uOttawa

L'Université canadienne
Canada's university

Arian NOVRUZI
Department of Mathematics and Statistics
University of Ottawa
email:novruzi@uottawa.ca

MAT2722A, 2012
Midterm #2

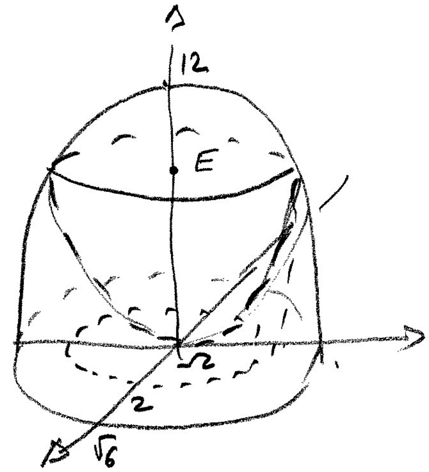
Écrivez CLAIREMENT (en lettres capitales) votre

NOM DE FAMILLIE, PRENOM
NUMERO d'étudiant:

Instructions:
- La durée de l'examen est de 80 minutes.
- L'utilisation de manuel, notes de cours, calculatrice ou tout autre appareil électronique de calcul est interdite.
- Ecrivez clairement la solution dans l'espace qui suit la question. Vous pouvez utiliser le verso des pages si nécessaire (veuillez l'indiquer dans ce cas).
- Vous trouverez une feuille de brouillon à la fin du questionnaire.
- Ne détachez pas le questionnaire.

Question 1 *(5 points)*
Trouvez le volume du solide entouré par les paraboloïdes $z = 12 - 2x^2 - 2y^2$ *and* $z = x^2 + y^2$.
Find the volume of the paraboloid enclosed by

Sol



→ tracer le solide (sketch the solid)

→ décrire le solide (describe the solid)

$$E = \{ (x,y,z),\ (x,y) \in \Omega,\ x^2+y^2 \leq z \leq 12 - 2(x^2+y^2) \}$$

Ω ? $\quad 12 - 2(x^2+y^2) = x^2+y^2$

$$3(x^2+y^2) = 12, \quad x^2+y^2 = 2^2$$

$$\Omega = \{ (x,y),\ x^2+y^2 \leq 2^2 \} = \{ (r,\theta),\ \theta \in [0, 2\pi],\ r \in [0,2] \}$$

$$\rightarrow V = \iint_\Omega \int_{x^2+y^2}^{12-2(x^2+y^2)} dz\, dA$$

$$= \iint_\Omega (12 - 3(x^2+y^2))\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \cdot (12 - 3r^2)\, dr\, d\theta$$

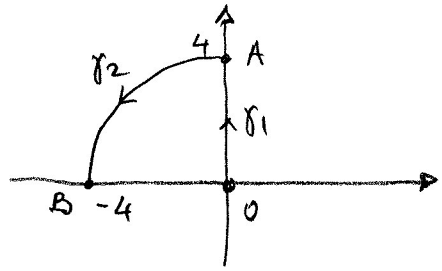
$$= 2\pi \cdot \left[6 \cdot r^2 - \frac{3}{4} r^4 \right]_0^2$$

$$= 2\pi \cdot (24 - 12)$$

$$= 24 \cdot \pi.$$

Calculate the line integral of F along the curve γ , where γ consists of the segment (0,0)->(0,4) and of the arc of the circle x^2 + y^2 = 16, oriented counterclockwise, from (0,4) to (-4,0).

Question 2 *(4 points)*
Calculez l'integrale curviligne de $\vec{F}(x,y) = (4x, 2-2y)$ *le long de la courbe* γ*, où* γ *consiste du segment orienté de* $(0,0)$ *à* $(0,4)$ *et du l'arc du cercle* $x^2+y^2=16$ *orienté de* $(0,4)$ *à* $(-4,0)$.



