Introduction au Calcul Différentiel et Intégral

(avec des problèmes resolus)

©ARIAN NOVRUZI

Department of Mathematics and Statistics

University of Ottawa

November 25, 2019

Contents

Préface

Ce document est écrit pour les étudiants de l'Université de Ottawa qui prennent le cours "Méthodes Mathématiques I MAT1700", en Français. Ce document represente mon expérience de l'enseignement du cours MAT1700 pendant plusieurs années. Il apporte des rappels des éléments de base de calculs, une introduction au calcul différentiel et intégral en dimensions un, ainsi qu'une introduction au calcul différentiel et l'optimisation des fonctions de plusieurs variables. De plus, ce document apporte un nombre significatif d'exemples et de problèmes, visant à améliorer la compréhension des notions de base et l'application des outils de calculs dans domaines différents, tels que gestion, finance et physique.

1 Revision des concepts de base

A la fin du ce chapitre l'étudiant

✓ aura une revision des nombres réels, des fonctions, des équations et des inéquations,

✓ sera introduit à la modélisation et la solution de problèmes réels simples.

1.1 Notations et quelques résultas élémentaires

1.1.1 Nombres, intervalles

- L'ensemble des nombres entiers positives est noté par $\mathbb{N}$. Donc, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

  L'ensemble de tous les nombres entiers est noté par $\mathbb{Z}$. Donc, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Remarquons que $\mathbb{N}$ est inclu dans $\mathbb{Z}$. Nous écrivons $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

  L'ensemble des nombres rationnels est noté par $\mathbb{Q}$. Donc, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \, p, q \in \mathbb{Z} \right\}$. Notons que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

  L'ensemble des nombres réels est noté par $\mathbb{R}$. Remarquons que $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$, et beaucoup plus de nombres, tels que π, $\sqrt{2}$, e, etc.

  Si a est un nombre réel, on écrit $a \in \mathbb{R}$.

  En terme de l'inclusion, on a

  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

- Les nombres réels sont ordonnés, c'est-à-dire un est plut petit (ou égal) que l'autre.

  Notemment, si $a, b \in \mathbb{R}$, on écrit:

  $$\begin{aligned} a < b \quad ssi \quad b - a > 0 \qquad (ou \;\; a - b < 0), \\ a \leq b \quad ssi \quad b - a \geq 0 \qquad (ou \;\; a - b \leq 0). \end{aligned}$$

- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, les intervalles de $\mathbb{R}$ avec des extremités a et b, sont notées par

  $$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b].$$

  Si un, ou les deux, de a et b sont $\pm\infty$, on note

  $$(-\infty, a), \quad (-\infty, a], \quad (b, +\infty), \quad [b, +\infty), \quad (-infty, +\infty)$$

  les intervalles respectives.

1.1.2 Fonctions, domaine de définition, image et graphe de fonctions

- Par définition, une fonction est une loi, ou correspondance, qui à tout élément d'un ensemble X associe un seul élément de l'ensemble Y. Symboliquement, une fonction f est presentée par

  $$\begin{aligned} f : X &\mapsto Y, \\ x &\to y = f(x), \end{aligned}$$

  où X est l'espace (ensemble) du départ, Y l'espace d'arrivée, f est la loi qui à $x \in X$ associe la valeur $y \in Y$. Généralement on écrit $y = f(x)$ sans préciser les ensembles X et Y de la fonction f.

  Exemple 1.1 *Soit f une fonction donnée par*

  $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}, \\ x &\to y = 3x - 1. \end{aligned}$$

  Ici, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, et $f(x) = 3x - 1$, associe à tout $x \in \mathbb{R}$ la valeur unique $f(x) = 3x - 1$.

  Notons, qu'en général, la fonction f n'associe pas nécessairement une valeur $f(x)$ à tout $x \in X$.

  Exemple 1.2 *Soit f donnée par*

  $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}, \\ x &\to y = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

  Ici, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, et $f(x) = \sqrt{x}$, associe à tout $x \geq 0$ (et pas à tout x) la valeur unique $f(x) = \sqrt{x}$.

- **Domaine et l'image d'une fonction**

  L'ensemble des $x \in X$ pour lesquels $f(x)$ est défini s'appelle "*domaine de f*“, et est noté par $Dom(f)$.

  L'ensembles des valeurs $f(x)$ pour tous les $x \in Dom(f)$ est appellé “*l'image de f*” et est noté par $Im(f)$. Donc, $Im(f) = \{f(x),\ x \in Dom(f)\}$.

- Une fonction peux être donnée par un tableau ou par un graphe. Mais plus souvent, ce qui sera le cas dans ce cours, une fonction est donnée par une formule de la forme $y = f(x)$. Par example $y = 3x^2 - 1$, donc ici $f(x) = 3x^2 - 1$.

  On remarque qu'ici on précise uniquement la loi f. Pour être précis il faut donner aussi les espace du depart, d'arrivée, le domaine et l'image de f. Souvant, dans ce cours, l'ensemble X est Y seront $\mathbb{R}$.

- Quelques examples de fonctions élémentaires sont les suivantes.

1. $f(x) = c$, avec $c \in \mathbb{R}$, dite “fonction constante”
2. $f(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, dite “fonction linéaire
3. $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a.b, c \in \mathbb{R}$, dite “fonction quadratique”
4. $f(x) = |x|$, dite “fonction valeur absolue”
5. $f(x) = \frac{1}{x}$
6. $f(x) = x^\alpha$, avec $x \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dite “fonction puissance“

Exemple 1.3 *Soit $f(x) = 3x + 7$. Ici $f : X \mapsto Y$ avec $X = Y = \mathbb{R}$. De plus, $Dom(f) = \mathbb{R}$ parce que $f(x)$ est bien définit pour tout x.*

Que vaut $Im(f)$? Ici $Im(f) = \mathbb{R}$. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$. Peut-on trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$? Pour ceci on resout $3x + 7 = y$, d'où $x = (y - 7)/3$. Donc, quoi qu'il soit y il existe un x tel que $f(x) = y$. Ceci montre que $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exemple 1.4 *Soit $f(x) = \sqrt{x - 1}$. Ici $f : X \mapsto Y$ avec $X = Y = \mathbb{R}$. Dans ce cas $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R},\ x - 1 \geq 0\} = \{x \geq 1\} = [1, +\infty)$.*

Que vaut $Im(f)$? Ici $Im(f) = [0, +\infty)$. D'abord $Im(f) \subset [0, +\infty)$ parce que $\sqrt{x - 1} \geq 0$ pour tout $x \in Dom(f)$. Montrons qu'au fait $Im(f) = [0, +\infty)$. Pour ceci soit $y \in \mathbb{R}$ et trouvons $x \in Dom(f)$ tel que $f(x) = y$, donc $\sqrt{x - 1} = y$, ou $x = y^2 + 1$. Donc, quoi qu'il soit $y \in [0, +\infty)$ il existe un $x = y^2 + 1 \geq 1$ tel que $f(x) = y$. Ceci montre que $Im(f) = [0, +\infty)$.

- **Graphe d'une fonction**

  Étant donné une fonction, le graphe de f est l'ensemble des points $G(f) = \{(x, f(x),\ x \in Dom(f)\}$, dans le plan cartésien.

  En général, le graphe d'une fonction est une courbe. Si la fonction est linéaire alors son graphe est une droite, et si la fonction est quadratique alors son graphe est une parabole.

  On trace le graphe d'une fonction en traçant les points $(x, f(x))$, pour certain x et ensuit on lie les points obtenus de façon lisse.

  Example 1.5 *Traçons le graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 2x$.*

  On évalue $f(x)$ pour certains x comme dans le tableau ci-bas

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	3	0	-1	0	3

  Ensuite, on trace les points $(x, f(x))$ et on les lie de facçon lisse comme dans Figure 1.

- Étant donné $y = f(x)$, on dit que $(0, f(0))$ est l'intercepte vertical de f. Les intercepts horizontalles de f sont tous les points $(x, 0)$ avec x satisfaisant $f(x) = 0$.

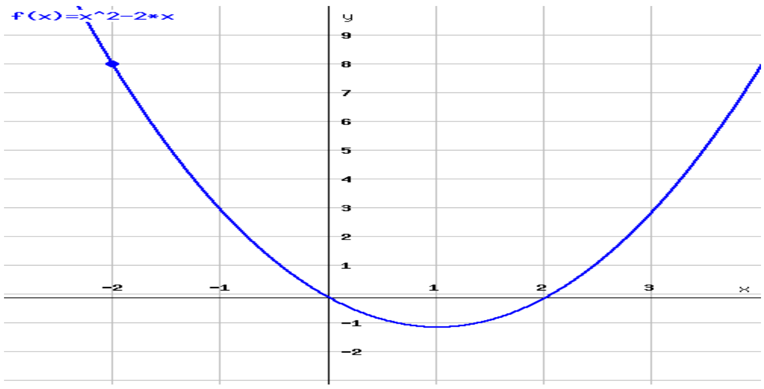


Figure 1: Le graphe de $f(x) = x^2 - 2x$

1.1.3 Opérations avec les fonctions

- Opération algèbriques
  - Étant donné deux fonctions f et g, et deux constants $a, b \in \mathbb{R}$, on peux definir les fonctions nouvelles
$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x).$$
  - Avec les fonctions on peux faire toute opération algèbrique, c.à.d. on peut combiner les fonctions par les opérations de l'addition, soustraction, multiplication, division, puissances et racines.
- Composition des fonctions
  - Soient f et g deux fonctions données. On définit les fonctions, dites composées, comme suit
$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$
La fonction $f \circ g$ est appellée "fonction composée de f avec g".

Remarque 1.1 *Pourquoi on considère la composition d'une fonction?*

Soit t le temps après l'an 2000, $p(t) = 50 + e^{0.01t}$ la population (en million) d'un pays et $R(p) = 2.1 + \ln(1 + 3p)$ le revenu en fonction de la population. Alors
$$R \circ p(t) = R(p(t) = 2.1 + \ln(1 + 50 + e^{0.01t}),$$
donne le revenu en fonction de l'année t.

  - En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

- **La fonction inverse**
  - On dit "f est inversible" s'il existe une fonction notée f^{-1}, appelée "fonction inverse de f", satisfaisant

$$f^{-1} \circ f(x) = x, \ \ \forall x \in Dom(f), \qquad f \circ f^{-1}(y) = y, \quad \forall y \in Im(f).$$

  - Pour que f^{-1} existe il faut et il suffit que f soit injective.

    On dit "f est injective" si $f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in Dom(f)$ avec $x_1 \neq x_2$. f est injective s'il satisfait la regle de la droite horizontale: le graphe de f intersecte une droite horizontale quelconque au plus à un point.
  - De façon pratique, pour trouver f^{-1}, on resout y dans l'équation $f(y) = x$. Alors, $y = f^{-1}(x)$.

Exemple 1.6 *Soient $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Alors*

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = g(x) + 1 = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}, \\ g \circ f(x) &= g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Clairement, $f \circ (x) \neq g \circ f(x)$.

Exemple 1.7 *Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$. Pour trouver $f^{-1}(x)$ on resout $f(y) = x$. On a*

$$\begin{aligned} f(y) &= x, && \textit{it ou} \\ \sqrt{\frac{y}{1-y}} &= x; && \textit{par la suit on resout } y \textit{ comme suit} \\ \frac{y}{1-y} &= x^2, \\ y &= x^2(1-y), \\ y(1+x^2) &= x^2, \\ y &= \frac{x^2}{1+x^2}, \\ f^{-1}(x) &= \frac{x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

1.1.4 Équations, inéquations

- Une équation est un objet mathématique de la forme

$$f(x) = 0,$$

avec $f(x)$ une fonction. Par example, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, ou $f(x) = 4x^3 - \frac{1-x}{x^2-4}$.

Resoudre une équation $f(x) = 0$ signifie trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = 0$.

Tout x satisfaisant $f(x) = 0$ est appellé "*racine de* f".

Example 1.8 *Soit* $f(x) = x^2-3x+2$. *Resolvons l'équation* $f(x) = 0$. *Donc* $x^2-3x+2 = 0$. *Utilisant la formule des racines de* $ax^2 + bx + c = 0$ *on obtient*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1, 2.$$

- Une inéquation est un objet de la forme

$$f(x) < g(x), \quad ou \quad f(x) \leq g(x) \quad (ou \quad f(x) > g(x), \quad ou \quad f(x) \geq g(x)),$$

avec $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions.

Resoudre une inéquation, par example, $f(x) \geq 0$, signifie trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \geq 0$.

Example 1.9 *Resolvons l'inéquation* $1 - 2x < \dfrac{1+x}{2}$.

On procède comme suit

$$\begin{array}{rcll} 1-2x & < & \dfrac{1+x}{2}, & \textit{[on multiplie les deux côtès par } 2\textit{]} \\ (1-2x)2 & < & 1+x, & \\ 2-4x & < & 1+x, & \textit{[on isole } x \textit{ d'un côté, disons à gauche]} \\ -4x-x & < & 1-2, & \\ -5x & < & -1, & \textit{[on divise par } -5\textit{; le signe de l'inégalité change]} \\ x & > & \dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5}, & \\ x & > & \dfrac{1}{5}. & \end{array}$$

Donc, la solution est $x \in [\frac{1}{5}, +\infty)$.

1.1.5 Problèmes

Problème 1.1.1 *Trouvez le domaine et l'image des fonctions suivantes:*

(a) $f(x) = -x$

(b) $f(x) = x + 1$

(c) $f(x) = x^2$

(d) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

(e) $f(x) = \sqrt{x - 7}$

(f) ^{s} $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(g) $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{x + 2}$

(h) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<2 \\ \dfrac{2}{3-x}, & x \geq 2 \end{cases}$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-7x+6}$

(j) $f(x) = \sqrt{-x^2-1}$

Problème 1.1.2 *Trouvez la composition $f \circ g$ et $g \circ f$ des fonctions suivantes*

(a) $f(x) = x$, $g(x) = x$

(b) $f(x) = x+1$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = 1-x$, $g(x) = x^2$

(d) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g(x) = 1$.

(e) $f(x) = x^2$, $g(x) = x-1$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $g(x) = \dfrac{1-x}{x}$

Problème 1.1.3 *Calculez f^{-1} dans les cas suivants et calculer son domaine de définition:*

(a) $f(x) = 2x-1$

(b) ^{s} $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

(f) $f(x) = x^3-1$

(g) $f(x) = x$

(h) $f(x) = x-1$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

(j) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

Problème 1.1.4 *Resoudre les équations suivantes:*

(a) $\dfrac{3(z-2)}{-4} = 3(z+1)$

(b) $\dfrac{4(z-1)}{-3} = 2(3z-1)$

(c) ^{s} $\dfrac{2(z^2-3)}{-3} = 2(3z+1)$

(d) $\dfrac{z^2-3}{-z} = 2-4z$

(e) $x^2-1=0$

(f) $x^2-x=x$

(g) $\dfrac{1-x}{x} = x$

(h) $\sqrt{2-x^2} = x$

Problème 1.1.5 *Resoudre les inéquations suivantes:*

(a) $\dfrac{2-5x}{-7} > -2$

(b) $|3-2x| > 5$

(c) $\dfrac{3x+7}{-2} < 1-2x$

(d) $\dfrac{|4-2x|}{3} < 1$

(e) $^s \left|\dfrac{1-5x}{-3}\right| < 2$

(f) $\dfrac{2-7z}{-4} < 1$

(g) $^s\ x^2 - x + 1 < 2x - 1$

(h) $2x^2 - x + 4 < 4x + x^2$

(i) $2x < \dfrac{1-x}{3}$

(j) $x^2 - x > x$

(k) $x^2 - 1 < 0$

(l) $\dfrac{1-x}{2} < -\dfrac{x-2}{-3}$

1.2 Examples de fonctions: leurs propriétés et graphes

Rapellons d'abord ce fait: étant donné le graphe $G(f)$ de $f(x)$, alors le graphe $G(h)$ de la fonction $h(x) = A(f(B(x-C)) + D$ est obtenue du $G(f)$ est faisant ces opérations:

1. Étirement vertical d'un factuer A
2. Étirement horizontal d'un factuer $\frac{1}{B}$
3. Deplacement horizontal à droite de C unités, et
4. Deplacement vertical de D unités

Exemple 1.10 *Traçons le graphe de $h(x) = -5 \cdot (2x-6)^2 + 4$ à partir du graphe de $f(x) = x^2$.*

Procédons comme suit. D'abord on écrit $h(x) = -5(2(x-3))^2 + 4$. Ensuite, on trace le graphe de $f_1(x) = (2x)^2$. C'est la parabole $f(x) = x^2$ (une parabole) étirée horizontallemenet par un facteur $\dfrac{1}{2}$.

