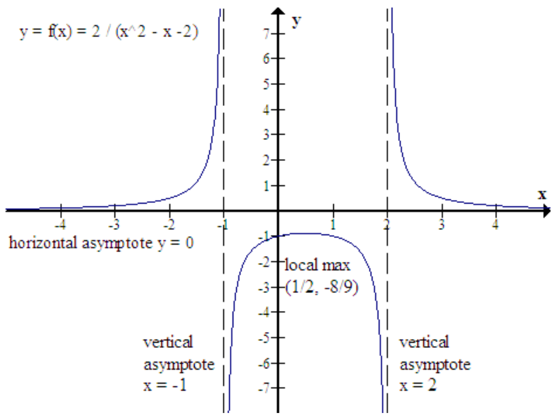
$$f''(x) = 2\left[\frac{-2(x^2 - x - 2)^2 - (1-2x)(2)(x^2 - x - 2)(2x-1)}{(x^2 - x - 2)^4}\right]$$

$$= -4\left[\frac{(x^2 - x - 2) - (2x-1)^2}{(x^2 - x - 2)^3}\right]$$

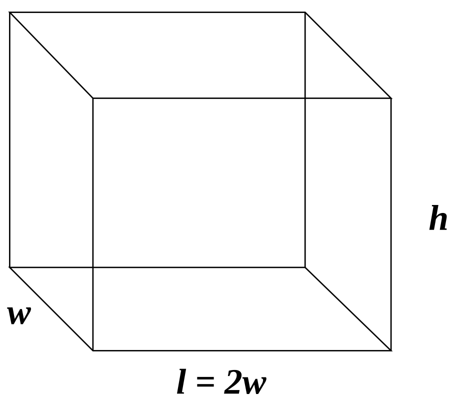
$$= \frac{-4(x^2 - x - 2 - (4x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - x - 2)^3}$$

$$= \frac{-4(-3x^2 + 3x - 3)}{(x^2 - x - 2)^3}$$

$= \dfrac{12(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x - 2)^3} \implies f''(x) \neq 0$ pour tout x
si $x < -1$, $f''(x) > 0$, $f(x)$ est concave vers le haut
si $-1 < x < 2$, $f''(x) < 0$, $f(x)$ est concave vers le bas
si $x > 2$, $f''(x) > 0$, $f(x)$ est concave vers le haut
mais il n'y a pas de points d'inflexion



9.



Soit w la largeur de la base, alors sa longueur est $l = 2w$
et soit h la hauteur
la surface est
$A = lw + 2wh + 2lh = (2w)w + 2wh + 2(2w)h = 2w^2 + 2wh + 4wh = 2w^2 + 6wh$
tandis que le volume est $V = lwh = (2w)wh = 2w^2h = 2800$
donc $h = \dfrac{2800}{2w^2} = \dfrac{1400}{w^2}$
ainsi $A(w) = 2w^2 + 6w\left(\dfrac{1400}{w^2}\right) = 2w^2 + \dfrac{8400}{w}$
et alors $A'(w) = 4w - \dfrac{8400}{w^2}$
donc $A'(w) = 0$ si $4w^3 = 8400$ ou $w^3 = 2100$ ou $w \approx 12.81$ cm

alors $l = 2w \approx 25.61$ cm et $h = \dfrac{1400}{w^2} \approx 8.54$ cm
$A''(w) = 4 + \dfrac{16\,800}{w^3} > 0$ pour tout $w > 0$
donc c'est le min local (et global) de la fonction de surface

10. (a) clairement, $v > 0$
$C'(v) = \dfrac{1}{450} - \dfrac{13}{v^2}$, donc $C'(v) = 0$ si $v^2 = (13)(450) = 5850$ ou $v \approx 76.5$ km/h
puisque $C''(v) = \dfrac{26}{v^3} > 0$ pour tout $v > 0$, la fonction est toujours concave vers le haut et on a trouvé le min local (et global).
(b) coût total = salaire + essence
où $T = 1500 \left[\dfrac{25}{v} + \left(\dfrac{v}{450} + \dfrac{13}{v}\right)\right] = 1500\left(\dfrac{v}{450} + \dfrac{38}{v}\right)$
donc $T'(v) = 1500\left(\dfrac{1}{450} - \dfrac{38}{v^2}\right)$
et $T'(v) = 0$ si $v^2 = (38)(450) = 17\,100$ ou $v \approx 130.8$ km/h

Chapitre 4

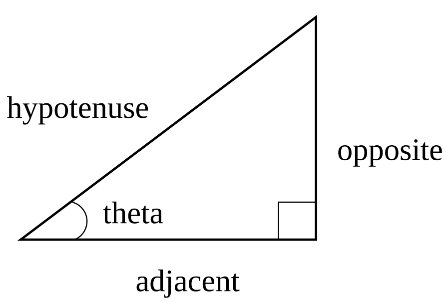
Objectifs

- connaître les dérivées des fonctions trigonométriques et être capable de les utiliser
- connaître les dérivées des fonctions exponentielles
- comprendre les propriétés de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$
- comprendre les propriétés de la fonction logarithmique $f(x) = \ln x$
- être capable de résoudre des problèmes pratiques avec des fonctions exponentielles

Dérivées de fonctions trigonométriques

En calcul, on utilise toujours les radians pour mesurer les angles – les formules des dérivées de fonctions trigonométriques qu'on va donner ci-dessous exigent que les mesures d'angles soient en radians.

Rappelez-vous les définitions des fonctions trigonométriques avec un triangle rectangle.