Sol

1) $\to \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$\to \int_\gamma \vec F\cdot d\vec r = \int_{\gamma_1} \vec F\cdot d\vec r + \int_{\gamma_2} \vec F\cdot d\vec r$

$\to \gamma_1 = \{\vec r_1(t) = (0,0) + t\,(0,4) = (0,4t),\ t\in[0,1]\}$

$$\int_{\gamma_1} \vec F\cdot d\vec r = \int_0^1 (4\cdot 0\cdot 0 + (2-2\cdot 4t)\cdot 4)\,dt =$$

$$= 4\cdot[2t-4t^2]_0^1 = 4\cdot(2-4) = -8.$$

$\to \gamma_2 = \{\vec r_2(t) = (4\cos t, 4\sin t),\ t\in[\pi/2,\pi]\}$

$$\int_{\gamma_2} \vec F\cdot d\vec r = \int_{\pi/2}^{\pi} (4\cdot 4\cos t\cdot(-4\sin t) + (2-2\cdot 4\sin t)\cdot 4\cos t)\,dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} (-96\sin t\cos t + 8\cos t)\,dt$$

$$= [24\cos(2t) + 8\sin t]_{\pi/2}^{\pi} = 40$$

$\to \int_\gamma \vec F\cdot d\vec r = -8 + 40 = 32.$

Note that F is conservative:

2) Autrement, on remarque que $\vec F$ est conservatif :

$$(4x)_y = 0 = (2-2y)_x$$

Hence
Donc, $\vec F = \nabla f \iff \begin{cases} f_x = 4x \\ f_y = 2-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 2x^2 + h(y) \\ 0 + h' = 2-2y \Rightarrow h(y) = 2y - y^2 + k \end{cases}$

Then
Alors : $f(x,y) = 2x^2 + 2y - y^2 + k$; d'où
it implies

$$\int_\gamma \vec F\cdot d\vec r = f(-4,0) - f(0,0) = 32$$

Only one of the following vector fields is conservative. Find it and its associated potential.
For the other vector fields explain why they are not conservative.

Question 3 *(6 points)*

Seulement un des champs de vecteurs suivants est un champs conservatif. Détérminez-le et son potentiel, et pour les autres champs expliquez pourquoi ils ne sont pas conservatifs.

a) $\vec{G}(x,y) = (xy^3, x^2y)$

b) $\vec{H}(x,y) = (2x - \cos y, x\sin y)$

c) $\vec{F}(x,y) = (\cos y, \sin x)$

Sol

a) $P_y = 3xy^2 \neq Q_x = 2xy$

c) $P_y = -\sin y \neq Q_x = \cos x$

b) $P_y = \sin y = Q_x$

As H is defined in R^2, which is a simply connex domains, it follows

Comme $\vec{H}$ est définie dans $\mathbb{R}^2$, qui est simpl. connexe, alors

$$\vec{H} = \nabla f, \quad f(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Hence

Donc,

$$\begin{cases} f_x = 2x - \cos y \\ f_y = x\sin y \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = -x\cos y + h(x)$$

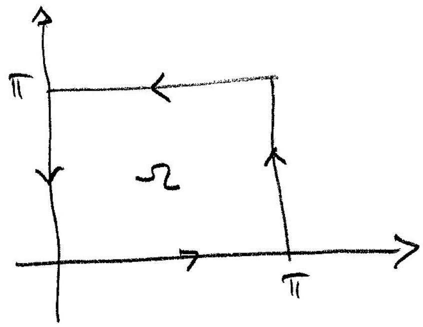
$$-\cos y + h'(x) = 2x - \cos y$$

$$h'(x) = 2x, \quad h(x) = x^2 + K \Rightarrow$$

$$\rightarrow f(x,y) = -x\cos y + x^2 + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Let γ be the square with nodes (0,0), (pi,0), (pi,pi), (0,pi), oriented counter cloackwise, and F=(x cos y, 2y sin x). Using Green's theorem calculate $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Question 4 *(5 points)*
Soit γ *le carré avec les noeuds* $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π) *et* $(0,\pi)$, *orienté contre le mouvement des aiguilles d'une montre, et* $\vec{F}(x,y) = (x\cos y, 2y\sin x)$. *Calculez* $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ *en utilisant le théorème de Green.*