Ensuite, on trace le graphe de $f_2(x) = (2(x-3))^2$. C'est le graphe de $f_1(x)$ deplacé horizontallement par 3 unités.

Ensuite, on trace le graphe de $f_3(x) = -5(2(x-3))^2$. C'est le graphe de $f_2(x)$ étiré verticallement par un facteur de -5 (étiré par facteur de 5 et ensuite reflection par rapport à l'axe x).

Finallement, on trace le graphe de $h(x)$. C'est le graphe de $f_3(x)$ deplacé verticallement par 4 unitées, voir Figure 2.

1.2.1 Fonctions élémentaires.

Considèrons maintenant en détail quelques fonction élémentaires.

- La fonction linéaire.
    1. La forme générale est $f(x) = kx + b$ avec $k, b \in \mathbb{R}$

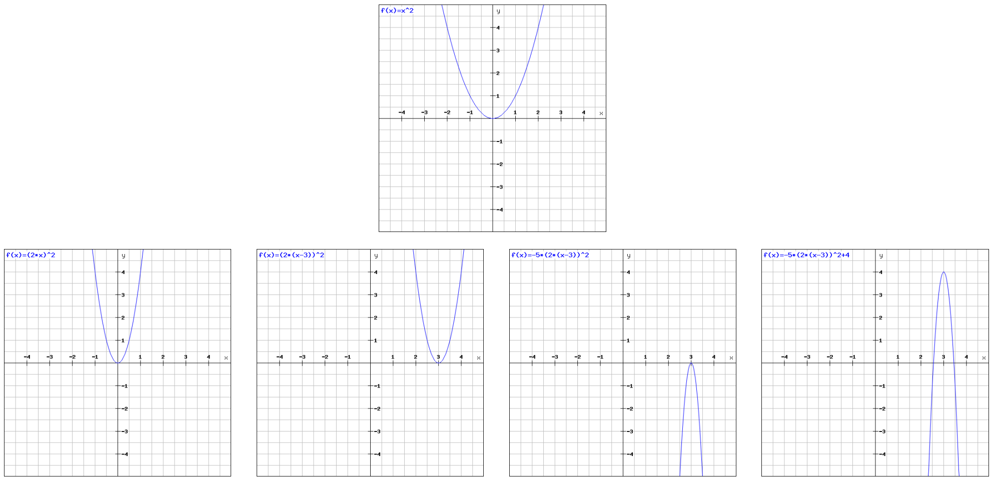


Figure 2: Transformation d'une fonction et son graphe

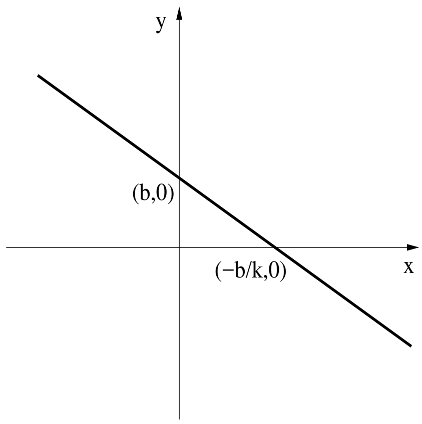
2. Le graphe de f

   Les intersections avec les axes sont

$$(0, f(0)) = (0, b), \qquad \left(-\frac{b}{a}, 0\right).$$

   Le nombre k est la pente de la fonction linéaire f. Il est aussi le taûx de changement de la fonction, parce que pour tout $x_1 \neq x_2$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(kx_1 + b) - (kx_2 + b)}{x_1 - x_2} \\ &= k. \end{aligned}$$



   Donc, le graphe de f est une droite. De plus:

   a) si $k > 0$ alors la courbe est croissante,
   b) si $k = 0$ alors la courbe est horizontalle,
   c) si $k > 0$ alors la courbe est décroissante, voir Figure 3.

3. L'équation $y = kx + b$ de la droite quand on connaît la pente k et un point (x_0, y_0) du graphe est donnée par

$$y = k(x - x_0) + y_0 = kx + \underbrace{(y_0 - kx_0)}_{=b}.$$

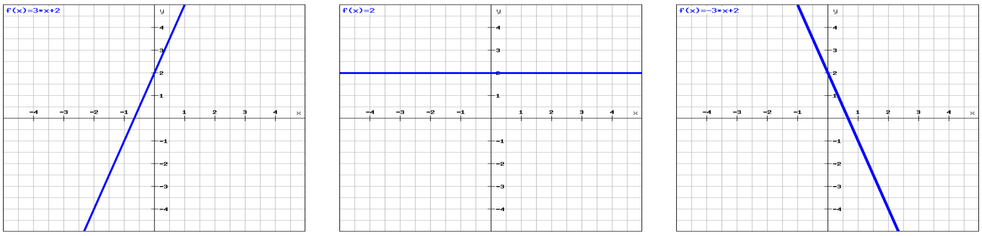


Figure 3: Graphe de $f(x) = kx + b$ en fonction de k

4. L'équation $y = kx + b$ de la droite quand on connaît deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) du graphe est donnée par

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{=k} x + \underbrace{y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0}_{=b} .$$

- La fonction quadratique
  1. La forme générale est $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
  2. Pour tracer le graphe de cette fonction, on la transforme comme suit.

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{a}\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2)\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right). \end{aligned}$$

  Donc, le graphe de f est obtenue par le graphe de $y = x^2$ en le transformant comme suit:

  a) on l'étire horizontalement d'un facteur de a,

  b) on le deplace à droite de $-b/(2a)$ unités,

  c) on le deplace verticalement de $c - b^2/(4a)$ unités, voir Figure 4

  3. L'intersection avec les axes sont:
  avec l'axe des y c'est le point $(0, f(x) = (0, c)$,
  avec l'axe des x ce sont tous les points $(x, 0)$ avec $f(x) = 0$.
  4. Si $f(x) = a(x - h)^2 + k$, alors on dit que le point (h, k) est son sommet. D'après ci-dessous, on que que le sommet est donné par

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = c - \frac{b^2}{4a}.$$

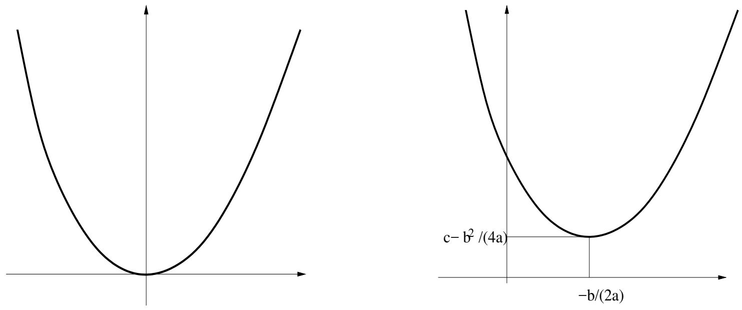


Figure 4: Le graphe de $f(x) = x^2$ à gauche et de $f(x) = ax^2 + bx + c$ à droite.

5. Cette observation permet de trouver le maximum, ou le minimum d'une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. Notemment, on trouve son sommet (h, k) et la valeur k est son maximum si $a < 0$, ou minimum si $a > 0$.

Exemple 1.11 *Trouvons la valeur maximale de $f(x) = -2x^2 + 12x + 11$.*

On observe que son graphe est une parabole avec les braches vers le bas. Donc, le maximum de f est au sommet (h, k) de sont graphe. On peut applquer les formules ci-dessus pour le sommet

$$k = c - \frac{b^2}{4a} = 11 - \frac{(12)^2}{4(-2)} = 11 + \frac{144}{8} = 11 + 18 = 29.$$

On pourrait aussi procéder directement en transformant la fonction comme suit

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x^2 - 6x) + 11 \\ &= -2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2) + 11 \\ &= -2((x-3)^2 - 3^2) + 11 \\ &= -2(x-3)^2 + 11 + 2 \cdot 3^2 \\ &= -2(x-3)^2 + 29. \end{aligned}$$

D'où $h = 3$ et $k = 29$. Donc, le maximum de f est 29.

- La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$. On peut trouver facilement que $Dom(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ et que $Im(f) = \mathbb{R}$. Son graphe est donné dans Figure 5.

1.2.2 Puissances et racines

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Alors on définit la fonction puissance $y = x^n$ si et seulement si $y^n = x$. Donc

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{nfois}, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{nfois}}.$$

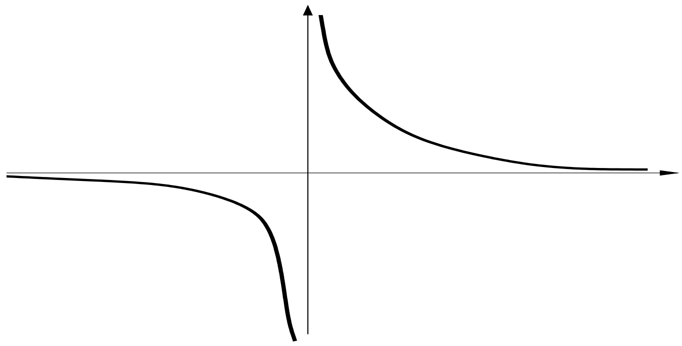


Figure 5: Le graphe de $f(x) = \frac{1}{x}$

Par définition, on prend $x^0 = 1$.

Donc, on a définit x^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. C'est la fonction puissance $f(x) = x^n$. Ici, x est la base et n est l'exposant.

- On peut définir les puissances pour des exposant réels. Ici, on voit le cas des exposants $\frac{1}{n}$. Notamment

$$x^{\frac{1}{n}} = y \quad \Longleftrightarrow y^n = x.$$

Parfois, on écrit $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Si n est pair et x est negative alors $\sqrt[n]{x}$ n'existe pas.

Si n est pair et x est positive, alors l'équation $y^n = x$ a deux solutions. On prend pour racine n-ème de x la solution positive.

Exemple 1.12 *Calculons les expressions suivantes avec les exposants et pusissances:*

$$\begin{aligned}
\rightarrow \qquad & 2^3 \cdot 4^{-2} = 2^3 \frac{1}{4^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \\
\rightarrow \qquad & \left(\frac{1}{2^{-3}}\right)^4 = \frac{1^4}{(2^{-3})^4} = \frac{1}{2^{-12}} = 2^{12} = 4096, \\
\rightarrow \qquad & \frac{2^2 + 6^5}{4^2} = \frac{2^2}{4^2} + \frac{6^5}{4^2} = \left(\frac{2}{4}\right)^2 + 6\frac{6^4}{(2^2)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{6^4}{2^4} \\
= \quad & \frac{1}{2^2} + 6\left(\frac{6}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + 6\,(3)^4 = \frac{1}{4} + 6 \cdot 81 = \frac{1}{4} + 486 \\
= \quad & \frac{1945}{4}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.13 *Soit une valeur actualisée A (somme d'argent) placée dans un compte à la banque à un taux d'intérêt annuel r, et composée annuellement. Trouvons la balance du compte après n années.*

Soit S_n la balance du compte à la fin de l'année n. Clairement $S_0 = A$. De plus, due à l'intérèt on a

$$S_n = S_{n-1} + rS_{n-1} = S_{n-1}(1+r).$$

En appliquant à nouveau cette formule pour S_{n-1}, S_{n-2}, ..., on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1}(1+r) \\ &= \underbrace{S_{n-2}(1+r)}_{=S_{n-1}}(1+r) = S_{n-2}(1+r)^2, \\ t &= \cdots \\ &= S_0(1+r)^n \\ &= A(1+r)^n, \end{aligned}$$

parce que $S_0 = A$.

Comme des applications, on obtient:

A	r	n	S_n
10	0.5	5	$A_5 = 10 \cdot (1+1/2)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{2430}{32}$
10	1	5	$A_5 = 10 \cdot (1+1)^5 = 10 \cdot 32 = 320$

1.2.3 Valeur absolue

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0, \\ -x, & si \;\; x < 0. \end{cases}$$

- De façon géomètrique, $|x|$ est la distance de x à l'origine.

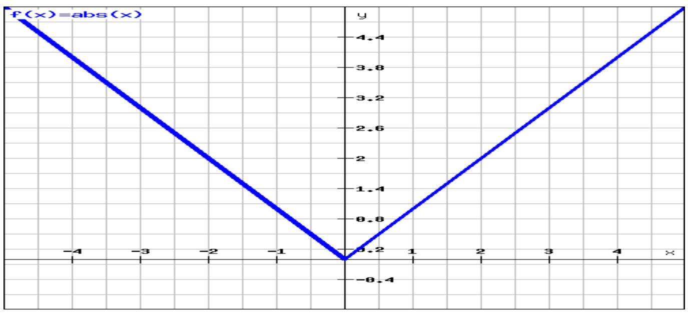


Figure 6: Le graphe de $f(x) = |x|$

Exemple 1.14 *Resoudre l'inégalité $|2 - 5x| < 3$.*

Soit $y = 2 - 5x$, Donc à resoudre est $|y| < 3$. Puisque $|y|$ est la distance de y à l'origine, cette inéquation est équivalente à

$$\begin{array}{rcl} -3 & < y < & 3, \\ -3 & < 2-5x < & 3, \\ -3-2 & < 2-5x-2 < & 3-2, \\ -5 & < -5x < & 1, \\ 1 & > x > & -\frac{1}{5}. \end{array}$$

Donc la solution est $(-1/5, 1)$.

1.2.4 Polynômes

- Un polynôme $p(x)$ est une fonction de la forme

  $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0.$$

  Les nombres réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont les coéfficients de p, $n \in \mathbb{N}$ est le degrée du p. L'ensemble des polynômes de degrée n est noté par $\mathcal{P}_n$

- Étant donné $p \in \mathcal{P}_n$, $q \in \mathcal{P}_m$, $m < n$, on peut diviser p par q et on obtient

  $$p(x) = \underbrace{h(x)}_{\text{le quotient}} \cdot \underbrace{q(x)}_{\text{le diviseur}} + \underbrace{r(x)}_{\text{le résidu}}, \quad \textit{avec degrée(r)} < \textit{degrée(q)}$$

- Factoriser un polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ signifie d'écrire

  $$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_k(x),$$

  avec $p_1 \in \mathcal{P}_{n_1}$, ..., $p_k \in \mathcal{P}_{n_k}$ et $n_1 + \cdots + n_k = n$.

- L'expression ci-haut à droite est appellée "factorisation de p".

- Si $p_i = a_i x + b_i$, pour tous les i, c.à.d.

  $$p(x) = (a_1 x + b_1) \cdots (a_n x + b_n),$$

  on dit que p est factorisé en facteurs simples.

- Resoudre un polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ signifie de trouver $x \in \mathbb{R}$ tels que

  $$p(x) = 0.$$

  Ces x sont appllés "racines de p".

  Un polynôme p de degrée n admet au plus n racines réelles distinctes.

- La solution de $p(x) = 0$ et la factorisation de p sont intimmement liés.