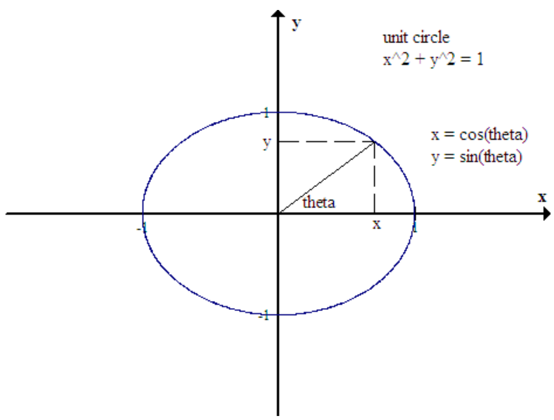
$\cos\theta = \dfrac{adjacent}{hypoténuse}$

$\sin\theta = \dfrac{opposé}{hypotenuse}$

$\tan\theta = \dfrac{opposé}{adjacent}$

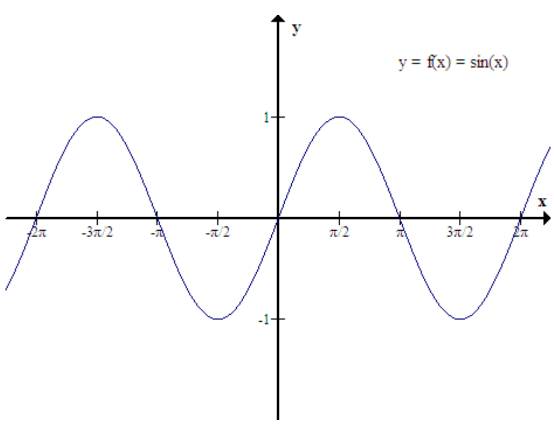
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{hypoténuse}{adjacent}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{hypoténuse}{opposé}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{adjacent}{opposé}$$

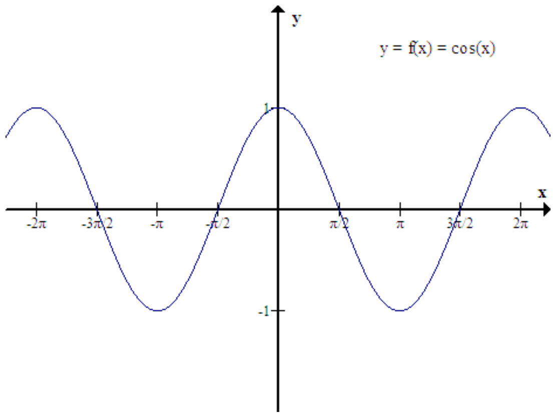
On considère le cercle unitaire, $x^2 + y^2 = 1$.

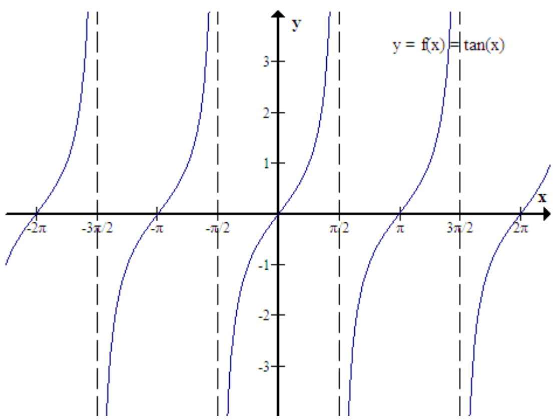


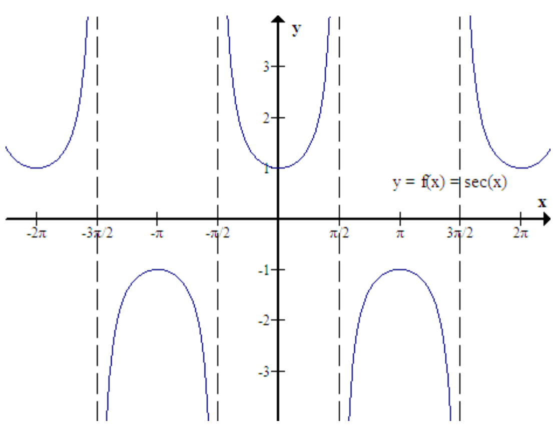
$x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

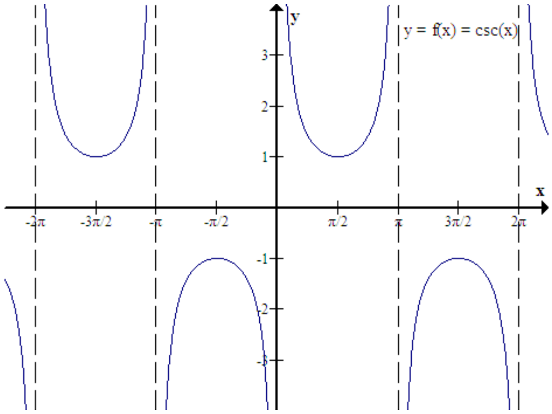
Les graphes des fonctions trigonométriques sont presentés ci-dessous.

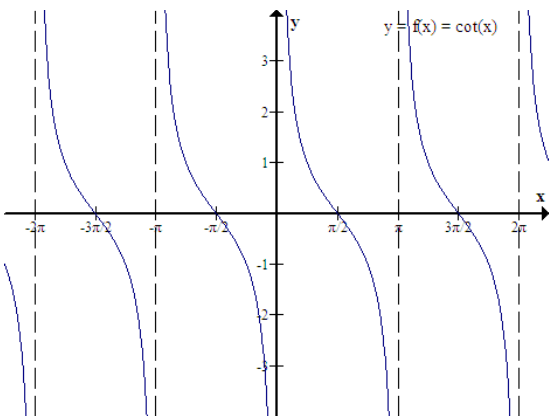



y
y = f(x) = cos(x)
1
-1
x
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π


y
y = f(x) = tan(x)
3
2
1
-1
-2
-3
x
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π

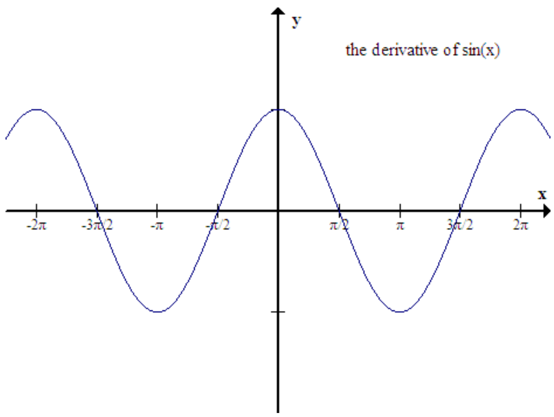

y
y = f(x) = sec(x)
3
2
1
-1
-2
-3
x
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π

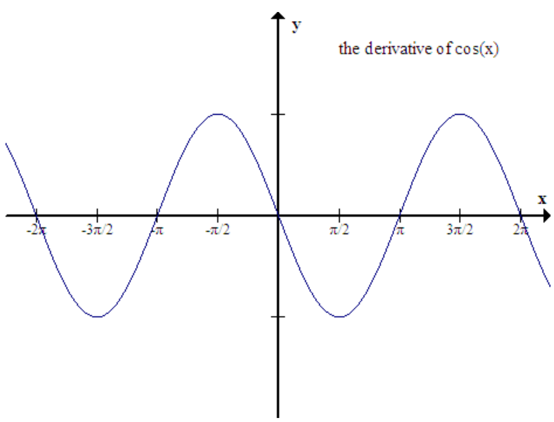




Toutes ces fonctions sont périodiques, *ie* elles se répètent constamment. *Certaines ont une période de* 2π *tandis que les autre ont une période de* π *– pouvez-vous dire lesquelles ?*

Quelles seront les dérivées $\sin x$ et $\cos x$? On peut faire des approximations géométriques et constater qu'elles sont aussi périodiques et ressemblent aux fonctions trigonométriques.