Sol

$\rightarrow \vec{F} = (P, Q)$, $P = x\cos y$, $Q = 2y\sin x$

$$\rightarrow \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

$$= \iint_\Omega (Q_x - P_y)\,dA$$

$$= \iint_\Omega (2y\cos x + x\sin y)\,dA$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi (2y\cos x + x\sin y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^\pi \left[2y\sin x + \frac{1}{2}x^2\sin y\right]_{x=0}^{x=\pi} dy$$

$$= \int_0^\pi \left(+\frac{1}{2}\pi^2\sin y\right) dy$$

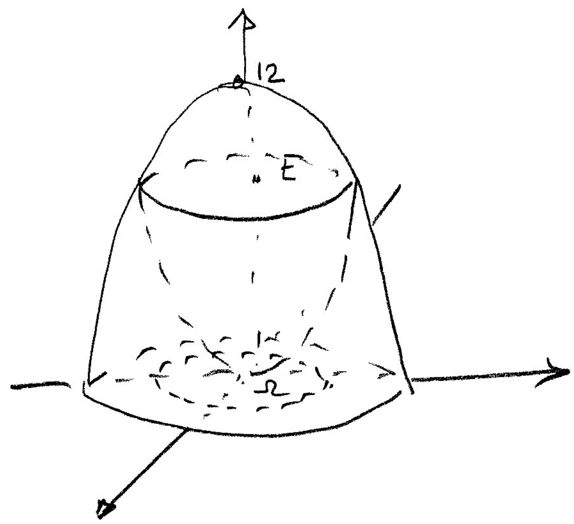
$$= -\frac{1}{2}\pi^2 \cdot \left[\cos y\right]_0^\pi$$

$$= \pi^2.$$

Réponses

Problème	1	2	3	4	Total
Votre résultat					

Question 1 *(5 points)*
Trouvez le volume du solide entouré par les paraboloïdes $z = 12 - x^2 - y^2$ *and* $z = 2x^2 + 2y^2$.



Sol

→ tracer le solide

→ decrire le solide

$$E = \{(x, y, z),\ (x, y) \in \Omega,\ 2(x^2+y^2) \le z \le 12 - (x^2+y^2)\}$$

Ω ? $\quad 12 - (x^2+y^2) = 2(x^2+y^2)$

$$3(x^2+y^2) = 12, \quad x^2+y^2 = 2^2$$

$$\Omega = \{(x, y),\ x^2+y^2 \le 2^2\} = \{(r, \theta),\ \theta \in [0, 2\pi],\ r \in [0, 2]\}$$

$$\to V = \iint_\Omega \int_{2(x^2+y^2)}^{12-(x^2+y^2)} dz\, dA$$

$$= \iint_\Omega \left(12 - 3(x^2+y^2)\right) dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(12 - 3r^2)\, dr\, d\theta$$

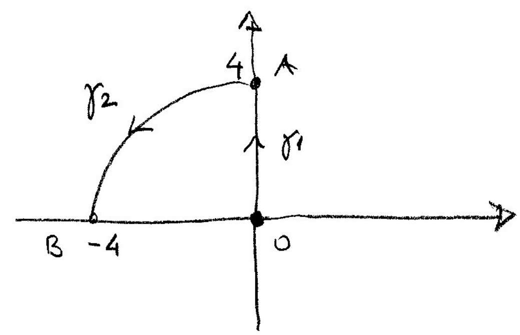
$$= 2\pi \cdot \left[6 \cdot r^2 - \frac{3}{4} r^4\right]_0^2$$

$$= 2\pi\, (24 - 12)$$

$$= 24\pi.$$

Question 2 *(4 points)*
Calculez l'integrale curviligne de $\vec{F}(x,y) = (2x, 1-2y)$ *le long de la courbe* γ, *où* γ *consiste du segment orienté de* $(0,0)$ *à* $(0,4)$ *et du l'arc du cercle* $x^2+y^2 = 16$ *orienté de* $(0,4)$ *à* $(-4,0)$.