  Par exemple, si on connait la factoristion de p en facteurs simples comme ci-haut, alors les racines de p sont

$$\begin{aligned} p(x) &= (a_1x + b_1) \cdots (a_nx + b_n) = 0 \\ &\iff a_1x + b_1 = 0, \ \cdots, \ a_nx + b_n = 0 \\ &\iff x_1 = -\frac{b_1}{a_1}, \cdots, x_n = -\frac{b_n}{a_n}. \end{aligned}$$

  Inversement, si on connait les racines x_1,...,x_n alors

$$p(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

  En particulier, si $p(x) = ax^2 + bx + c$ alors les racines sont

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  et la factorisation est

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si p est factorisé comme

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_k)^{n_k},$$

  alors on dit que x_1 est racine de multiplicité n_1,..., x_k est racine de multiplicité n_k.

- Les suivantes sont des formules utiles.
  1. $x^2 - b^2 = (x - b)(x + b)$
  2. $(x \pm b)^2 = x^2 \pm 2xb + b^2$
  3. $x^3 \pm b^3 = (x \pm b)(x^2 \mp bx + b^2)$
  4. $(x \pm b)^3 = x^3 \pm 3x^2b + 3xb^2 \pm x^3$

1.2.5 Fonctions rationnelles et algèbriques

- $r(x)$ est dite fonction rationnelle si elle est de la forme

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}.$$

- f est dite fonction algèbrique si elle est égale à une combinaison de fonctions rationnelles est de leurs puissances et de racines.

1.2.6 Problèmes

Problème 1.2.1 *Tracez le graphe de $h(x)$ à partir du graphe de $f(x)$.*

(a) $f(x) = x, \quad h(x) = f(x-3)+2$

(b) $f(x) = x^2, \quad h(x) = 2f(x)-1$

(c) $f(x) = x^2, \quad h(x) = 3f(x-1)+1$

(d) $f(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = 2f(x-3)-1$

Problème 1.2.2 *Trouvez la valeur maximale, ou minimale, de $f(x)$ quand elle existe:*

(a) $f(x) = x^2 - 1$ *(minimum)*

(b) $f(x) = -x^2 + 10$ *(maximum)*

(c) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$ *(maximum)*

(d) $f(x) = 3x^2 - 6x + 12$ *(minimum)*

(e) $f(x) = x^2 - 12x + 36$ *(minimum)*

(f) $\dfrac{1}{x^2+1}$ *(maximum)*

Problème 1.2.3 *Soit A une valeur actualisée qui est déposée dans un compte bancaire avec intérèt annuel r, composé annuellement. Trouvez la balance du compte après n années.*

(a) $A = 10$, $r = 20\%$, $n = 10$

(b) $A = 100$, $r = 40\%$, $n = 5$

(c) $A = 100$, $r = 60\%$, $n = 3$

(d) $A = 200$, $r = 100\%$, $n = 2$

Problème 1.2.4 *Divisez les polynômes $p(x)$ suivants par le polynôme $q(x)$ correspondant, et ensuite resoudre $p(x) = 0$ (quand c'est possible):*

(a) $p(x) = x^3 - 8$, $q(x) = x - 2$

(b) $p(x) = x^3 - 7x + 6$, $q(x) = x - 1$

(c) $p(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$, $q(x) = x - 3$

(d) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, $q(x) = x - 2$

(e) ^{s} $p(x) = x^3 - 7x + 6$, $q(x) = x - 2$

(f) $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $q(x) = x + 2$

Problème 1.2.5 *Factoriser les polynômes suivants.*

(a) $p(x) = x^2 - 2x + 1$

(b) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(c) $p(x) = x^3 - 1$

(d) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

(e) $p(x) = x^4 - 1$

(f) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 2$

(g) $p(x) = x^2 - 1$

(h) $p(x) = x^5 - 1$

(i) $p(x) = x^4 - 1$ $p(x) = x^4 + x^3 - x - 1$

1.3 Modélisation. Applications

Modélisation est un processus de raisonnement qui traduit un problème ou phénomène de la vie réelle en un problème mathématique. Le problème mathématique obtenu permet de resoudre le problème réel et d'obtenir une estimation quantitative et qualitative de ce problème.

1.3.1 Quelques notions et notations

le prix brut:	c'est le prix avant toute autre taxe ou charge
le prix net:	c'est le prix après toute autre taxe ou charge
la demande d'un produit:	la demande x est la volonté/desir des consomateurs d'acheter un produit donné
la fonction demande d'un produit:	c'est la fonction $p(x)$ qui donne le prix par unité d'un produit que le consomateurs sont prét à acheter quand la demande est x
la fonction offre:	c'est la fonction $S(x)$ qui donne le prix par unité que les producteurs sont pr'et à vendre quand la demande est x
fonction revenu:	c'est la fonction $R(x) = xp(x)$
prix d'équilibre:	c'est le prix pour lequel les fonctions demande est l'offre sont égales, c.à.d. $p(x) = S(x)$
le point d'équilibre:	c'est le paire (x_0, p_0) tel que $p_0 = p(x_0) = S(x_0)$
seuil de rentabilité:	c'est la demande x pour lequel le revue est égale au coût, c.à.d. $R(x) = C(x)$
coefficient de liquidité:	il est égale au quotient des valeurs disponibles aux dettes

Example 1.15 *Marc et Cécile désirent acheter une voiture neuve et ils disposent $25000. Sâchant que les taxes qui s'appliquent à cet achat s'élèvent à %13, quel est le prix brut de la voiture dont ils sont permit d'acheter?*
Solution. *Soit x le prix brut de la voiture. Puisque les taxes sont %13, donc $\frac{13}{100} = 0.13$, alors*

$$x + 0.13x = 25000; \quad \textit{donc} \;\; 1.13x = 25000, \quad \textit{d'où} \;\; x = \frac{25000}{1.13} = 22123.8938...$$

Donc, le prix brut de la voiture que Marc et Cécile peuvent acheter est $22123.8938.

Example 1.16 (seuil de rentabilité) *Soient $R(x) = 1+3x$ la fonction revenue et $C(x) = x^2+x+2$ la fonction coût du même produit. Trouvez le seul de rentabilité de ce produit.*
Solution. *On cherche x tel que $R(x) = C(x)$:*

$$\begin{aligned} 1 + 3x &= x^2 + x + 2, \\ x^2 - 2x + 1 &= 0, \\ x &= \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4-4}) = 1. \end{aligned}$$

Donc, pour une demande $x = 1$ le revenu et le coût sont égales.

Example 1.17 *Un libraire va enrichir son catalogue avec une nouvelle série de livres. Le libraire possède \$2 million en liquide, alors qu'il se doit \$3 million à sa banque. Sâchant que le libraire accepte d'avoir un coefficient de liquidité au plus à* 0.8*, quel est le montant maximal que le libraire est permis d'emprunter?*
Solution. *Soit* x *le montant (en million de dollars) que le libraire peut emprunter. Au moment de l'emprunt il va avoir* $2 + x$ *million de dollars en liquide, alors que ses dettes s'éleveront à* $3 + x$ *millons de dollars. Donc le coéfficient de liquidité est* $\frac{2+x}{3+x}$*. Alors*

$$\begin{aligned}\frac{2+x}{3+x} &= 0.8; \quad \textit{d'où} \\ 2+x &= 0.8(3+x), \\ (1-0.8)x &= 0.8\cdot 3 - 2, \\ x &= \frac{0.4}{0.2} = 2 \textit{ millons de dollars}.\end{aligned}$$

Example 1.18 (le prix d'équilibre) *La fonction demande d'un produit est* $p(x) = p(x) = 3 + x$ *alors que sa fonction offre est* $S(x) = \frac{6}{1+x}$*. Trouvons la demande d'équilibre de ce produit.*
Solution. *On cherche* x *tel que* $p(x) = S(x)$*. Donc*

$$\begin{aligned}3+x &= \frac{6}{1+x}; \qquad \textit{on resout cette équation comme suit} \\ (3+x)(1+x) &= 6, \\ x^2+4x-3 &= 0, \\ x &= \frac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{16+12}) = \frac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{28}), \\ x &= \frac{1}{2}(-4+\sqrt{28}) \approx 0.6457 \quad \textit{(l'autre solution est négative, donc not accepté).}\end{aligned}$$

D'où le prix d'équilibre est

$$p = p(0.6457) = S(0.6457) = 3 + 0.6457 = 3.6457.$$

Example 1.19 *Un commerçant de voitures a remarqué qu'il vend 1000 voitures par an, pour un prix de 30 milles de dollars par voiture. De plus, le commerçant a observé que pour toute montée/baisse du prix par unité par 0.5 mille de dollars il vend 50 voitures de moins/plus. À quel prix par voiture le revenu du commerçant serait 33 600 milles dollars?*
Solution. *Notons d'abord que le prix est en milliers de dollars. Soit* $p = kx + b$ *la fonction demande. On sait que*

$$k = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\pm 0.5}{\mp 50} == -\frac{1}{100}.$$

Donc, $p = -\frac{1}{100}x + b$*.*

D'autre part on sait que $p(1000) = 30$*, donc* $30 = -\frac{1}{100}1000 + b$*, d'où* $b = 40$ *et*

$$p(x) = -\frac{1}{100}x + 40, \quad R(x) = xp(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 40x.$$

On cherche x *tel que* $R(x) = 33\ 600$*, donc*

$$-\frac{1}{100}x^2 + 40x = 33\ 600, \quad x^2 - 4\ 000x + 3\ 360\ 000 = 0.$$

Il en suit que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(4\ 000 \pm \sqrt{(4\ 000)^2 - 4 \cdot 3\ 360\ 000}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4\ 000 \pm \sqrt{16\ 000\ 000 - 13\ 440\ 000}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4\ 000 \pm \sqrt{2\ 560\ 000}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4\ 000 \pm \sqrt{(1\ 600)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(4\ 000 \pm 1\ 600) \\ x &= 1\ 200, \\ x &= 2\ 800. \end{aligned}$$

Donc il y a deux demandes possible. Le commerçant doit appliquer un prix par voiture (en milliers de dollars)

$$\begin{aligned} p(1\ 200) &= -\frac{1}{100}1\ 200 + 30 = 28.8, \quad \textit{ou} \\ p(2\ 800) &= -\frac{1}{100}2\ 800 + 30 = 27.2, \end{aligned}$$

afin que son revenu soit $33\ 600$ *millers de dollars.*

1.3.2 Problèmes

Problème 1.3.1 *Jacques dispose $400 pour acheter un téléphone portable. Sâchant que les taxes qui s'appliquent à cet achat s'élèvent à %15, quel est le prix brut du télephone dont Jacques est permis d'acheter?*

Problème 1.3.2 *Céline veux acheter une voiture nouvelle et elle se dispose de $30000. Sâchant que les taxes qui s'appliquent à cet achat s'élèvent à %13, quel est le prix brut de voiture de Céline est permise d'acheter?*

Problème 1.3.3 (seuil de rentabilité) *Soient* $R(x)$ *la fonction revenue et* $C(x)$ *la fonction coût du même produit, comme ci-dessous. Trouvez le seul de rentabilité de ce produit.*

a) $R(x) = 80x - x^2$, $C(x) = 20x$

b) $R(x) = 2x - 2$, $C(x) = x^2 - x$

c) $R(x) = x^3 - x^2$, $C(x) = x^2$

d) $R(x) = x^4 + 3x^2$, $C(x) = x^2 - 1$

Problème 1.3.4 (coefficient de liquidité) *Deux entreprise de transport A et B désire moderniser leur parc de voitures. L'entreprise A possède \$7 million en liquide, alors qu'elle se doit \$10 million aux divers créanciers. L'entreprise B possède \$7 million en liquide, alors qu'elle se doit \$3 million aux divers créanciers,*

Sâchant que les deux entrprises acceptent d'avoir un coefficient de liquidité au plus 0.5*, quel est le montant maximal que chacune est permise d'emprunter?*

Problème 1.3.5 (le prix d'équilibre) *La fonction demande d'un produit est* $p(x)$ *alors que sa fonction offre est* $S(x)$*, comme ci-dessous. Trouvez le prix d'équilibre.*

a) $p(x) = 2 + x^2$, $S(x) = 3 - x$

b) $2)p(x) = 1 + x$, $S(x) = \dfrac{4}{1+x}$

c) $p(x) = x^2$, $S(x) = 1 - x$

d) $p(x) = x^3$, $S(x) = x - x^2$

Problème 1.3.6 *Un petit commerçant de pizza a remarqu'e qu'il vend 50 pizzas pour un prix de \$10 par pizza (par jour). Le commercant a observé que pour toute montée/baisse du prix par pizza de \$1 il vend 5 pizza de moins/plus par jour. À quel prix par pizza le revenu par jour du commerçant serait \$180?*

Problème 1.3.7 *Une agence immobilière a remarqué que si lemprix du loyer mensuel d'un appartement est \$1000, alors 500 apartaments sont loué. De son exérience l'agence a remarqué aussi que toute montée/baisse du prix du loyer mensuel par \$50, 10 apartements moins/plus sont loués. À quel loyer mensuel le revenu de l'agence serait \$300 000?*

Problème 1.3.8 ^{s} **(dépreciation des équipements)** *Émilie a acheté un téléphone mobile en 2011, à un prix de \$800. En 2015 son télephone a une valeur de marché de \$500.*
i) Trouvez une équation linéaire qui donne la valeur comptable (c'est la différence entre la valuer initiale et la depréciacion) du téléphone à chaque année.
ii) Quel sera la valeur comptable du téléphone en 2016?

2 Limite, continuité. Applications

Le calcul est l'étude du changement continu, et la notion de la limite est dans sa base. Le calcul nous permet de décrire comment certaines quantités évoluent au cours d'une période donnée. En finance, par exemple, un banquier d'investissements doit calculer la somme d'argent d'un compte qui compose les intérêts. De la même manière, dans le monde des affaires, une entreprise doit calculer le coût marginal (la variation du coût total correspondant à la production d'une unité supplémentaire d'un certain acrticle) pour savoir s'il faut monter ou baisser la production, et à la limite atteindre un niveau de production optimal.

A la fin de ce chapitre l'étudiant

✓ aura une compréhension plus solide de la limite et de la continuité d'une fonction,

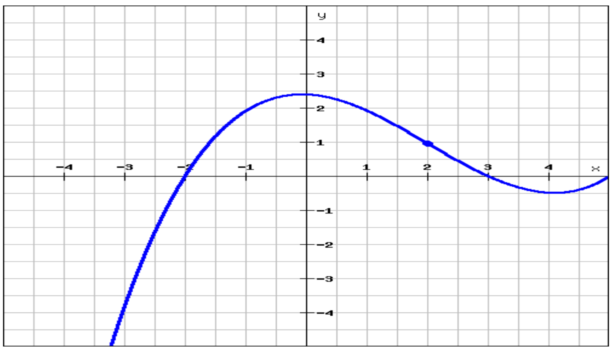
✓ et apprendra comment appliquer ces notions aux applications diverses.

2.1 Limite

Le concept de la *limite* est à la base des outils mathématiques nécessaires qui nous permettent de décrire mathématiquement l'évolution de plusieurs phénomènes de la vie réelle.

2.1.1 Quelques définitions et résultats élémentaires

Intuitivement, une limite décrit une valeur, dite "limite", à laquelle les valeurs d'une fonction s'approche infiniment lorsque la variable s'approche de plus en plus proche à un nombre spécifié.



Dans la figure ci-haut, quand les valeurs de x deviennent de plus en plus proches de la droite ou de la gauche du nombre $x = 2$, les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus au nombre $y = 3$. Dans ce cas, on dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2 existe, et est égale à 1.

En s'inspirant de cet exemple et pour mieux quantifier un tel comportement des fonctions, on commence avec quelques définitions et résultats élémentaires. Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans un intervalle I (ici, on abuse avec les notations en donnant seulement la loi de la fonction f et en ne précisant pas le domaine et l'image de f).