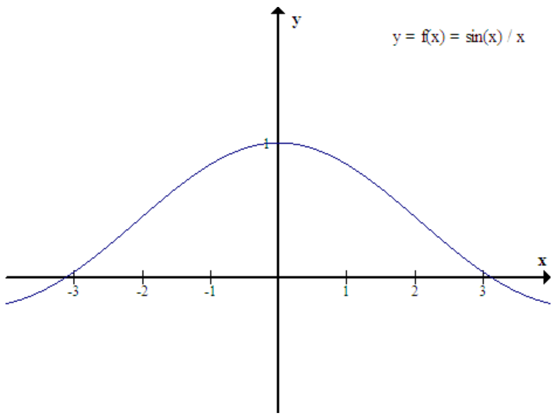


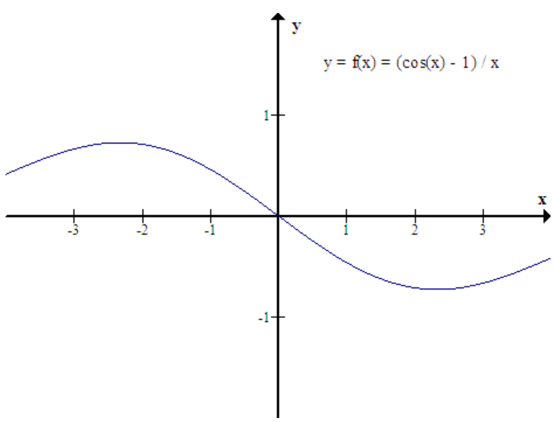
Notez que $\dfrac{d}{dx}(\sin x)$ a la forme de $\cos x$ et que $\dfrac{d}{dx}(\cos x)$ a la forme de $-\sin x$. Cependant, puisqu'on ne peut pas déterminer précisément les valeurs de y des dérivées à l'aide de graphe, on ne peut pas dire tout de suite que les dérivées sont vraiment ces fonctions-là. Mais on va le confirmer.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$
$$(\textit{identité trigonométrique } \sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$= (\sin x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + (\cos x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

Pour trouver ce que ces limites vallent, regardons les graphes de $\frac{\cos x - 1}{x}$ et $\frac{\sin x}{x}$. *Les fonctions ne sont pas définies en $x = 0$, mais les graphes suggèrent que la limite existe.*





On voit que $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

Ainsi, $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (*pour x en radians*).

On peut utiliser l'identité trigonométrique $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ et la règle de dérivation en chaîne pour obtenir
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = (\sin x)(-1) = -\sin x.$$

Les dérivées des autres fonctions trigonométriques s'obtiennent comme suit.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\frac{d}{dx}(\sin x)(\cos x) - (\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \qquad (\textit{utilisons la notation } (\sin x)^n = \sin^n x)$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\textit{selon l'identité trigonométrique } \cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$
$$= \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left((\cos x)^{-1}\right)$$
$$= -(\cos x)^{-2}\frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= -(\cos x)^{-2}(-\sin x)$$
$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left((\sin x)^{-1}\right)$$
$$= -(\sin x)^{-2}\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= -(\sin x)^{-2}(\cos x)$$
$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \left(\frac{-1}{\sin x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$
$$= -\csc x \cot x$$

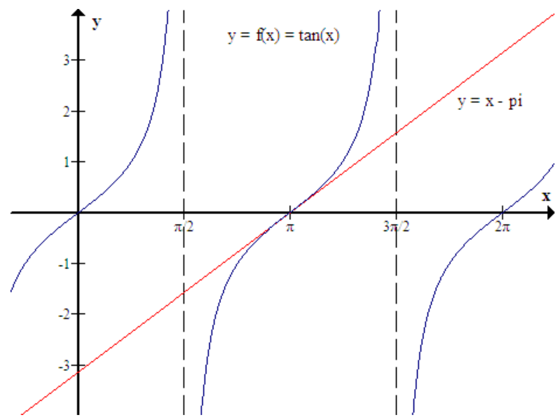
$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$
$$= \frac{\frac{d}{dx}(\cos x)(\sin x) - (\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$
$$= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-1}{\sin^2 x}$$
$$= -\csc^2 x$$

Exemples:

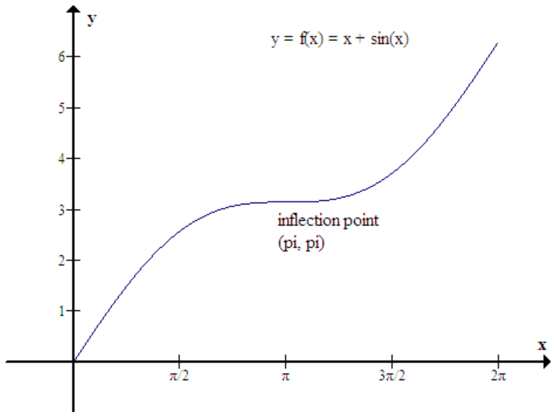
(i) $\frac{d}{dx}(\cos(3x)) = -\sin(3x)(3) = -3\sin(3x)$
(ii) $\frac{d}{dx}\big(\sin(x^2)\big) = \cos(x^2)(2x) = 2x\cos(x^2)$
(iii) $\frac{d}{d\theta}(\theta\tan\theta) = \tan\theta + \theta\sec^2\theta$
(iv) $\frac{d}{dt}\big(\sec(t^2+4t)\big) = \sec(t^2+4t)\tan(t^2+4t)(2t+4) = (2t+4)\sec(t^2+4t)\tan(t^2+4t)$
(v) $\frac{d}{dx}(\sin(\tan(x+1))) = \cos(\tan(x+1))\sec^2(x+1)$
(vi) Si $y = \cos^2(4x)$,
$\frac{dy}{dx} = 2\cos(4x)(-\sin(4x))(4) = -8\sin(4x)\cos(4x) = -4\sin(8x)$
(*en utilisant l'identité pour le double de l'angle* $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$).
(vii) Si $g(x) = 2\cos^2 x - 3x^4\sin(x^2)$,
alors $g'(x) = 4\cos x(-\sin x) - 12x^3\sin(x^2) - 3x^4(\cos(x^2)(2x))$
$= -4\sin x\cos x - 12x^3\sin(x^2) - 6x^5\cos(x^2)$
$= -2\sin(2x) - 12x^3\sin(x^2) - 6x^5\cos(x^2)$.
(viii) Si $y = \frac{t\cos t}{t+\sin t}$,
$\frac{dy}{dt} = \frac{(\cos t - t\sin t)(t+\sin t) - (t\cos t)(1+\cos t)}{(t+\sin t)^2}$
$= \frac{t\cos t - t^2\sin t + \cos t\sin t - t\sin^2 t - t\cos t - t\cos^2 t}{(t+\sin t)^2}$
$= \frac{\cos t\sin t - t^2\sin t - t}{(t+\sin t)^2}$.

Exemple:
Trouver l'équation de la droite tangente à $y = \tan x$ en $x = \pi$.
Le point sur la courbe est $(\pi, 0)$.
La pente est $m = \frac{dy}{dx}|_{x=\pi} = \sec^2(\pi) = (-1)^2 = 1$,

la droite est donc $y - 0 = (1)(x - \pi)$ ou $y = x - \pi$.

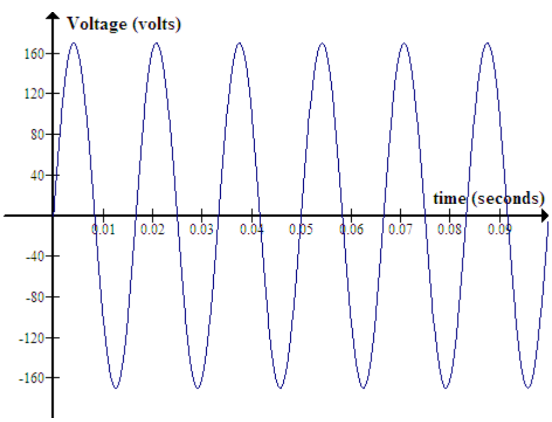


Exemple:
Analyser la fonction $y = f(x) = x + \sin x$ sur $[0, 2\pi]$ et esquisser son graphe.
$f(x)$ est définie pour tout x sur $[0, 2\pi]$, donc pas d'asymptotes verticales.
On considère seulement l'intervalle fini, donc pas d'asymptotes horizontales.
La fonction n'est ni paire ni impaire puisque $[0, 2\pi]$ n'est pas symétrique autour de l'origine (*cependant, la fonction est impaire pour tout intervalle de la forme* $[-a, a]$).
$f(0) = 0$ et $f(2\pi) = 2\pi$.
$f(x) = 0$ si $x + \sin x = 0$, ce qui n'a pas de solution pour $x \neq 0$.
$f'(x) = 1 + \cos x$, donc $f'(x) = 0$ si $\cos x = -1 \implies x = \pi$.
Si $0 < x < \pi$, $f'(x) > 0$ et $f(x)$ est croissante.
Si $\pi < x < 2\pi$, $f'(x) > 0$ et $f(x)$ est croissante.
Donc, il n'y a pas d'extremum local, mais le graphe a une tangente horizontale en $x = \pi$.
$f''(x) = -\sin x$, donc $f''(x) = 0$ si $x = \pi$.
Si $0 < x < \pi$, $f''(x) < 0$ et $f(x)$ est concave vers le bas.
Si $\pi < x < 2\pi$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ et concave vers le haut et il y a un point d'inflexion en (π, π).



Applications de fonctions trigonométriques

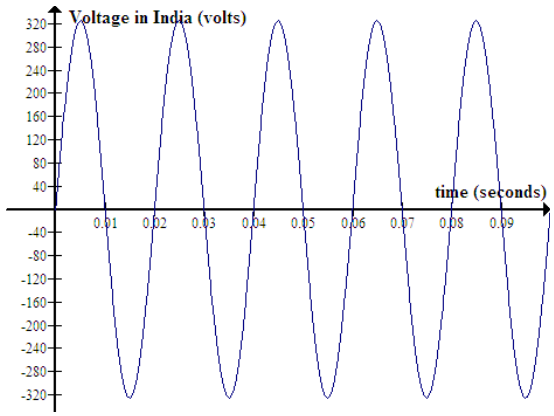
Example:
Le voltage dans une prise est donné par $V(t) = 170\sin(120\pi t)$ volts pour t mesuré en secondes.



$V'(t) = 170\cos(120\pi t)(120\pi) = 20\,400\pi\cos(120\pi t)$,
donc $V'(t) = 0$ si $\cos(120\pi t) = 0$ ou si $120\pi t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
On a donc le voltage maximal est de 170 V pour $120\pi t = (4k+1)\frac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{4k+1}{240}$ s.
Et on a le voltage minimal de -170 V pour $120\pi t = (4k+3)\frac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{4k+3}{240}$ s.
La période d'oscillation est $T = \frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60}$ s et la fréquence est $f = 60$ Hz.

Exemple:
Le voltage d'un foyer standard dans beaucoup d'autres pays est donné par une fonction

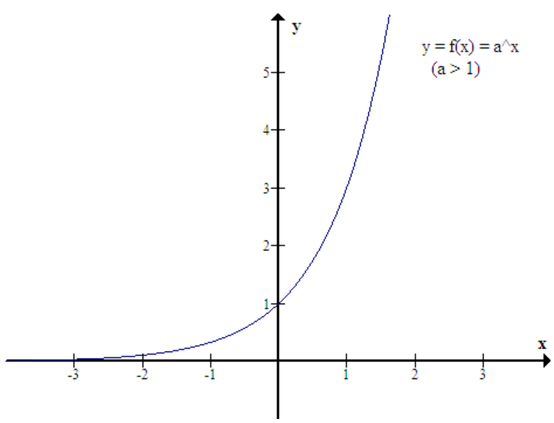
différente. Le voltage d'une prise en Inde, par exemple, est donné par $V(t) = 325\sin(100\pi t)$.



ce qui nous donne un maximum de 325 V lorsque $t = \frac{4k+1}{200}$ s et un minimum de -325 V si $t = \frac{4k+3}{200}$ s, avec la fréquence de $f = 50$ Hz.