Sol



1) $\to \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$\to \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\to \gamma_1 = \{\vec{r}_1(t) = (0,0) + t(0,4) = (0,4t),\quad t \in [0,1]\}$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2\cdot 0\cdot 0 + (1-2\cdot 4t)\cdot 4)\,dt =$$

$$= 4\,[t - 4t^2]_0^1 = 4(1-4) = -12$$

$$\to \gamma_2 = \{\vec{r}_2(t) = (4\cos t, 4\sin t),\quad t \in [\pi/2, \pi]\}$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\pi/2}^{\pi} (2\cdot 4\cos t\cdot 4(-\sin t) + (1 - 2\cdot 4\sin t)4\cos t)\cdot dt$$

$$= [16\cos(2t) + 4\sin t]_{\pi/2}^{\pi} = 28.$$

$$\to \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 28 - 12 = 16.$$

2) Autrement, on remarque que $\vec{F}$ est conservatif :

$$(2x)_y = 0 = (1-2y)_x.$$

Donc, $\vec{F} = \nabla f \iff \begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 1-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = x^2 + h(y) \\ h' = 1-2y \Rightarrow h(y) = y - y^2 + K \end{cases}$

Alors, $f(x,y) = x^2 + y - y^2 + K$; D'où

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(-4,0) - f(0,0) = 16.$$

Question 3 *(6 points)*
Seulement un des champs de vecteurs suivants est un champs conservatif. Détérminez-le et son potentiel, et pour les autres champs expliquez pourquoi ils ne sont pas conservatifs.

a) $\vec{F}(x,y) = (\sin y, \cos y)$

b) $\vec{G}(x,y) = (xy^2, -x^2)$

c) $\vec{H}(x,y) = (2x + \sin y, x\cos y)$

Sol

a) $P_y = \cos y \neq Q_x = 0$ ✓

b) $P_y = 2xy \neq Q_x = -2x$.

c) $P_y = \cos y = Q_x = \cos y$

Comme $\vec{H}$ est définie dans $\mathbb{R}^2$, qui est simpl. connexe, alors

$$\vec{H} = \nabla f, \quad f(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Donc,

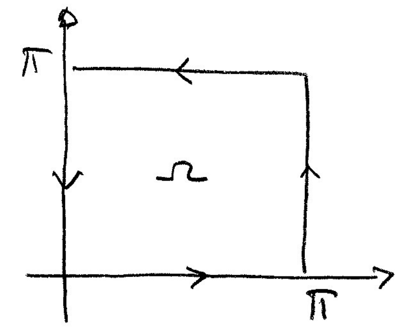
$$\begin{cases} f_x = 2x + \sin y \\ f_y = x\cos y \end{cases} \Rightarrow \quad f = x\sin y + h(x) \Rightarrow$$

$$\sin y + h'(x) = 2x + \sin y \Rightarrow$$

$$h'(x) = 2x, \quad h(x) = x^2 + K$$

$$\rightarrow f(x,y) = x\sin y + x^2 + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Question 4 *(5 points)*
Soit γ le carré avec les noeuds $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π) et $(0,\pi)$, orienté contre le mouvement des aiguilles d'une montre, et $\vec{F}(x,y) = (x\cos y, y\sin x)$. Calculez $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ en utilisant le théorème de Green.



Sol

$\to$ $\vec{F} = (P, Q)$, $P = x\cos y$, $Q = y\sin x$

$\to$ $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$

$$= \iint_\Omega (Q_x - P_y)\, dA$$

$$= \iint_\Omega (y\cos x + x\sin y)\, dA$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi (y\cos x + x\sin y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\pi \left[y\sin x + \frac{1}{2}x^2 \sin y \right]_{x=0}^{x=\pi} dy$$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}\pi^2 \sin y \cdot dy$$

$$= -\frac{1}{2}\pi^2 [\cos y]_0^\pi$$

$$= \pi^2.$$