Définition 2.1 *On dit“la limite de f quand x tend vers c existe et est égale à ℓ, $\ell \in \mathbb{R}$”, si la valeur $f(x)$ s'approche infiniment à ℓ quand $x \in I$ s'approche infiniment à c. Dans ce cas on écrit*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell.$$

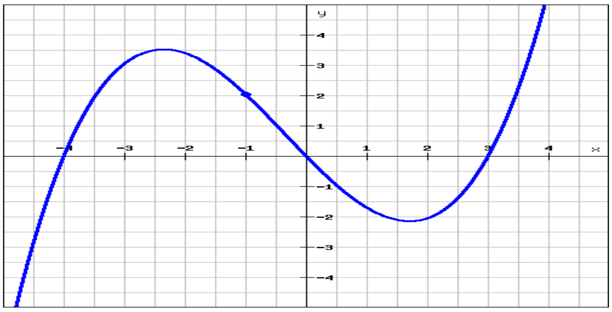
Dans le cas contraitre, on dit que f n'as pas de limite, (ou la limite de f n'existe pas) quand x tend vers c.

Note: Parfois, au lieu de “limite de f quand x tend vers c“ on dit “limite de f à c”.

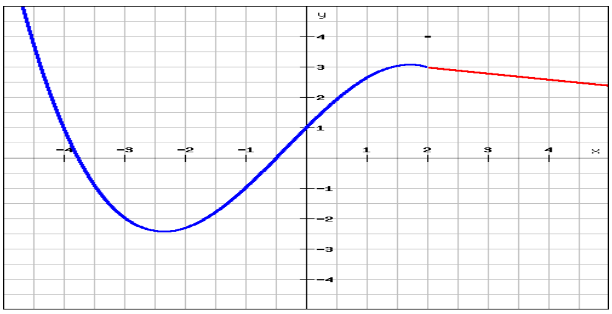
Exemple 2.1 *Que signifie l'expression $lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 6) = 2$?*
Elle signifie que $x^2 - 4x + 6$ s'approche infiniment à $\ell = 2$ quand x s'approche infiniment à $c = 2$.

Exemple 2.2 *Trouvez les limites des fonctions $f(x)$ données graphiquement au points c spécifié.*

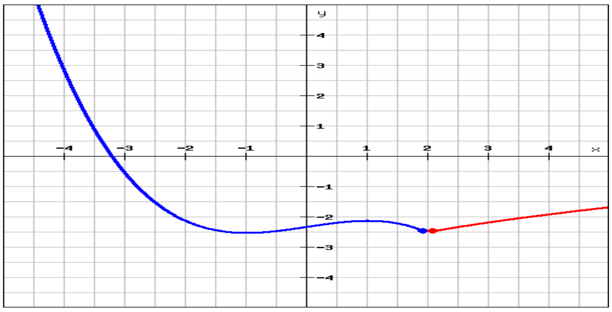
- *Ici $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$. En effet, lorsque les valeurs de x deviennent de plus en plus proches à $c = -1$, les valeurs de $f(x)$ sont très proche de $\ell = 2$. Dans cet exemple, il arrive que $f(1) = 2$, mais cela n'a aucune importance pour la limite, parce que les valeur de la limites dépendent des valeurs de $f(x)$ pour x proche de $c = -1$.*



- *Ici, $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$. Notons que $f(2) = 4$ alors que $\ell = 3$, et donc la valeur de la limit ne dépend pas de la valeur de f au $x = c$.*

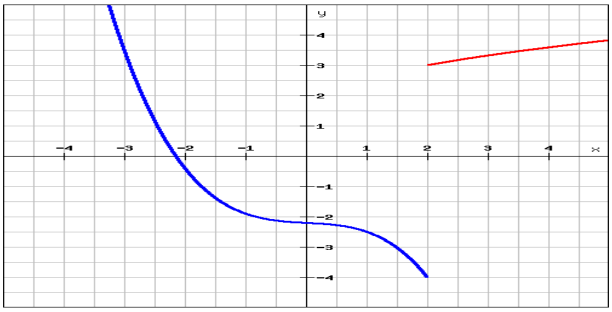


- *Dans cet exemple $\lim_{x\to 2} f(x) = -2.5$. Notons que $f(2)$ n'existe pas, alors que la limte existe. Donc la valeur de la limit ne dépend pas de la valeur de f au $x = c$.*



- *Ici* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *n'existe pas. Lorsque* x *s'approche à* $c = 2$ *mais légèrement inférieur à* 2 *alors les valeurs de* $f(x)$ *sont proches de* $l^- = -4$. *Mais si* x *s'approche à* $c = 2$ *mais légèrement supérieur à* 2 *alors les valeurs de* $f(x)$ *sont proches de* $\ell^+ = 3$.

  Alors, la limite est-elle égale à 2 *ou* 3*? En fait, si nous savons seulement que* x *est très proche de* $c = 2$*, nous ne pouvons pas dire si* $f(x)$ *sera proche de* 4 *ou proche de* 3*, car cela dépend si nous examinons les valeurs* $f(x)$ *de la droite de* $c = 2$ *ou de la gauche de* $c = 2$*. Donc, la limite n'existe pas.*



Remarque 2.2 *Les exemples précédents montrent le fait général et important: la limite d'une fonction* $\lim_{x\to c} f(x)$ *ne dépend pas de la valeur de la fonction au point* c *en question.*

Avec les limites, on peut effectuer toutes les opérations usuelles de sommation, substraction, etc:

Theorem 2.3 *Si* f *et* g *sont deux fonctions avec* $\lim_{x\to c} f(x) = \kappa$, $\lim_{x\to c} g(x) = \ell$*, alors*

a) $\lim_{x\to c}(af(x) + bg(x)) = a\kappa + b\ell$,

b) $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = \kappa\ell$,

c) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\kappa}{\ell}$, *si* $\ell \neq 0$,

d) $\lim_{x\to c}(f(x))^\alpha = \kappa^\alpha$,

e) $\lim_{x\to c}(f \circ g(x)) = \lim_{x\to \ell} f(x)$.

En géneral, si $f(x)$ *est une fonction algèbrique et* $c \in Dom(f)$ *alors*

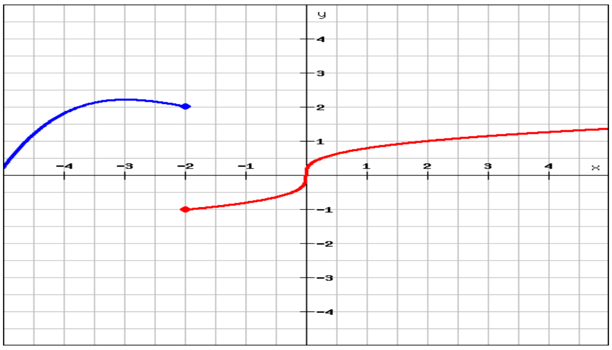
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Exemple 2.3 *Si* $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 6$, *et* $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$, *trouvez les limites suivantes:*

- $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4}{-2} = -2$
- $\lim_{x\to 2}(f(x))^3 = (4)^3 = 64$
- $\lim_{x\to 2}(f \circ g(x)) = \lim_{x\to -2} f(x) = 6.$

Certaines fonctions sont plus complexes à étudier. Comme mentionné dans l'example précédent, la valeur d'une limite (comme pour beaucoup de choses dans la vie) peut dépendre de la direction dans laquelle nous la considérons. Ce qui nous amène à établir les concepts de limite à gauche et de limite à .

Considérons la fonction $f(x)$ donnée par ce graphe.



Si x prend des valeurs proches de $c = -2$ mais inférieures à -2 (ce qui se traduit en langage mathématique par $x \to -2^-$), alors les valeurs $f(x)$ s'approche à $\ell^- = 2$. Cette limite s'appelle limite à gauche et on la note $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 2$.

Si x prend des valeurs proches de -2 mais supérieures à -2 (ce qui se traduit en langage mathématique par $x \to -2^+$), alors les valeurs $f(x)$ s'approche à -1. Cette limite s'appelle limite à droite et on la note $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1$. On formalise cette idée de la manière suivante.

Définition 2.4 *On dit que la limite de* f *quand* x *tend vers* c *de gauche existe et est égale à* ℓ^-*, avec* $\ell^- \in \mathbb{R}$*, si la valeur* $f(x)$ *s'approche infiniment à* ℓ^- *quand* $x \in I$ *s'approche infiniment à* c *avec* $x < c$*. De plus, on écrit*

$$\lim_{x\to c-} f(x) = \ell^-.$$

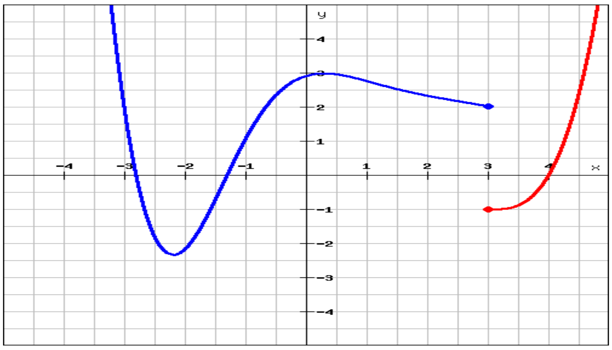
Réciproquement, on dit que la limite de f *quand* x *tend vers* c *de droite existe et égale à* ℓ^+*, avec* $\ell^+ \in \mathbb{R}$*, si la valeur* $f(x)$ *s'approche infiniment à* ℓ^+ *quand* $x \in I$ *s'approche infiniment à* c *avec* $x > c$*. De plus on écrit*

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \ell^+.$$

Ces deux définitions nous amènent aux deux prochains résultats.

Theorem 2.5 *Si la* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$*, alors* $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = \lim\limits_{x \to c+} f(x) = \ell$*. Inversement, si les limites de* f *quand* x *tend vers* c *à gauche et à droite existent et sont égales alors la limite de* f *quand* x *tend vers* c *existe et* $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = \lim\limits_{x \to c+} f(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x)$*.*

Corollaire 2.6 *Si une des limites de* f *à* c *à gauche et à droite n'existe pas, ou si elles existent mais ne sont pas égales, alors* f *n'a pas de limite à* c*.*



Exemple 2.4 *En utilisant le graphe ci-haut, que vaut* $\lim_{x \to 3} f(x)$*? On trouve les limites suivantes:*

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$,
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -1$.

Puisque les limites de f *à* $c = 3$ *à gauche et à droite ne sont pas égales,* $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ *n'existe pas.*

Exemple 2.5 *Soit* f *une fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < 1, \\ 7, & x = 1, \\ -x + k, & x > 1. \end{cases}$$

Ici, k *est un paramètre. On cherche* k *afin que* f *admette une limite à* $c = 1$*.*

Pour ceci on considère les limites à côté (à gauche et à droite):

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} (3x + 2) = 5, \\ \lim_{x \to 1+} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} (-x + k) = -1 + k. \end{aligned}$$

Pour que la fonction admette une limte à $c = 1$ *les limites à côté doivent être égales, donc* $5 = -1 + k$*, ou* $k = 6$*.*

2.1.2 Assymptôtes

Les assymptôtes font un autre élément qui va compléter l'étude d'une fonction et permettre de conclude avec le graphe d'une fonction. Il y a des assymptôtes verticales et horizontales. Elles généralisent la notion de la limite déjà vue.

Définition 2.7 *On dit que la droite $x = c$ est une assymptôte verticale (AV) d'une fonction f si et seulement si au moins une des conditions suivantes se produit:*

$$\begin{array}{rl} i) & \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty \quad et \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty, \quad \textit{(voir Fig. 7, gauche)} \\ ii) & \lim_{x\to c-} f(x) = \pm\infty, \quad \textit{(voir Fig. 7, centre)} \\ iii) & \lim_{x\to c+} f(x) = \pm\infty, \quad \textit{(voir Fig. 7, droite).} \end{array}$$

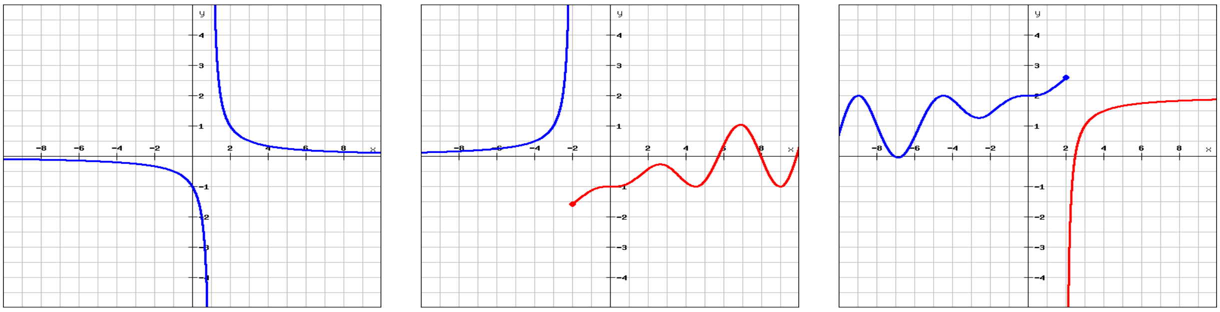


Figure 7: Les assymptôtes verticales

Ici, $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ signifie que les valeurs de $f(x)$ tend vers $\pm\infty$, c'est-à-dire il devient très grand positive ou négative, quand x s'approche à c. Similairement, $\lim_{x\to c-} f(x) = \pm\infty$, resp. $\lim_{x\to c+} f(x) = \pm\infty$, signifie que les valeurs de $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand x s'approche à c de gauche, resp. de droite.

Example 2.6 *Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. La fonction f est rationnelle. Son dénominateur $x-1$, devient zéro pour $x = 1$. Donc, quand x s'approche à $c = 1$, mais étant supérieur à 1, $x - 1 > 0$ et très petit, donc $f(x)$ devient très grand positive. On écrit ceci comme*

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0+} = +\infty.$$

Alors, $x = 1$ est une assymptôte verticale de f, parce que

Similairement, quand x s'approche à $c = 1$, mais étant inférieur à 1, $x - 1 < 0$ et très petit, donc $f(x)$ devient très un nombre négative tès grand. On écrit ceci comme

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Example 2.7 *Soit* $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}$*. La fonction* f *est rationnelle. On resout les racines du dénominateur,* $x^2 - 1 = 0$*, donc* $x = \pm 1$*. Alors,* $x = -1$ *et* $x = 1$ *sont des assymptôtes verticales de* f*, parce que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1+} \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{-3}{-0} = \infty \textit{ et}, \\
\lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1-} \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{-3}{0} = -\infty, \\
\lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1+} \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{-3}{0} = -\infty \textit{ et}, \\
\lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1-} \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{-3}{-0} = \infty,
\end{aligned}$$

Example 2.8 *Soit* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-x-2}$*. La fonction* f *est rationnelle. Les racines du dénominateur sont* $x^2 - x - 2 = 0$*, donc*

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Alors, le dénominateur, $x^2 - 1 = 0$*, devient zéro pour* $x = -1$ *et* $x = 2$*. On calcule les deux limites suivantes:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1\pm} f(x) &= \lim_{x \to -1\pm} \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} \qquad \textit{[on simplifie]} \\
&= \lim_{x \to -1\pm} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3}, \\
\lim_{x \to 2\pm} f(x) &= \lim_{x \to 2\pm} \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} \qquad \textit{[on simplifie]} \\
&= \lim_{x \to 2\pm} \frac{1}{x-2} = \pm\infty.
\end{aligned}$$

Alors, on en déduit que seulement $x = 2$ *est assymptôte verticale.*

Remarque 2.8 *Les exemples ci-dessus illustrent que, aux cas des fonctions rationnelles, les valeurs susceptibles de produire une assymptôte verticale sont notamment les valeurs* x *qui anulent les dénominateur simplifié.*

Similairement, on peut définir le concept d'un assymptôte horizontale.