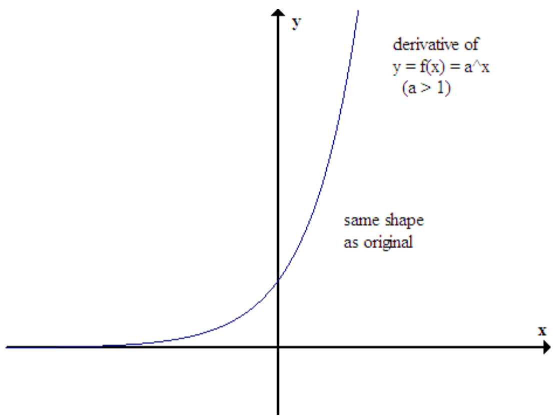
Dérivées de fonctions exponentielles

Rappelez-vous que le graphe d'une fonction exponentielle $y = f(x) = a^x$ (pour $a > 1$) ressemble à celui ci-dessous.



La fonction est toujours positive, croissante, concave vers le haut, passe par $(0, 1)$ et satisfait $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$.

Quelle est la dérivée de cette fonction ? Graphiquement, on voit que $\dfrac{d}{dx}(a^x)$ a la même forme que a^x – croissante, concave vers le haut, toujours positive, commence par être petite (pour des x négatifs) et augmente.



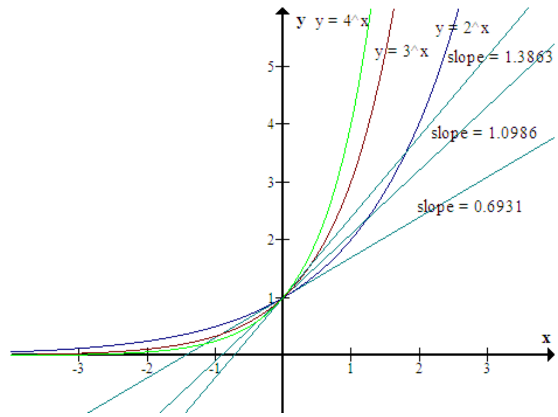
Donc, il semble que la dérivée d'une fonction exponentielle est une autre fonction exponentielle. Est-ce que c'est vrai ?

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$
$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \qquad (\textit{parce que } a^x \textit{ ne dépend pas de la variable } h \textit{ sur lequel on prend la limite})$$
$$= ka^x,$$
où $k = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ est une constante.

$\frac{d}{dx}(a^x)$ est une fonction exponentielle – en fait, $\frac{d}{dx}(a^x) = ka^x$.

Mais, puisque $f(x) = a^x$,
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$
et donc $k = f'(0)$, la pente de la droite tangente en $x = 0$.

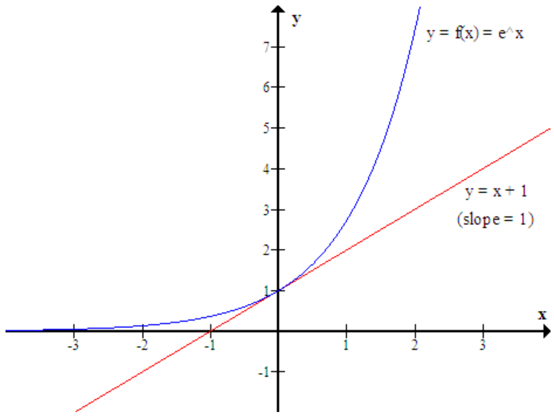
Regardons ce qui se passe avec $2^x, 3^x$ et 4^x.



Pour 2^x, $f'(0) \approx 0.6931$, pour 3^x, $f'(0) \approx 1.0986$ et pour 4^x, $f'(0) \approx 1.3863$. On voit que $\lim_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$ augmente lorsque a augmente. Et on voit autre chose – on doit avoir un point entre 2 et 3 (*plus proche de* 3) tel que la pente de tangente en $x = 0$, ou la limite, est 1. On appelle ce nombre e.

e est le nombre, tel que $\dfrac{e^h - 1}{h} \approx 1$ pour h petit. De plus, $e^h - 1 \approx h$ ou $e^h \approx h + 1$. Donc $e \approx (1 + h)^{1/h}$.

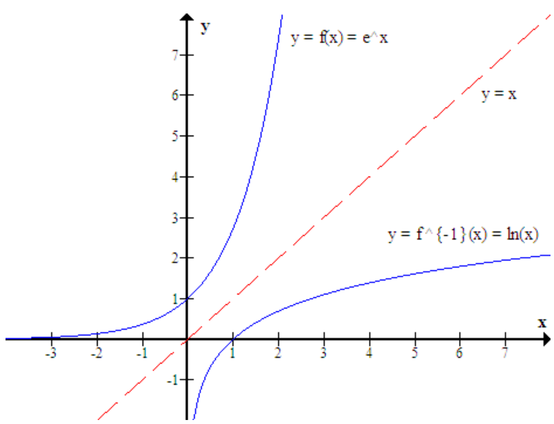
Ainsi $e = \lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}$
$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1/h)$
$\approx 2.718\,281\,828\,459\ldots$.



On a que $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$, *ie* cette fonction exponentielle est égale partout à sa dérivée (*même chose pour la dériveée seconde, troisième, etc.*).

Logarithme naturel

Puisqu'on a défini la fonction exponentielle $f(x) = e^x$, on peut définir sa fonction inverse, appelée logarithme naturel, $f^{-1}(x) = \log_e x = \ln x$, définie pour tout $x > 0$.



On a donc que $e^{\ln x} = x = \ln(e^x)$ (*parce que ces fonctions sont l'inverse l'une de l'autre*).

Si $y = \ln x$, alors $x = e^y$,
donc $\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(e^y)$

ou $1 = e^y \dfrac{dy}{dx}$ (*règle de dérivation en chaîne*).
Donc $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$.
Ainsi, on a que $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.