Définition 2.9 *On dit que la droite* $y = \ell$*, resp.* $y = \ell^-$*, ou* $y = \ell^+$*, est une assymptôte horizontale (AH), resp. à* $-\infty$ *ou à* $+\infty$*, d'une fonction* f *si et seulement si:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell, \quad resp. \quad \textit{(voir Fig. 8, gauche)} \\
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \ell^-, \quad ou, \quad \textit{(voir Fig. 8, centre)} \\
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \ell^+, \quad \textit{(voir Fig. 8, droite)}.
\end{aligned}$$

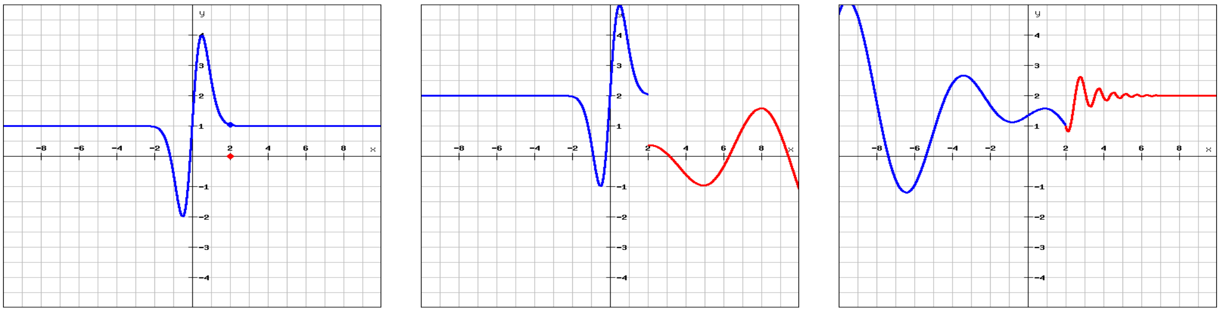


Figure 8: Les assymptôtes horizontales

Ici, la notation $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$ signifie que les valeurs de $f(x)$ tendent vers ℓ quand x s'approche infiniment à $-\infty$ et à $+\infty$. Similairement, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell^-$, resp. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l^+$, signifie que les valeurs de $f(x)$ tend vers ℓ^-, resp. ℓ^+, quand x s'approche infiniment à $-\infty$, resp. $+\infty$.

Exemple 2.9 *Trouvons les assymptôtes horizontales de* $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. *Avant de procéder avec les limites à* $\pm\infty$, *on évalue les valeurs* $f(x)$, $g(x)$ *comme dans ce tableau:*

valeur	± 1	± 10	± 100	± 1000	± 10000
$f(x)$	1	100	10000	1000000	100000000
$g(x)$	1	0.01	0.0001	0.000001	0.00000001

One voit que valeurs de $f(x)$ *se rapprochent de plus en plus à* $+\infty$ *à mesure que les valeurs de* x *s'approchent à* $\pm\infty$, *donc* $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ *ce qui signifie que* $f(x)$ *n'a pas de AH.*

Réciproquement, les valeurs de $g(x)$ *se rapprochent de plus en plus à* 0 *à mesure que les valeurs de* x *s'approchent à* $\pm\infty$, *donc* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ *ce qui signifie que* $y = 0$ *est AH de g(x).*

De la même façon on peut traiter les fonctions x^n, *pour* $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2.10 *Soit* $C(x) = 2x + 4\sqrt{x}$, $x > 0$, *la fonction coût d'un produit. Le coût moyen de ce produit est défini par* $C_u(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. *On note que*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} C_u(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 4\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + 4\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc, $y = 2$ *est AH de* $C_u(x)$ *à* $+\infty$.

Exemple 2.11 *Soit* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. *Alors* $y = 0$ *est assymptôte horizontale de* f *parce que*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0.$$

Exemple 2.12 *Soit* $f(x) = \dfrac{2x^7-5}{9x^7-3x+2}$. *Alors* $y = \dfrac{2}{9}$ *est assymptôte horizontale de* f *parce que*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^7-5}{9x^7-3x+2} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^7(2-5x^{-7})}{x^7(9-3x\cdot x^{-7}+2x^{-7})} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-5x^{-7}}{9-3x\cdot x^{-7}+2x^{-7}} \\
&= \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

On généralise la procédure pour trouver les assymptôtes verticales et horizontales d'une fonction rationnelle dans la proposition suivante:

Proposition 2.10 *Soit* $f(x) = \dfrac{p_m(x)}{q_n(x)} = \dfrac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}$ *une fonction rationnelle.*
Pour trouver les AV de $f(x)$ *on precède comme suit:*

1. *On factorise* p_m *et* q_n.
2. *On simplifie les facteurs communs.*
3. *Les racines du dénominateur simplifié sont les AVs de* f.

Pour trouver les AH de $f(x)$ *on precède comme suit:*

1. *Si* $m < n$ *alors* $y = 0$ *est assymptôte horizontale de f.*
2. *Si* $m = n$ *alors* $y = \dfrac{a_m}{b_n}$ *est assymptôte horizontale de f.*
3. *Si* $m > n$ *alors* f *n'a pas d'assymptôtes horizontales.*

2.1.3 Limites de forme indéterminée

Certaines limites sont de la forme dite "indéterminée". Typiquement ces formes sont $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \times \pm\infty$ et $\infty - \infty$. Nos on se contentera avec l'analyse des limites de la forme $\frac{0}{0}$.

Le calcul de ces limites généralement demande des téchniques particulières, telles que: i) la factorisation, ii) rationalisation, iii) limites à gauche et à droite, iv) changement de variable. On va démontrer ces méthodes à travers quelques exemples.

La factorisation On utilise cette méthode quand la fonction est rationelle.

Example 2.13 *Soit* $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}$. *Que vaut* $\lim_{x\to 3} f(x)$.

Si on remplace la valeur $x=3$ *dans la fonction* $f(x)$ *on obtient la forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$*:*

$$\lim_{x\to 3} f(x) \;=\; \frac{3^2-5\cdot 3+6}{3^2-4\cdot 3+3} = \frac{0}{0}!$$

Pour resoudre cette limite, on factorise à la fois le numérateur et le dénominateur, on simplifie les facteurs commun et ensuite on évalue la limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3} &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-1)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-1} = \frac{3-2}{3-1}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

La rationalisation On utilise cette méthode quand la fonction contient une racine carrée (ou une autre puissance).

Example 2.14 *Soit* $f(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{11-x}-3}$. *Quelle est la valeur de* $\lim_{x\to 2} f(x)$*?*

Si on remplace la valeur $x=2$ *dans* $f(x)$ *on obtient la forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$*:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sqrt{11-x}-3} \;=\; \frac{2-2}{\sqrt{11-2}-3} = \frac{0}{0}!$$

Pour resoudre cette limite on multiplie le facteur avec la racine carrée (le dénominateur dans ce cas) avec son conjugué, qui est $\sqrt{11-x}+3$*. Ceci permet d'éliminer la racine carrée, simplifer et ensuite éliminer la forme* $0/0$ *comme suit:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sqrt{11-x}-3} &= \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{11-x}+3)}{(\sqrt{11-x}-3)(\sqrt{11-x}+3)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{11-x}+3)}{(\sqrt{11-x})^2-3^2} = \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{11-x}+3)}{11-x-9}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{11-x}+3)}{2-x}\\
&= \lim_{x\to 2}(\sqrt{11-x}+3) = (\sqrt{11-2}+3)\\
&= 6.
\end{aligned}$$

Les limites à côté On utilise cette méthode quand la fonction se donne par deux lois différentes, tel qu'au cas quand la fonction contient une valeur absolue.

Example 2.15 *Soit* $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-3x+2}$ *et calculons* $\lim_{x\to 1} f(x)$.
Si on remplace $x = 1$ *on obtient*

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x^2-3x+2} \quad = \quad \frac{|1-1|}{1^2-3\cdot 1+2} = \frac{0}{0}!$$

Afin de resoudre cette limite, notons que $c = 1$ *est le point où* $f(x)$ *change de loi (dûe à la valeur absolue* $|x-1|$*). Alors, il est préférable de considérer les limites à côté. En notant que le dénominateur s'écrit*

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to 1-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x-2)} && \text{[parce que } |x-1| = -(x-1) \text{ pour } x < 1\text{]} \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{-1}{(x-2)} \\
&= \frac{-1}{(1-2)} \\
&= 1, \\
\lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-2)} && \text{[parce que } |x-1| = (x-1) \text{ pour } x > 1\text{]} \\
&= \lim_{x\to 1+} \frac{1}{(x-2)} \\
&= \frac{1}{(1-2)} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Puisque les limites à côté sont différentes on conclût que la limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x^2-3x+2}$ *n'existe pas.*

Changement de variable On utilise cette méthode quand la fonction contient une racine carrée (ou une autre puissance).

Example 2.16 *Soit* $f(x) = \dfrac{(x+7)^{1/2}-3}{x-2}$ *et calculons* $\lim_{x\to 2} f(x)$. *Si on remplace* $x = 2$ *on obtient*

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+7)^{1/2}-3}{x-2} \quad = \quad \frac{(2+7)^{1/2}-3}{2-2} = \frac{0}{0}!$$

Afin de resoudre cette limite on va procéder avec la méthode de changement de variable[1].

On pose $t = (x+7)^{1/2}$. *On a*

$$x = t^2 - 7, \quad \lim_{x\to 2} t = 3.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{(x+7)^{1/2} - 3}{x-2} &= \lim_{t\to 3} \frac{t-3}{(t^2-7)-2} \\
&= \lim_{t\to 3} \frac{t-3}{t^2-9} \qquad \text{[on factorise le dénominateur]} \\
&= \lim_{t\to 3} \frac{t-3}{(t-3)(t+3)} = \lim_{t\to 3} \frac{1}{t+3} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Vous pouvez obtenir le même résultat en utilisant la méthode de rationalisation.

2.1.4 Problèmes

Problème 2.1.1 *Pour chacun des cas suivants dérminez si la fonction f admet limite, ou limites à côté, au point $x = c$ spécifié.*

a) ^{s} $c = 1$, $f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 1, \\ \dfrac{1+x^2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

b) $c = 3$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+16}, & x < 3, \\ x+2, & x \geq 3 \end{cases}$

c) ^{s} $c = -1$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x < 2, \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$

d) ^{s} $c = 2$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-3}, & x > 2, \\ 5x-6, & x \leq 2 \end{cases}$

Problème 2.1.2 *Calculez les limites suivantes si elles existent.*

a) ^{s} $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{1+x-3x^3}{7+x^2}$, $c \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to c} \sqrt{x - \sqrt{x}}$, $c \geq 1$

c) ^{s} $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-x^2}$, $0 \leq c \leq 1$

d) $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{1-x}{x^3-3x^2+2x}$, $c \in \mathbb{R}$

Problème 2.1.3 *Calculez les limites de forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$ *suivantes:*

[1] on remarque que $f(x)$ contient une puissance d'un demi dans le numérateur, et donc on pourrait utiliser la méthode de rationalisation

a) $^s \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

b) $\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{5-\sqrt{x^2+21}}{x-2}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

e) $^s \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

f) $^s \lim_{x\to 1} \frac{(x+7)^{1/3}-2}{x-1}$

g) $\lim_{x\to 1} \frac{(5-x)^{1/2}-2}{x-1}$

h) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

Problème 2.1.4 *Soit $C(x)$ la fonction coût d'un produit. Le coût unitaire, noté par $C_u(x)$ est définit par $C_u(x) = \frac{C(x)}{x}$. Trouvez $\lim_{x\to+\infty}$ de $C_u(x)$ dans les cas suivants:*

a) $^s\ C(x) = x^2 + 2x$

b) $^s\ C(x) = \sqrt{9x^2+1} + 1$

c) $C(x) = 14x^3 + 7x$

d) $C(x) = |x|$

Problème 2.1.5 *Trouvez les assymptôtes verticales (AV) et les assymptôtes horizontales (AH) des fonctions suivantes:*

a) $^s\ f(x) = \frac{x^2-3x+7}{x^2-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

d) $^s\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

e) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

f) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

g) $f(x) = x^3 - 1$

h) $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$

i) $f(x) = \frac{3x^2-2015x+7}{x^2-4}$

j) $f(x) = \frac{3x^{3/2}-2}{x\sqrt{x}-1}$

k) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

l) $f(x) = \frac{x^3-x}{x}$

2.2 Continuité

Dans la section précédente, nous avons vu quelques fonctions "amicales" dont les limites sont simplement $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Les fonctions qui satisfont cette propriété de substitution sont appelées continues. Dans cette section, nous présenterons quelques de leurs propriétés et illustrerons leur utilité dans plusieurs applications différentes.

2.2.1 Notations and quelques propriétés simples

Informellement, l'idée de la continuité est liée à l'idée que des variations infinitésimales de la variable x impliquent des variations infinitésimales de la valeur $f(x)$. Dans ce cas, la fonction est dite continue. Graphiquement, ceci est presenté par une courbe lisse. S'il y a des sauts ou des trous dans le graphique, la fonction est discontinue. La définition formelle est donnée ci-dessous.

Définition 2.11 *Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans une intervalle I. Soit $c \in I$. Par définition, on dit "f est continue à c" si les trois conditions suivantes sont satisfaites:*

1. $f(c)$ *existe,*
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ *existe, et*
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Autrement, on dit que f est discontinue à c.

Les situations que nous rencontrons le plus souvent dans les applications en affaires ou gestion se modélisent mathématiquement par des fonctions continues partout ou soit continues partout sauf à quelques points.

Alors, quelles fonctions sont continues? Il s'avére que la plupart des fonctions déjà présentées dans ce manuel sont continues où elles sont définies, y compris les fonctions polynômiales, radicales, rationnelles, exponentielles et logarithmiques. En fait, on a ce théorème.

Theorem 2.12 *Toute fonction algèbrique $f(x)$ est continue à chaque point $c \in Dom(f)$.*

Do plus, toute combinaison de fonctions continue utilisant les opérations usuelles, telles que la combinaison linéaire, multiplication, fraction, racine, puissance, etc, est continue dans son domaine de définition.

Notation: Si f est continue à chaque $c \in I$ alors on dit que f est continue dans I et on écrit $f \in C^0(I)$.

Exemple 2.17 *Considérons la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x}, & x > 1, \\ x^2+1, & x \leq 1. \end{cases}$$

Vérifions si cette fonction est continue dans l'intervalle $\mathbb{R}$. Soit $c \in \mathbb{R}$. A vérifier donc si f est continue à chaque c ou pas. Puisque f change de lois à $c = 1$, alors on doit considérer trois cas pour c.

i) $c > 1$. *Pour $x > 1$ on a que $f(x) = \sqrt{3+x}$, qui est une fonction algèbrique bien définie pour tout $x > 1$. Donc f est continue à tout $c > 1$.*

ii) $c < 1$. *Pour* $x < 1$ *on a que* $f(x) = x^2 + 1$, *qui est une fonction algèbrique (même un polynôme). Donc* f *est continue à tout* $c < 1$.

iii) $c = 1$. *Dans ce cas on considère les limites à côté:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \sqrt{3+x} = \sqrt{3+1} = 2, \\
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (x^2+1) = 1^2 + 1 = 2; \ \ de \ plus \\
f(1) &= 1^2 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1),$$

on conclut que f *est continue à* $x = 1$. *En conclusion,* f *est continue dans* $\mathbb{R}$.

Exemple 2.18 *Pour quelle valeur du paramètre* k *la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^2 + k^2 x}{x^2}, & x > 1, \\ \sqrt{3 + x^2}, & x \leq 1, \end{cases}$$

est continue à $x = 1$.