Exemple:
Supposons qu'une population de bactéries après t jours est donnée par $P(t) = 1500e^{0.08t}$.
La population initiale est $P(0) = 1500e^{0.08(0)} = 1500e^0 = 1500$.
La population après 2 jours est $P(2) = 1500e^{0.08(2)} = 1500e^{0.16} = 1500(1.1735) \approx 1760$.
Quand la population va-t-elle atteindre 2000 bactéries ?
$2000 = 1500e^{0.08t}$ signifie que $e^{0.08t} = \frac{2000}{1500} = \frac{4}{3}$,
donc $\ln(e^{0.08t}) = \ln(4/3)$ ou $0.08t = \ln(4/3)$
donc $t = \frac{\ln(4/3)}{0.08} \approx 3.6$ jours.

Puisqu'on a défini $\ln x$, on peut identifier la constante $k = f'(0)$ dans la dérivée de a^x. Rappelez-vous que $\dfrac{d}{dx}(a^x) = ka^x = f'(0)a^x$. En fait, $k = f'(0) = \ln a$ et, donc $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$.

Exemples:
(i) $\dfrac{d}{dx}(3^x) = 3^x \ln 3$
(ii) $\dfrac{d}{dt}\left(t^2e^t\right) = 2te^t + t^2e^t = (2t + t^2)e^t$
(iii) $\dfrac{d}{dx}(x5^x) = 5^x + x5^x \ln 5 = (1 + x\ln 5)5^x$

Applications des fonctions exponentielles

Si on a $f(x) = e^{g(x)}$, alors la règle de dérivation en chaîne nous donne que
$f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right) = e^{g(x)}\dfrac{d}{dx}(g(x)) = e^{g(x)}g'(x)$.

Exemples:
(i) $f'(x) = e^{\cos x}$, $f'(x) = -(\sin x)e^{\cos x}$
(ii) $y = 2e^{t^2+3}$, $\dfrac{dy}{dt} = 4te^{t^2+3}$
(iii) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{4x-\sin x}\right) = (4 - \cos x)e^{4x-\sin x}$
(iv) $\dfrac{d}{dx}(e^x \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x$
(v) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2e^{x^2}\right) = 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2}$
(vi) Si $f(x) = \dfrac{xe^x}{\cos x}$,
alors $f'(x) = \dfrac{(e^x + xe^x)\cos x - xe^x(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$$= \frac{e^x(\cos x + x(\cos x + \sin x))}{\cos^2 x}.$$

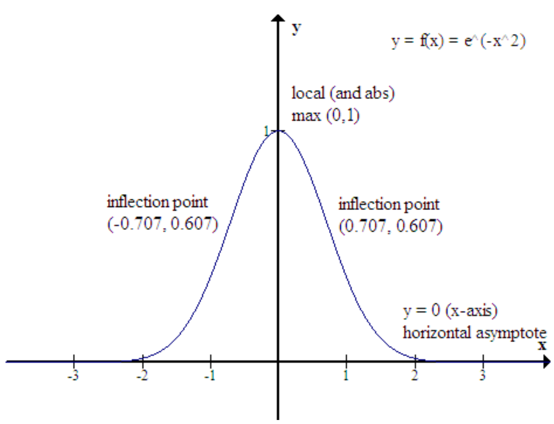
(vii) $\frac{d}{dx}\left(\sin(e^{x^2+5x+1})\right)$

$= \cos(e^{x^2+5x+1})\frac{d}{dx}\left(e^{x^2+5x+1}\right)$

$= \cos(e^{x^2+5x+1})e^{x^2+5x+1}\frac{d}{dx}\left(x^2+5x+1\right)$

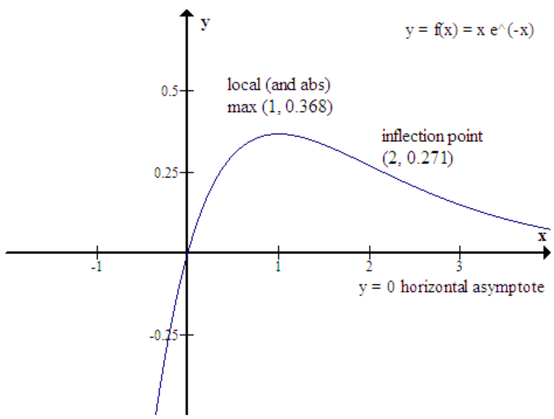
$= (2x+5)e^{x^2+5x+1}\cos(e^{x^2+5x+1})$

Exemple:
Analyser la fonction $y = f(x) = e^{-x^2}$ et esquisser son graphe.
$f(x)$ est définie pour tout x, donc, pas d'asymptotes verticales.
$f(0) = 1 \implies (0,1)$ est l'intersection avec l'axe des y.
$f(x) \neq 0$ pour tout x, donc pas d'intersections avec l'axe des x.
$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$, la fonction est paire.
$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$, donc $y = 0$ est une asymptote horizontale.
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc $f'(x) = 0$ si $x = 0$.
Si $x < 0$, $f'(x) > 0$, donc $f(x)$ est croissante.
Si $x > 0$, $f'(x) < 0$, donc $f(x)$ est décroissante et $(0,1)$ est un max local (et global).
$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$, donc $f''(x) = 0$ si $x = \pm 1/\sqrt{2}$.
Si $x < -1/\sqrt{2}$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ est concave vers le haut.
Si $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$, $f''(x) < 0$ et $f(x)$ est concave vers le bas (*confirme qu'on a un max*).
Il y a un point d'inflexion en $(-1/\sqrt{2}, e^{-1/2}) \approx (-0.707, 0.607)$.
Si $x > 1/\sqrt{2}$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ est concave vers le haut.
Il y a un autre point d'inflexion $(1/\sqrt{2}, e^{-1/2}) \approx (0.707, 0.607)$.



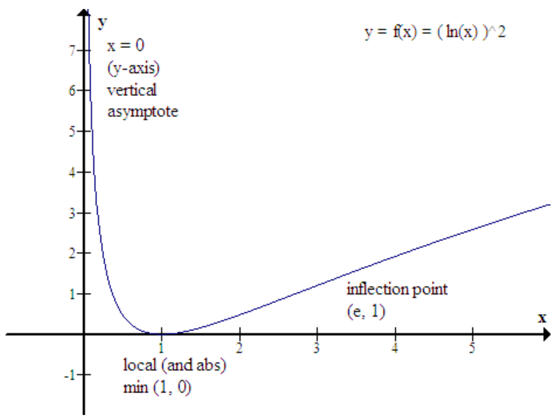
Exemple:
Analyser la fonction $y = f(x) = xe^{-x}$ et esquisser le graphe.
$f(x)$ est définie pour tout $x \implies$ pas d'asymptotes verticales.
$f(0) = 0$ et donc $(0,0)$ est l'intersection avec l'axe des y.

$f(x) = 0$ ssi $x = 0$ et $(0, 0)$ est la seule intersection.
Cette fonction n'est ni paire ni impaire.
$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$
$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$, donc $y = 0$ est une asymptote horizontale.
$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$, donc $f'(x) = 0$ si $x = 1$.
Si $x < 1$, $f'(x) > 0$ et $f(x)$ est croissante.
Si $x > 1$, $f'(x) < 0$ et $f(x)$ est décroissante, donc $(1, e^{-1}) \approx (1, 0.368)$ est un max local (et global).
$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x - 2)e^{-x}$, donc $f''(x) = 0$ si $x = 2$.
Si $x < 2$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ est concave vers le haut.
Si $x > 2$, $f''(x) < 0$ et $f(x)$ est concave vers le bas et $(2, 2e^{-2}) \approx (2, 0.271)$ est un point d'inflexion.



Exemple:
Analyser la fonction $y = f(x) = (\ln x)^2$ et esquisser le graphe.
$f(x)$ est définie pour tout $x > 0$.
$\lim_{x\to0^+} (\ln x)^2 = (-\infty)^2 = \infty$, donc $x = 0$ est une asymptote verticale.
Pas d'intersection avec l'axe des y.
N'est ni paire ni impaire.
$f(x) = 0$ si $\ln x = 0$, ou si $x = 1$. Il y a une intersection avec l'axe des x en $(1, 0)$.
$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^2 = \infty$, donc pas d'asymptotes horizontales.
$f'(x) = 2(\ln x)\dfrac{1}{x}$, donc $f'(x) = 0$ si $x = 1$.
Si $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ et $f(x)$ est décroissante.
Si $x > 1$, $f'(x) > 0$ et $f(x)$ est croissante, donc $(1, 0)$ est un min local (et global).
$f''(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}(1 - \ln x)$, donc $f''(x) = 0$ si $\ln x = 1 \implies x = e$.
Si $0 < x < e$, $f''(x) > 0$, donc $f(x)$ est concave vers le haut.

Si $x > e$, $f''(x) < 0$, donc $f(x)$ est concave vers le bas et il y a un point d'inflexion en $(e, 1)$.



La désintégration radioactive peut être représentée par une fonction exponentielle. La masse d'élément radioactif au moment t est donnée par $m(t) = m_0 e^{-kt} = m_0 e^{-t(\ln 2)/t_{1/2}}$, où m_0 est la masse initiale d'élément radioactif et $t_{1/2}$ est la demi-vie de l'élément radioactif (le temps nécessaire pour que la moitié de l'élément se désintègre).

Exemple:
Le radon 222, ^{222}Rn, a une demi-vie de 3.8 days. Quelle sera la masse de radon dans 5 jours, si sa masse initiale est de 100 mg ? À quel moment la masse va atteindre 10 mg ?
$m(t) = m_0 e^{-t(\ln 2)/t_{1/2}} = 100 e^{-t(\ln 2)/3.8}$,
donc $m(5) = 100 e^{-5(\ln 2)/3.8} \approx 40.2$ mg.
On veut un t tel que $m(t) = 10$ mg.
Donc $100 e^{-t(\ln 2)/3.8} = 10$,
ou $e^{-t(\ln 2)/3.8} = 0.1$,
ou $\frac{-t(\ln 2)}{3.8} = \ln(0.1)$,
donc $t = \frac{-(\ln(0.1))(3.8)}{\ln 2} \approx 12.6$ jours.

Problèmes pratiques

1. Trouver les dérivées des fonctions suivantes.
(a) $f(x) = x^2 \cos x + 7e^x$
(b) $g(t) = 5e^{\sin(t^2)}$
(c) $y = \cos(\sin(e^x))$
(d) $r(\theta) = 2\tan^2(5\theta + e^\theta)$

2. Trouver les max et min globaux de $f(x) = x + e^{-x}$ sur l'intervalle $[-1, 3]$.

3. Montrer que $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ (pour $x > 0$).

4. Analyser la fonction $y = f(x) = x - \cos x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et esquisser le graphe.

5. Analyser la fonction $y = f(x) = xe^x$ et esquisser le graphe.

6. Supposons que le voltage est donné par $V(t) = 125\sin(4\pi t)$ volts, pour t mesuré en secondes.
(a) Trouver les voltages minimal et maximal et les moments où ils se produisent.
(b) Déterminer la période et la fréquence.

7. Un élément radioactif Unstablium a une demi-vie de 2.3 heures.
(a) Quelle sera sa masse après 1 jour si la masse initiale est de 10 mg ?
(b) À quel moment la masse va atteindre 2 mg ?

8. Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = e^x \cos x$ en $x = 0$.

9. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction $f(x) = (x^2 + x)e^x$ est-elle concave vers le bas ?

10. Considérons la fonction $g(x) = e^x \sin x$. Trouver les quatre premières dérivées. Quelle doit être la dérivée huitième ?