On sait que f *est continue à* $x = 1$ *ssi* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *existe et est égale à* $f(1)$. *La fonction* f *étant donnée par deux lois différentes à côté de* $x = 1$, *on considère les limites à côté.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{kx^2 + k^2 x}{x^2} = k + k^2, \\
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \sqrt{3 + x^2} = 2.
\end{aligned}$$

Pour que la fonction soit continue il faut que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Puisuqe $f(1) = 2$ *il est équivalent à*

$$\begin{aligned}
k + k^2 &= 2, \ \ d'où \\
k^2 + k - 2 &= 0, \\
k &= \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+8}) = \frac{1}{2}(-1 \pm 3), \ \ k = -2, \ k = 1.
\end{aligned}$$

En conlusion, $k = -1$ *ou* $k = 2$ *rend* f *continue à* $x = 1$.

Exemple 2.19 *Pour quelle valeur des paramètres a et b la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2bx^2 - x, & x > 1, \\ ax - bx^2, & x \leq 1, \end{cases}$$

est continue à $x = 1$.

On sait que f est continue à $x = 1$ ssi $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe et est égale à $f(1)$. La fonction f étant donnée par deux lois différentes à côté de $x = 1$, on considère les limites à côté.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (ax^3 - 2bx^2 - x) = a - 2b - 1, \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (ax - bx^2) = a - b. \end{aligned}$$

Pour que la fonction soit continue à $x = 1$ il faut et il suffit que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Puisque $f(1) = a + b$ on obtient

$$\begin{aligned} a^2 - 2b - 1 &= a - b, \ \textit{d'où} \\ a^2 - a - 1 &= b. \end{aligned}$$

Donc, pour tout pair (a, b) satisfaisant $b = a^2 - a - 1$ la fonction f est continue à $x = 1$.

2.2.2 Problèmes

Problème 2.2.1 *Vérifiez si les fonctions suivantes sont continues au point c spécifié.*

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ 3x - 1, & x \leq 0, \end{cases}$ $\quad c = 0,$

b) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 1, \\ -|x|, & x \geq 1, \end{cases}$ $\quad c = 1$

c) ^{s} $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 1, \\ x^2 - \sqrt{x}, & x \geq 1, \end{cases}$ $\quad c = 2$

d) ^{s} $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \sqrt{2x}} & x < 2, \\ x^2 + x, & x \geq 2, \end{cases}$ $\quad c = 2.$

Problème 2.2.2 *Pour quelle valeur du paramètre k, ou des paramètres a et b, les fonctions suivantes sont continues dans $\mathbb{R}$?*

a) $f(x) = \begin{cases} x - k, & x < 0, \\ \dfrac{1 + x^2}{x + 1}, & x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + k, & x < 0, \\ kx + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

c) ^{s} $f(x) = \begin{cases} k^2 + kx^2, & x < 1, \\ kx + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{1 + x^2}, & x < 1, \\ -\dfrac{x + 1}{k}, & x \geq 1 \end{cases}$

e) $^s\ f(x) = \begin{cases} ax^2+3ax, & x<1, \\ 8, & x=1, \\ 2bx-bx^3, & x\geq 1 \end{cases}$ *f)* $f(x) = \begin{cases} a^2x^2+ax, & x<1, \\ 10, & x=1, \\ ax-bx^3, & x\geq 1 \end{cases}$

2.3 Applications de la limite

2.3.1 Séries géometriques

Une série est l'opération qui consiste à ajouter un nombre fini ou infinité de quantités successives à une quantité initiale donnée. Une série géométrique est une série simple: il y a une raison constant des termes successifs.

2.3.1.1 Notations, définitions et résultats élémentaires

- Soit $a, r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et posons

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad (n \text{ termes}) \\ &= a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \quad \text{[notée aussi par]} \\ &= a\sum_{k=0}^{n-1} r^k. \end{aligned} \tag{2}$$

  C'est la série géomètrique finie de raison r et de terme initial a, et S_n est sa somme.

  A noter que la raison r est le raport entre deux termes successifs de la série.

- On peut considérer S_n quand $n = +\infty$, c.à.d.

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n + \cdots \\ &= a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n + \cdots) \quad \text{[notée aussi par]} \\ &= a\sum_{k=0}^{\infty} r^k. \end{aligned} \tag{3}$$

  On appèlle S "série géomètrique infinie". Si cette limite existe, c.à.d. *il existe un nombre, noté S tel que S_n s'approche à S infiniment alors que n tend vers l'infini*, on dit que la sé'eri est convergence. Autrement, on dit que la série est divergence.

- On a

$$S_n = \begin{cases} a\dfrac{1-r^n}{1-r}, & r \neq 1, \\ an, & r = 1, \end{cases} \quad \text{et} \tag{4}$$

$$S \quad := \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & |r| < 1, \quad \textit{(la série est convergente)} \\ \text{n'existe pas}, & |r| \geq 1 \quad \textit{(la série est divergente).} \end{cases} \tag{5}$$

- Parfois on considère la série

$$S = a\sum_{k=l}^{\infty} r^k = ar^l + ar^{l+1} + ar^{l+2} + \cdots \tag{6}$$

La somme de cette série est donnée par

$$\begin{aligned} S &= ar^l(1 + r + r^2 + \cdots) \qquad \text{[on utilise (5)]} \\ &= \frac{ar^l}{1-r}, \quad \text{si } |r| < 1. \end{aligned} \tag{7}$$

- Soient $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} bs^n$, deux séries géomètriques. Alors:
  i) $\sum_{n=0}^{\infty}(ar^n + bs^n)$ est convergente si chaqune des deux séries est convergente; de plus

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ar^n + bs^n) = a\sum_{n=0}^{\infty} r^n + b\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{a}{1-r} + \frac{b}{1-s},$$

  ii) $\sum_{n=0}^{\infty}(ar^n + bs^n)$ est divergente si au moins une des séries est divergente, c.à.d. au moins une des $|r| \geq 1$, $|s| \geq 1$ se produit.

Exemple 2.20 *Calculons la somme de la série suivante comme suit*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 9\left(\frac{1}{3}\right)^n &= 9\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 9\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 9\frac{1}{\frac{2}{3}} = 9\frac{3}{2} = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 2.21 *Calculons la somme de la série suivante*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

C'est une série de la forme (6) avec $a = 1$ *et* $r = \dfrac{2}{5}$. *On utilise la formule (7) et on obtient*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2}{1-\frac{2}{5}} = \frac{4}{25}\frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{15}.$$

Exemple 2.22 *Considèrons la somme de la série suivante*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 5^{2n+1}}{4^n}$$

La série s'écrit comme suit.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-1} \cdot 3^n - 5^1 \cdot (5^2)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(3^{-1} \frac{3^n}{4^n} - 5 \frac{(25)^n}{4^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(3^{-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n - 5 \left(\frac{25}{4}\right)^n \right).$$

Donc, la série s'écrit comme somme de deux séries. La première est de facteur $r = \dfrac{3}{4}$ *avec* $|r| < 1$*, donc elle est convergente. La deuxième est de facteur* $s = \dfrac{25}{4}$ *avec* $|s| > 1$*, donc elle est divergente. La conclusion est que la série initialle est divergente.*

Exemple 2.23 *Soit* $x = 4.060606 \cdots$. *Écrivons ce nombre en forme rationnelle. Pour ceci on écrit comme suit*

$$\begin{aligned} x &= 4 + 0.06 + 0.0006 + 0.000006 + \cdots \\ &= 4 + \frac{6}{100} + \frac{6}{100^2} + \frac{6}{100^3} + \cdots \\ &= 4 + \frac{6}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots \right) \\ &= 4 + \frac{6}{100} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= 4 + \frac{6}{100} \frac{1}{\frac{99}{100}} = 4 + \frac{6}{99} = 4 + \frac{2}{33} \\ &= \frac{134}{33}. \end{aligned}$$

Exemple 2.24 *Une personne reçoit un salaire mensuel de \$3000, déposé dans son compte bancaire à la fin de chaque mois. Pour compler ces besoins, la personne dépense chaque mois %60 de tout son argent dans son compte au début du mois courant.*
i) On suppose que la balance de la personne était 3000*\$ au début du premier mois. Quelle est la balance dans son compte à la fin du mois* n*, juste après que son salaire est déposé?*
ii) Quelle est la balance dans son compte après une infinité de mois?
Solution. *Soit* n *le numéro du mois et* S_n *la balance á la fin du mois* n*. On a*

$$\begin{aligned} S_0 &= 3000, \\ S_1 &= 3000 + S_0(1 - 0.6) = 3000 + 3000 \cdot 0.4 = 3000 \cdot (1 + 0.4). \end{aligned}$$

En général on a

$$S_n = 3000 + S_{n-1} \cdot (1 - 0.6)$$

$$= \quad 3000 + S_{n-1} \cdot 0.4.$$

D'où

$$\begin{aligned}
S_n &= 3000 + S_{n-1} \cdot 0.4 = 3000 + (3000 + S_{n-2} \cdot 0.4) \cdot 0.4 \\
&= 3000 + 3000 \cdot 0.4 + S_{n-2} \cdot (0.4)^2 \\
&\cdots \\
&= 3000 + 3000 \cdot 0.4 + 3000 \cdot (0.4)^2 + \cdots + S_0 \cdot (0.4)^n \\
&= 3000 + 3000 \cdot 0.4 + 3000 \cdot (0.4)^2 + \cdots + 3000 \cdot (0.4)^n \\
&= 3000(1 + 0.4 + 0.4^2 + \cdots + (0.4)^n). \\
&= 3000\frac{1 - 0.4^{n+1}}{1 - 0.4} \\
&= 3000\frac{1 - (0.4)^{n+1}}{0.6}.
\end{aligned}$$

Pour $n = \infty$ *on obtient*

$$S \quad = \quad 3000\frac{1}{0.6} = 3000\frac{10}{6} = \frac{30000}{6}.$$

2.3.1.2 Séries de paiement Supposont qu'on fasse une série de dépôts dans un compte bancaire, avec un taux d'intérêt annuel r qui est composé n fois par an. Supposons aussi que chaque dépôt est effectué immédiatement après que l'intérêt soit composé. Alors, le solde \$C après le k-ème dépôt est donné par

$$C = \sum_{i=0}^{k-1} A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^i = A\frac{1 - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^k}{1 - \left(1 + \frac{r}{n}\right)}.$$

Une idée de la preuve de cette formule est comme suit. Soit k le numéro total des dépots. Le premier dépôt \$A est composé $k - 1$ fois et qui donne à la fin une valeur $A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{k-1}$ (selon (8)). Le second dépôt \$A est composé $k - 2$ fois et qui donne à la fin une valeur $A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{k-2}$. Ainsi de suite, le $k - 1$-ème dépot \$A est composé 1 fois et qui donne à la fin une valeur de $A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^1$ et finallement le dernier dépôt \$A est composé 0 fois et qui donne à la fin une valeur A. D'où

$$C \quad = \quad \sum_{i=0}^{k-1} A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^i.$$

En appliquant la formule de la progression géométrique (4) avec A au lieu de a et $\left(1 + \frac{r}{n}\right)$ au lieu de r on obtient la formule ci-dessus.

Exemple 2.25 *Un joueur de soccer a signé un contrat de durée de 5 années et une somme totale de \$50 million. Quelle série de paiement de dépots*[2] *devrait-on effectuer dans un compte en banque, si le taux d'intérêt est %4 et composé deux fois par an?*

Solution

Ici, $n = 2$*,* $r = 0.04$*,* $C = 50$ *(en million de dollars) et le nombre total des dépôt est* $k = 2 \cdot 5 + 1 = 11$*. Chaque dépôt* A *est effectué immédiatement après que l'intérèt est composé.*

On cherche A*. Selon la formule des séries de paiement on a*

$$\begin{aligned}
C &= A\frac{1-\left(1+\frac{r}{n}\right)^k}{1-\left(1+\frac{r}{n}\right)}, \quad \textit{d'où en remplaçant on obtient} \\
50 &= A\frac{1-\left(1+\frac{0.04}{2}\right)^{11}}{1-\left(1+\frac{0.04}{2}\right)}; \quad \textit{alors} \\
A &= 50\left(\frac{1-\left(1+\frac{0.04}{2}\right)^{11}}{1-\left(1+\frac{0.04}{2}\right)}\right)^{-1} = 50\left(\frac{1-(1.02)^{11}}{1-1.02}\right)^{-1} = 50\left(\frac{1-1.24337}{1-1.02}\right)^{-1} \\
&= 50\left(\frac{0.24337}{0.02}\right)^{-1} = 50 \cdot 0.08217 \\
&= 4.10889.
\end{aligned}$$

Comme on le voit, il suffit de déposer \$4.5682 million de dollars à chaque dépôt (pour un total de $10 \cdot 4.5682 = 45.682$ *million de dollars) afin qu'à la fin de 5 années, la valeur capitalisée soit \$50 million.*

2.3.1.3 Problèmes

Problème 2.3.1 *Trouvez la somme des séries géomètriques suivantes.*

a) $s \sum_{n=2}^{\infty} 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{3^{n+1}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n+3}}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 5^{n-1}}{4^n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{3^{2n-1}}$

g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{7^{n-1}}$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1} - 4^n}{9^{2n-1}}$

Problème 2.3.2 *Trouvez la représentation fractionnelle des nombres suivants.*

[2]donc, un dépot initial et les autres dépots chacun immédiatemment après la composition de l'intérêt

a) $0.999999\cdots$

b) ^{s} $0.444444\cdots$

c) ^{s} $1.646464\cdots$

d) $2.030303\cdots$

Problème 2.3.3^s *Une personne reçoit une salaire mensuel de \$2000, déposé dans son compte bancaire au début de chaque mois. Pour compler ces besoins, la personne dépense chaque mois %40 de tout son argent dans son compte au début du mois courant. On suppose que la balance du compte avant que le salaire soit déposé était* $0\$$*. Quelle est la balance dans son compte au début du mois* n*? Prendre* $n = 2,\ 6, 12,\ 24,\ +\infty$.

Problème 2.3.4 *Un patient reçoit une dose de* 30 *mg de médicament à la fin de chaque heure. Pendant chaque heure, l'organisme absorbe %70 de la quantité du médicament qui se trouvait dans le cors du patient à la fin de l'heure précédente. Trouvez la quantité du médicament qui se trouve dans le corps du patient à la fin de* n *heures. Prenez* $n = 2$*,* $n = 5$*,* $n = 10$*,* $n = +\infty$.

Problème 2.3.5 *Un joueur de soccer a signé un contrat d'une valeur totale de \$500 million, pour une durée de 10 années. Quelle série de paiement de dépots devrait-on effectuer dans un compte en banque, si le taux d'intérêt est %8 et composé 4 fois par an?*

Problème 2.3.6 *Une entreprise de construction a signé un contrat avec l'état pour la modérnisation des chemins de fers pour une valeur totale de \$20 billion. L'entreprise et l'état se sont mis d'accord que la somme sera délivrée à la fin des traveaux, soit après* 4 *années. Quelle série de paiement de dépots devrait l'état effectuer dans un compte en banque, si le taux d'intérêt est %6 et composé trois fois par an?*

2.3.2 Composition de l'intérêt et nombre e

Le nombre "exponentiel" e se rencontre souvent dans la littérature scientifique. Ce nombre exceptionnel n'est pas un produit de notre imagination mais plutôt un represantant de certain processus de la vie réelle comme on va le voir plus bas.

2.3.2.1 Composition de l'intérêt

1. Une somme initiale d'argent A qu'on dépose dans un compte bancaire est applée "valeur actualisée". C'est un placement (initial).

2. Le taût d'intérêt (annuel) d'un placement A dans un compte bancaire est le nombre r tel que la somme rA sera l'intérêt que la banque va ajouter dans le compte à la fin d'année.

   Généralement, l'intérêt sera payé n fois par an, tout dépend du contrat signé avec la banque. Dans ce cas l'intérêt payé à chaque période (égale à $1/n$-ème de l'année) sera $\frac{r}{n}A$, où A est la balance du compte au début de la période en question.

3. Quand l'intérêt n'est pas retiré du compte, mais il est laissé dans le compte avec le même taûx d'intérêt, on dit que l'intérêt est composé. C'est la "composition discrète".

4. La balance du compte à un moment quelconque t s'appelle "valeur capitalisée au temps t" et est notée par $C(t)$.

   Pour un compte d'une valeur actualisée A, placée avec un intérêt anuel r, qui est composé n fois par an, la valeur capitalisée après t années sera

$$C(t) = A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{8}$$

   La formule s'obtient comme suit. Pendant t années l'intérêt va se composer nt fois, et à chaque fois l'intérêt sera $\frac{r}{n}$. Alors on obtient:

numéro de la composition	la balance aprés la composition de l'intérêt
0	$(A + \frac{r}{n})^0 = A$
1	$A + \frac{r}{n}A = A(1 + \frac{r}{n})^1$
2	$A(1 + \frac{r}{n}) + \frac{r}{n}A(1 + \frac{r}{n}) = A(1 + \frac{r}{n})^2$
3	$A(1 + \frac{r}{n})^2 + \frac{r}{n}A(1 + \frac{r}{n})^2 = A(1 + \frac{r}{n})^3$
...	...
nt	$A(1 + \frac{r}{n})^{nt-1} + \frac{r}{n}A(1 + \frac{r}{n})^{nt-1} = A(1 + \frac{r}{n})^{nt}$

2.3.2.2 Nombre e Par définition, le nombre e (e for Euler), est la limite de la valeur capitalisée au temps $t = 1$ d'une valeur actualisée de $A = \$1$, d'intérêt annuel $r = 1$ (ou $r = \%100$), quand le nombre des compositions n tend vers l'infini, c.à.d.,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Le nombre e est un nombre irrationnel. Il apparaît naturellement dans plusieres phénomènes dans la nature. Il est égal à

$$2.718281828459045235360287471352 7\cdots.$$

2.3.2.3 Composition continue de l'intérêt Par définition, on dit que l'intérêt est composé continûment si le nombre des compositions tend vers l'infini. La balance du compte au temps t dans ce cas est donée par

$$C(t) = A\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Que vaut cette limite? En utilisant la regle $a^{bc} = (a^b)^c$ on obtient

$$C(t) \;=\; A\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}}_{\to e}\right)^{rt} \quad ; \quad \textit{d'où}$$

$$C(t) \quad = \quad A \cdot e^{rt}. \tag{9}$$

2.3.3 Fonctions exponentielle et logarithmique. Propriétés élémentaires

2.3.3.1 La fonction exponentielle e^t

1. Par définition, la fonction exponentielle, notée e^t, est la limite de la valeur capitalisée au temps t d'une valeur actualisée de \$1, d'intérêt annuel $\%100$ (ou d'intérèt annuel 1), quand le nombre des compositions tend vers l'infini, c.à.d.,

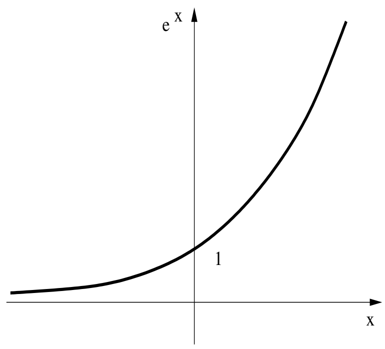
$$e^t = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\cdot t}; \ ou\ bien\ \ e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\cdot x}.$$

La définition fait bien de sense parce que

$$\lim_{n\to\infty} 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\cdot t} = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to e}\right)^{t} = e^t.$$

2. Quelques propriétés simples de e^x sont comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(e^x) &= \mathbb{R}, \\
\mathrm{Im}(e^x) &= (0, \infty), \\
e^0 &= 1, \\
e^x \ &\textit{est croîssante}, \\
e^{x+y} &= e^x e^y, \\
e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y}, \\
e^{-y} &= \frac{1}{e^y}, \\
e^{kx} = (e^x)^k &= (e^k)^x.
\end{aligned}$$



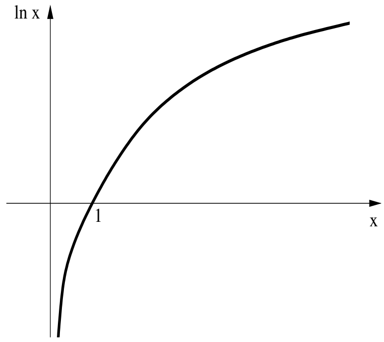
2.3.3.2 La fonction logarithmique $\ln x$

1. La fonction logarithmique (népérienne, ou naturelle) notée $\ln x$, est l'inverse de e^x. Donc,

$$\ln e^x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad e^{\ln x} = x, \ \forall x > 0.$$

Quelques propriétés simples de $\ln x$ sont:

$$\begin{aligned} \mathbf{Dom}(\ln x) &= (0, \infty), \\ \mathbf{Im}(\ln x) &= \mathbb{R}, \\ \ln 1 &= 0, \\ \ln(xy) &= \ln x + \ln y, \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln x - \ln y, \\ \ln\left(\frac{1}{y}\right) &= -\ln y, \\ \ln(x^k) &= k \ln x. \end{aligned}$$



Remarque 2.13 *Dans ce cours on se contentera avec les fonctions e^x et $\ln x$. A noter qu'il existe des fonction exponenetielles et logarithmique de base b, définies comme suit.*

1. *Étant donné $0 < b \neq 1$, on peut considérer b^x, la fonction exponentielle de base b, et sa fonction inverse $\log_b x$. Les proprietés de b^x, resp. $\log_b x$, sont très similaires à celles de e^x, resp $\ln x$.*

2. *Notons que de plus on a*

$$b^x = e^{x \ln b}, \qquad \log_b x = \frac{1}{\ln b} \ln x.$$

Ces deux formules permettent d'écrire b^x et $\log_b x$ comme e^{kx} et $k \ln x$, avec $k = \ln b$, ce qui justifie à se limiter à l'étude de e^x et $\ln x$ seulement.

Exemple 2.26 *Resoudre les équations suivantes.*

- $3 \cdot 7^x = 6$*:*

$$\begin{aligned} 7^x &= \frac{6}{3} = 2, \\ \ln(7^x) &= \ln(2), \\ x \ln(7) &= \ln(2), \\ x &= \frac{\ln 2}{\ln 7}. \end{aligned}$$

- $4 \cdot (1.03)^{7x} = 3$*:*

$$\begin{aligned} (1.03)^{7x} &= \frac{3}{4}, \\ \ln((1.03)^{7x}) &= \ln\left(\frac{3}{4}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7x\ln((1.03) &= \ln\left(\frac{3}{4}\right), \\
x &= \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{7\ln(1.03)}.
\end{aligned}$$

- $2^{1-x} = 3^{2x}$:

$$\begin{aligned}
\ln(2^{1-x}) &= \ln(3^{2x}) \\
(1-x)\ln(2) &= 2x\ln(3) \\
\ln 2 &= 2x\ln 3 + x\ln 2, \\
2x\ln 3 + x\ln 2 &= \ln 2, \\
x(2\ln 3 + \ln 2) &= \ln 2, \\
x &= \frac{\ln 2}{2\ln 3 + \ln 2} \\
&= \frac{\ln 2}{\ln(3^2) + \ln 2} \\
&= \frac{\ln 2}{\ln(3^2 \cdot 2)} \\
&= \frac{\ln 2}{\ln(18)}.
\end{aligned}$$

- $\ln(x-1) - \ln 15 + \ln(x+1) = 0$.

  À noter ici qu'on doit avoir $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $x > 1$ (afin que les logarithmes soient bien définis).

$$\begin{aligned}
\ln(x-1) + \ln(x+1) &= \ln 15, \\
\ln((x-1)(x+1)) &= \ln 15, \\
e^{\ln((x-1)(x+1))} &= e^{\ln 15}, \\
(x-1)(x+1) &= 15, \\
x^2 - 1 &= 15, \\
x^2 &= 16, \\
x &= \pm 4.
\end{aligned}$$

  Puisque on doit avoir $x > 1$, la solution est seulement $x = 4$.

Exemple 2.27 *La somme \$1000 est placée dans un compte bancaire avec un intérêt annuel 6%.*

a) On suppose que l'intérêt est composé trois fois par an. On va trouver:

  i) La balance du compte après t années.

ii) Le temps nécessaire pour que le placement initial se double.

b) On suppose que l'intérêt est composé continûment. On va trouver:

i) La balance du compte après t années.

ii) Le temps nécessaire pour que le placement initial se double.

Solution.
a.i) Selon la formule (8) avec $A = 1000$, $r = 0.06$ et $n = 3$ on a

$$C(t) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0.06}{3}\right)^{3t} = 1000 \cdot (1.02)^{3t}.$$

a.ii) On cherche le temps t tel que $C(t) = 2A$. Donc,

$$\begin{aligned} 1000 \cdot (1.02)^{3t} &= 2 \cdot 1000, \\ (1.02)^{3t} &= 2. \end{aligned}$$

Comment resoudre cette équation?
On utilise une propriété de la fonction logarithmique (naturelle)

$$\ln(b^x) = x \ln b.$$

Donc en obtenant le $\ln$ *des deux côtés de la dernière équation on obtient*

$$\begin{aligned} \ln(1.02)^{3t} &= \ln 2, \\ 3t \ln(1.02) &= \ln 2, \\ x &= \frac{\ln 2}{3 \ln 1.02} \\ &\approx 11.6676. \end{aligned}$$

b.i) Selon la formule (9) avec $A = 1000$, $r = 0.06$ et $n = \infty$ on a

$$C(t) = 1000 \cdot e^{0.06t}.$$

b.ii) On cherche le temps t tel que $C(t) = 2A$. Donc,

$$\begin{aligned} 1000 \cdot e^{0.06t} &= 2 \cdot 1000, \\ e^{0.06t} &= 2, \\ \ln e^{0.06t} &= \ln 2, \\ 0.06t &= \ln 2, \\ t &= \frac{\ln 2}{0.06} \\ &\approx 11.5525. \end{aligned}$$

On voit qu'un intérêt qui se compose continûment double le placement initial plus vite.

Exemple 2.28 *Une valeur actualisée $\$A$ est placée avec un intérêt annuel r qui est composé n fois par an, pendant t années. Soit $C = C(t)$ le solde après t années.*

a) On prend $A = 1$, $r = 0.03$ et $t = 10$.

i) On calcule $C(t)$ pour $n = 1, 2, 4, 8, 16, \infty$.

ii) Qu'on en déduit pour C avec n qui augmente tout en prenant A, r et t fixés? Est-il mieux pour le client que n soit grand ou petit?

b) On prend $n = 1, 2, 4, 8, 16, \infty$ et on trouve le temps pour que la valeur initialle A se double.

Solution.
a.i) On substitue dans $C(t) = A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ pour $n = 1, 2, 4, 8, 16$ et dans $C(t) = Ae^{rt}$ pour $n = \infty$. Pour les valeurs donn'ees de n on obtient

$$
\begin{aligned}
n = 1: &\quad C(10) = 1\left(1 + \frac{0.03}{1}\right)^{1\cdot 10} = 1\,(1.03000)^{10} = 1.3439\\
n = 2: &\quad C(10) = 1\left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^{2\cdot 10} = 1\,(1.01500)^{20} = 1.3468\\
n = 4: &\quad C(10) = 1\left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{4\cdot 10} = 1\,(1.00750)^{40} = 1.3483\\
n = 8: &\quad C(10) = 1\left(1 + \frac{0.03}{8}\right)^{8\cdot 10} = 1\,(1.00375)^{80} = 1.3491\\
n = 16: &\quad C(10) = 1\left(1 + \frac{0.03}{16}\right)^{16\cdot 10} = 1\,(1.0018)^{16} = 1.3494\\
n = \infty: &\quad C(10) = Ae^{r\cdot 10} = 1e^{0.03\cdot 10} = 1.3498
\end{aligned}
$$

a.ii) On remarque donc que si tous les paramètres sont fixés, sauf n, la valeur capitalisée croît avec n qui augmente. Donc, un client doit préférer n grand.
b) Pour $n = 1, 2, 4, 8, 16$ on cherche t tel quel $C(t) = A \cdot \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt} = 2A$, avec $r = 0.03$. Donc

$$
\begin{aligned}
A \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} &= 2A,\\
\left(1 + \frac{0.03}{n}\right)^{nt} &= 2,\\
\ln\left(1 + \frac{0.03}{n}\right)^{nt} &= \ln 2,\\
nt \ln\left(1 + \frac{0.03}{n}\right) &= \ln 2,\\
t &= \frac{\ln 2}{n \ln(1 + 0.03/n)}.
\end{aligned}
$$

Pour $n = 1, 2, 4, 8, 16$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
n = 1: \quad & 1 \cdot (1.03)^{1 \cdot t} = 2 \cdot 1, \\
& (1.03)^t = 2, \\
& t = \frac{\ln 2}{\ln 1.03} \approx 23.4498, \\
n = 2: \quad & 1 \cdot (1.015)^{1 \cdot t} = 2 \cdot 1, \\
& (1.015)^t = 2, \\
& t = \frac{\ln 2}{\ln 1.015} \approx 23.2775, \\
n = 4: \quad & 1 \cdot (1.0075)^{1 \cdot t} = 2 \cdot 1, \\
& (1.0075)^t = 2, \\
& t = \frac{\ln 2}{\ln 1.0075} \approx 23.1914 \\
n = 8: \quad & 1 \cdot (1.00375)^{1 \cdot t} = 2 \cdot 1, \\
& (1.00375)^t = 2, \\
& t = \frac{\ln 2}{\ln 1.00375} \approx 23.1482, \\
n = 16: \quad & 1 \cdot (1.0019)^{1 \cdot t} = 2 \cdot 1, \\
& (1.0019)^t = 2, \\
& t = \frac{\ln 2}{\ln 1.0019} \approx 23.1266.
\end{aligned}$$

Dans le cas de la composition continue, on cherche t *tel quel* $C(t) = Ae^{rt} = 2A$ *avec* $r = 0.03$. *En remplaçant on obtient*

$$\begin{aligned}
1 \cdot e^{0.03t} &= 2 \cdot 1, \\
t &= \frac{\ln 2}{0.03} \\
&\approx 23.1049.
\end{aligned}$$

On remarque que le temps pour que A *se double est plus court si* n *est grand. Il est encore plus court si la composition est continue.*

Exemple 2.29 *Une valeur actualisée* $\$A$ *est placée avec un intérêt annuel* $r = 0.12$ *qui est composé* n *fois par an, pendant* t *annés. Soit* $C = C(t)$ *le solde après* t *années. i) Trouvons-nous* A *pour que* $C(10) = 10,000$*, aux cas* $n = 1, 6, 12, \infty$.
ii) Que déduisons-nous des résultats?

Solution

a) Au cas de $n = 1, 6, 12$ *on a* $C(t) = A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. *On cherche* A *pour que* $C(10) = 10,000$*, donc*

$$A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{10n} = 10,000,$$

$$A = \frac{10,000}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}.$$

En remplaçant on obtient

$$n=1, \quad A = \frac{10,000}{\left(1+\frac{0.12}{1}\right)^{10\cdot 1}} = 3219.73,$$
$$n=6, \quad A = \frac{10,000}{\left(1+\frac{0.12}{6}\right)^{10\cdot 6}} = 3047.82,$$
$$n=12, \quad A = \frac{10,000}{\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{10\cdot 12}} = 3029.94.$$

Pour $n=\infty$ on a $C(t)=Ae^{rt}$. On cherche A tel que $C(10)=10,000$, donc

$$Ae^{0.12\cdot 10} = 10,000, \quad \textit{d'où}$$
$$n=\infty, \quad A = \frac{10,000}{e^{0.12\cdot 10}}$$

b) On voit que plus n est grand, plut petit est A qui permet d'avoir une balance de \$10,000 après 10 années.