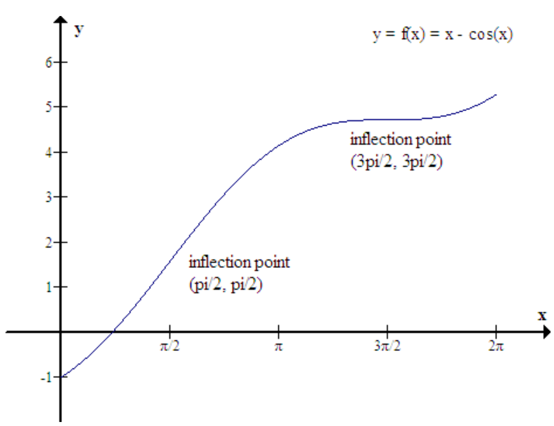
Solutions des problèmes pratiques

1. (a) $f'(x) = 2x\cos x - x^2 \sin x + 7e^x$
(b) $g'(t) = 10t\cos(t^2)e^{\sin(t^2)}$
(c) $\dfrac{dy}{dx} = -e^x \sin(\sin(e^x))\cos(e^x)$
(d) $r'(\theta) = 4(5+e^\theta)\tan(5\theta+e^\theta)\sec^2(5\theta+e^\theta)$

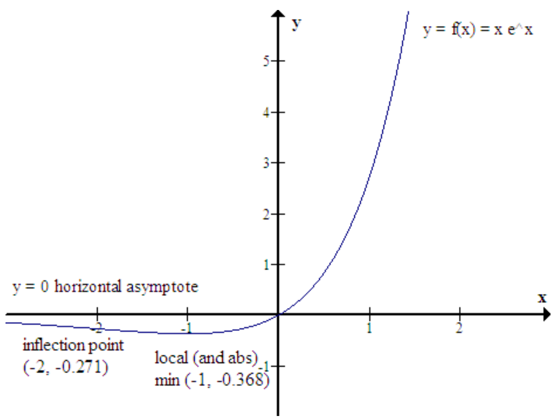
2. $f'(x) = 1 - e^{-x} = 0$ if $x = 0$
$f(-1) = -1 + e \approx 1.72$, $f(0) = 1$ est le min, $f(3) = 3 + e^{-3} \approx 3.05$ est le max

3. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right) = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x\ln a}$

4. $f(0) = -1, f(2\pi) = 2\pi - 1$
n'est ni paire ni impaire, pas d'asymptotes
$f(x) = 0$ si $x = \cos x$, donc $x \approx 0.74$
$f'(x) = 1 + \sin x$, $f'(x) = 0$ si $x = 3\pi/2$
si $0 < x < 3\pi/2$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ est croissante
si $3\pi/2 < x < 2\pi$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ est croissante, donc pas d'extrema locaux
mais il y a une tangente horizontale en $x = 3\pi/2$
$f''(x) = \cos x$, donc $f''(x) = 0$ si $x = \pi/2, 3\pi/2$
si $0 < x < \pi/2$, $f''(x) > 0$ donc $f(x)$ est concave vers le haut
si $\pi/2 < x < 3\pi/2$, $f''(x) < 0$ donc $f(x)$ est concave vers le bas
et il y a un point d'inflexion en $(\pi/2, \pi/2)$
si $3\pi/2 < x < 2\pi$, $f''(x) > 0$ donc $f(x)$ est concave vers le haut
et il y a un autre point d'inflexion en $(3\pi/2, 3\pi/2)$



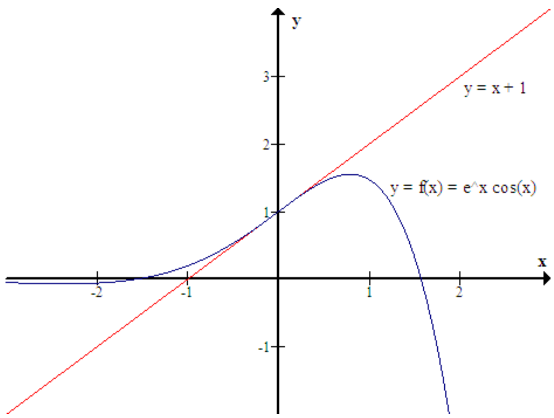
5. $f(x)$ est définie pour tout x, pas d'asymptotes verticales.
$f(0) = 0$ et $f(x) = 0$ ssi $x = 0$, donc $(0, 0)$ est la seule intersection
n'est ni paire ni impaire
$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc $y = 0$ est une asymptote horizontale
$\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$
$f'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$, donc $f'(x) = 0$ si $x = -1$
si $x < -1$, $f'(x) < 0$ et $f(x)$ est décroissante
si $x > -1$, $f'(x) > 0$ et $f(x)$ est décroissante
et il y a un min local (et global) en $(-1, -e^{-1}) \approx (-1, -0.368)$
$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = (2 + x)e^x$, donc $f''(x) = 0$ si $x = -2$
si $x < -2$, $f''(x) < 0$ et $f(x)$ est concave vers le bas
si $x > -2$, $f''(x) > 0$ et $f(x)$ est concave vers le haut
et il y a un point d'inflexion en $(-2, -2e^{-2}) \approx (-2, -0.271)$



6. (a) $V'(t) = 125(4\pi)\cos(4\pi t) = 0$ si $4\pi t = (2n + 1)\pi/2$
atteint le max de 125 V pour $4\pi t = (4n + 1)\pi/2$ ou $t = \dfrac{4n + 1}{8}$ s
et atteint le min de -125 V pour $4\pi t = (4n + 3)\pi/2$ ou $t = \dfrac{4n + 3}{8}$ s
(b) la période est de $T = \dfrac{2\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{2}$ s et la fréquence est de $f = 2$ Hz

7. (a) $m(t) = m_0 e^{-t(\ln 2)/t_{1/2}} = 10e^{-t(\ln 2)/2.3}$
après 1 jour, $m(24) = 10e^{-24(\ln 2)/2.3} \approx 7.22 \times 10^{-3}$ mg
(b) $m(t) = 2 \implies 10e^{-t(\ln 2)/2.3} = 2$
ou $e^{-t(\ln 2)/2.3} = 0.2$
ou $\frac{-t(\ln 2)}{2.3} = \ln(0.2)$
donc $t = \frac{-(2.3)\ln(0.2)}{\ln 2} \approx 5.3$ heures

8. $f(0) = 1, f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$, donc la pente est $m = f'(0) = 1$
et la droite tangente est $y - 1 = (1)(x - 0) \implies y = x + 1$



9. $f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x)e^x = (x^2+3x+1)e^x$
$f''(x) = (2x+3)e^x + (x^2+3x+1)e^x = (x^2+5x+4)e^x = (x+4)(x+1)e^x$
$f''(x) = 0$ si $x = -4, -1$ et $f''(x) < 0$ si $-4 < x < -1$

10. $g(x) = e^x \sin x$
$g'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$
$g''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x$
$g'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x$
$g^{(4)}(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x = -4e^x \sin x$
et il semble qu'on doit avoir $g^{(8)}(x) = 16e^x \sin x$ (*vérifiez en faisant les calculs*)