2.3.3.3 Problèmes

Problème 2.3.7 *Resoudre les équations*

a) $^s\ 2^x = 8$

b) $^s\ 3^{x-2} = 7^{-2x+1}$

c) $2^{3x-1} = 1$

d) $3^{1-7x} = \frac{1}{9}$

e) $2^{1-x} = 3^{2x}$

f) $^s\ 2\ln x + \ln 7 = \ln 3 + \ln(2x)$

g) $2\ln 3 - \ln x = 2$

h) $^s\ \ln(x-3) + \ln x - 2\ln 2 = 0$

Problème 2.3.8 *Une valeur actualisée $\$A$ est placée avec un intérêt annuel r qui est composé n fois par an, pendant t annés. Soit $C=C(t)$ le solde après t années. Répondez aux questions suivantes.*
i) Prenez $A=10$, $r=0.08$, $t=5$ et calculez $C(t)$ pour $n=1,2,4,8,16,\infty$.
ii) Qu'en déduisez-vous pour $C(t)$ avec n qui augmente? Prenant A, r et t fixés, est-il mieux pour le client que n soit grand ou petit?

Problème 2.3.9 *Une valeur actualisée $\$A$ est placée avec un intérêt annuel r, qui est composé n fois par an, pendant t annés. Soit $C=C(t)$ le solde après t années. Répondez aux questions suivantes.*
i) Prenez $A=100$, $r=0.04$, $t=10$, et calculez $C(t)$ pour $n=1,6,12,\infty$.
ii) Qu'en déduisez-vous pour $C(t)$ avec n qui augmente? Prenant A, r et t fixés, est-il mieux pour le client que n soit grand ou petit?

Problème 2.3.10 ^{s} *Une valeur actualisée* $\$A$ *est placée avec un intérêt annuel* $r = 0.04$ *qui est composé* n *fois par an, pendant* t *annés. Soit* $C = C(t)$ *le solde après* t *années. Répondez aux questions suivantes.*
i) Trouvez le temps t *tel que* $C(t) = 3A$*, aux cas* $n = 1, 6, 12, \infty$.
ii) Trouvez A *pour que* $C(10) = 2000$*, aux cas* $n = 1, 6, 12, \infty$.
iii) Que déduisez vous de vos résultats quand n *augmente?*

Problème 2.3.11 *Une valeur actualisée* $\$A$ *est placée avec un intérêt annuel* $r = 0.06$ *qui est composé* n *fois par an, pendant* t *annés. Soit* $C = C(t)$ *le solde après* t *années. Répondez aux questions suivantes.*
i) Trouvez le temps t *tel que* $C(t) = 4A$*, aux cas* $n = 1, 6, 12, \infty$.
ii) Trouvez A *pour que* $C(20) = 500$*, aux cas* $n = 1, 6, 12, \infty$.
iii) Que déduisez vous de vos résultats quand n *augmente?*

Problème 2.3.12 ^{s} *Dans chaque organisme vivant, le raport entre isotopes de carbon radioactive et le nombre total des atomes est* $A = 1/(10^{12})$*. Quand l'organisme meurt, ce rapport commence à diminuer suivant la loi*

$$R(t) = Ae^{-rt},$$

où r *le taux de reduction,* t *le temps et* $R(t)$ *est la valeur du raport après* t *années.*
i) Sâchant que le temps de demi-vie est de 5715 *(c'est le temps nécessaire pour que le raport initial devient à sa moitié, c.à.d.* $R(t) = \frac{1}{2}A$*), trouvez* r *et donnez la formule complète pour* $C(t)$.
ii) Trouvez la valeur du raport après $100\,000$ *années.*
iii) Si on sait que $R = 1/(10^{15})$*, avant combien d'années l'organisme est mort?*

Problème 2.3.13 *Calculez la valeur capitalisée* $\$C$ *d'un placement initial de* $\$A$*, dont l'intérêt est composé* n *fois par un, à un taux annuel* r *pendant* t *années, comme suit:*

a) $A = 100, \quad n = 2, \quad r = 0.05, \quad t = 10$

b) ^{s} $A = 100, \quad n = 4, \quad r = 0.05, \quad t = 10$

c) $A = 200, \quad n = 2, \quad r = 0.08, \quad t = 5$

d) $A = 200, \quad n = 4, \quad r = 0.08, \quad t = 5$

Problème 2.3.14 *Calculez la valeur actualisée* $\$A$ *d'un solde final* $\$C$*, si l'intérêt est composé* n *fois par an, à un taux annuel* r *pendant* t *annés, comme suit:*

a) $C = 500, \quad n = 2, \quad r = 0.05, \quad t = 10$

b) $C = 500, \quad n = 4, \quad r = 0.05, \quad t = 10$

c) ^{s} $C = 100, \quad n = 2, \quad r = 0.08, \quad t = 10$

d) $C = 100, \quad n = 4, \quad r = 0.08, \quad t = 10$

Problème 2.3.15 *Une valeur actualisée* $\$A$ *est placée avec un intérêt qui est composé* n *fois par an, à taux annuel* r*, pendant* t *annés. Soit* $C = C(t)$ *le solde après* t *années. Quand le solde se doublera, c.à.d. pour quel temps* t *on a* $C(t) = 2A$*?*

a) $n = 2, \quad r = 0.054$

b) ^{s} $n = 4, \quad r = 0.05$

c) $n = 8, \quad r = 0.05$

d) $n = 16, \quad r = 0.05$

Problème 2.3.16 *Une valeur actualisée* $\$A$ *est placée avec un intérêt qui est composé* n *fois par an, à taux annuel* r*, pendant* t *annés. Soit* $C = C(t)$ *le solde après* t *années. Pour quelle valeur actualisée* A *on aura* $C(10) = 10000$*?*

a) $n = 5, \quad r = 0.02$

b) $n = 10, \quad r = 0.02$

c) $n = 15, \quad r = 0.02$

d) ^{s} $n = 20, \quad r = 0.02$

3 Calcul différentiel. Applications

Le calcul différentiel a été inventé indépendemment par Leibnitz and Newton au 17ième siècle. Eseentiellement il décrit le comportement infinitessimal d'une qunatité, et ainsi est à la base de toutes les mathématiques.

À la fin de ce chapitre, l'étudiant

✓ devrait maîtriser la notion de la dérivée et l'appliquer à calculer la dérivée de fonctions quelconques,

✓ apprendra à appliquer les outils de la dérivée dans des problèmes de la vie réelle tels qu'en finance et à l'optimisation.

3.1 La dérivée

3.1.1 Motivation

Supposons que la balance dans un compte bancaire au temps t est $C(t)$, et varie dua à un intérêt annuel variable $r(t)$ qui est composé continûment. Peut-on trouver *à quelle taûx l'intérêt change*? La reponse est oui. En effet, soit t un temps quelconque et $h > 0$ un intervalle de temps. Alors, $C(t+h) - C(t)$ donne l'argent qui est rentré dans le compte pendant l'intervalle $[t, t+h]$. Si on suppose que pendant l'intervalle $[t, t+h]$ l'intérêt est constant et égal à $\tilde{r}(t)$, ce qui est une bonne approximation, alors on a

$$C(t+h) - C(t) = \underbrace{C(t)}_{\text{l'argent au début de l'intervalle } [t,t+h]} \cdot \underbrace{\tilde{r}(t)h}_{\text{le divident de l'intêrèt moyen pendant l'intervalle } [t,t+h]}.$$

D'où

$$\tilde{r}(t) = \frac{1}{C(t)} \frac{C(t+h) - C(t)}{h}, \quad \text{et} \quad \tilde{r}(t) = \frac{1}{C(t)} \frac{C(t+h) - C(t)}{h}.$$

Alors l'intérêt instantanné $r(t)$ est donné en prenant la limite quand h tend vers zéro

$$r(t) = \frac{1}{C(t)} \lim_{h \to 0} \frac{C(t+h) - C(t)}{h}.$$

Des situations similaires apparaîssent dans bien d'autres domaine. Ainsi, en mécanique, soit $d(t)$ la distance parcourue par un point en fonction du temps. On se demande quelle serait *la vitesse du déplacement du point au temps particulier t.*

On pourrait d'abord trouver une vitesse moyenne $\tilde{v}(t)$ dans l'intervalle $[t, t+h]$, $h > 0$, qui est donnée par

$$\tilde{v}(t) = \frac{d(t+h) - d(t)}{h}.$$

Intuitivement, il est clair que plus h est petit, plus $\tilde{v}(t)$ nous donne une valeur exacte de la vitesse au temps t. D'où l'idée de considérer la limite de $\tilde{v}(t)$ quand h tend vers 0:

$$v(t) := \lim_{h\to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h}.$$

On arrive à une conclusion similaire si on s'interésse á *la droite tangente au graphe de la fonction* f *au point* (x_0, y_0). En effet, on pourrait considérer d'abord, comme une approximation, l'équation de la droite sécante passante par les points $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ et $(x_1, y_1) = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ du graphe de f, voir Fig. 9. La pente et l'équation de cette droite sécante sont

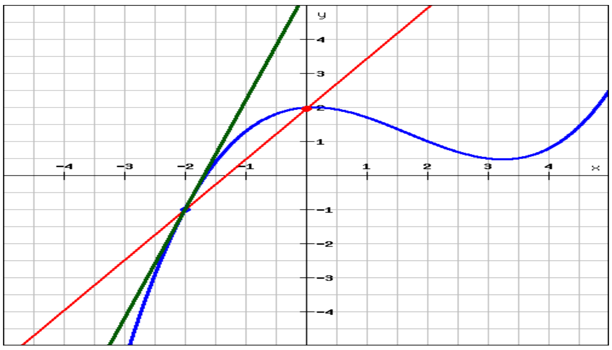


Figure 9: Le graphe de la fonction f (rouge), la droite sécante (blue) et la droite tangent (verte)

$$\tilde{m}(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad y = \tilde{m}(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Alors, l'intuition nous pousse à considérer comme pente de la droite tangente au graphe de f au point $x_0, y_0)$ la quantité $m(x_0)$ donnée

$$m(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Remarque 3.1 *Ce qui est commun dans tous ces problèmes est que d'abord on considère le taûx de changement dans l'intervalle* $(x, x+h)$ *de la fonction* f*, noté*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

et ensuite on prend son limite quand h tend vers 0

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ceci est équivalent de considérer la limite de taux de changement de f

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

3.1.2 Quelques définitions et résultats élémentaires

Définition 3.2 *Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle, $f: I\mapsto\mathbb{R}$ et $x\in I$ avec $Dom(f)=I$. On dit que f est dérivable (ou différentiable) à x si la limite suivante existe*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{10}$$

Dans ce cas on note la limite par $f'(x)$, ou $\dfrac{df(x)}{dx}$, et on l'appelle "dérivee de f à x" et, de plus, on dit "f est dérivable (différentiable) à x“. Si la limite n'existe pas on dit "f n'est pas dérivable (différentiable) à x“.

Nous pouvons également examiner la dérivée d'une fonction dans son ensemble de définition I. Si f est dérivable en tout point $x\in I$, on dit "f est dérivable (différentiable) dans I“.

Si f' est une fonction dérivable dans I, c.à.d. que f' admet une dérivée en chaque point de I, alors on dit que f est deux fois dérivable dans I, et on note $f''(x)$ la dérivée de f', qui est donc

$$f''(x)=(f'(x)'); \quad \textit{ou} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx}=f''(x).$$

De façon similaire on définit la dérivée troisième $f'''(x)$, quatrième $f^{(iv)}(x)$, ..., dérivée n-ème $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$. Ces dérivées sont souvent appellées “dérivées d'ordre supérieur”.

Pourquoi on considère les dérivées d'ordre supérieures? La réponse sera donnée plus tard quand on verra des problèmes d'optimisation.

Exemple 3.1 *Soit $f(x)=kx+b$. Calculons sa dérivée en utilisant la définition. On a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(k(x+h)+b)-(kx+b)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{kh}{h}=\lim_{h\to 0}k\\
&= k.
\end{aligned}$$

Il en suit que

$$(ax+b)'=a, \tag{11}$$

qui en particulier donne

$$x'=1, \quad b'=0.$$

Exemple 3.2 *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Calculons sa dérivée en utilisant la définition:*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((a(x+h)^2 + b(x+h) + c) - (ax^2 + bx + c)) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c) - (ax^2 + bx + c)) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(2axh + ah^2 + bh) \\
&= \lim_{h\to 0}(2ax + ah + b) \\
&= 2ax + b.
\end{aligned}$$

Il en suit que

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b, \tag{12}$$

qui en particulier donne

$$(x^2)' = 2x.$$

Exemple 3.3 *Soit $f(x) = \dfrac{1}{11 - x}$. Calculons $f'(x)$, $x \neq 11$:*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{11-(x+h)} - \frac{1}{11-x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(11-x) - (11-(x+h))}{(11-(x+h))(11-x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{(11-(x+h))(11-x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(11-(x+h))(11-x)} \\
&= \frac{1}{(11-x)^2}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.4 *Il y a-t-il des fonctions qui n'ont pas de dérivée à un certain point x? Oui, et pour voir ceci considerons $f(x) = |x|$. Alors $f'(0)$ n'existe pas. Intuitivement, ceci on le voit du fait que le graphe de f n'as pas une seule pente à $x = 0$. Plus précisemment on considère la limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ et on montre qu'elle n'existe pas. Puisque la fonction $f(x)$ est donnée par deux lois différentes on considère les limites à côté:*

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} \qquad (\textit{parce que } f(x) = -x \textit{ pour } x < 0$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1, \\
\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} \qquad \textit{(parce que } f(x) = x \textit{ pour } x \geq 0 \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1.
\end{aligned}
$$

Les deux limites étant differentes montre que la limite n'existe pas, donc $f'(0)$ n'existe pas.

Exemple 3.5 *Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt{9-x}$ pour $x < 9$. On a*

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt{9-(x+h)} - \sqrt{9-x}\right) \qquad \textit{[on multiplie par le conjugué]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt{9-(x+h)} - \sqrt{9-x}\right) \frac{\sqrt{9-(x+h)} + \sqrt{9-x}}{\sqrt{9-(x+h)} + \sqrt{9-x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{9-(x+h)-(9-x)}{\sqrt{9-(x+h)} + \sqrt{9-x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{\sqrt{9-(x+h)} + \sqrt{9-x}} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{9-(x+h)} + \sqrt{9-x}} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{9-x}}.
\end{aligned}
$$

3.1.3 Dérivée et continuité

Dérivée du fonction est une notion plus forte que la continuité. Au fait on a que si f est dérivable à x alors f est continue à x. En effet:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x)) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x)\cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Donc, $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, ce qui signifie f est continue à x.
Le contraire n'est pas vrai, en général. Par example, si $f(x) = |x|$, alors f est continue à 0, mais f n'est pas dérivable à 0.

Exemple 3.6 *Considérons $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x < 1, \\ \sqrt{x}, & x \geq 1. \end{cases}$ Est-ce-que $f'(1)$ existe?*

Notons d'abord qu'on peut facilement vérifier que f est continue dans $\mathbb{R}$. Pour $f'(1)$, on doit considérer la limite (10). Du fait que f est donnée par deux lois différentes à côté de $x = 1$, on considères les limites à côté comme suit"

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}(f(1+h) - f(1)) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}((3(1+h) - 2) - 1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}(3h) \\
&= 3, \\
\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(f(1+h) - f(1)) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(\sqrt{1+h} - 1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{(\sqrt{1+h}+1)} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\frac{1+h-1}{(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0+}(\sqrt{1+h}+1) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Les deux limites n'étant pas égales montre que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(1+h) - f(1))$ n'existe pas, donc $f'(1)$ n'existe pas.

Exemple 3.7 *Considérons $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1, \\ x^2+2, & x \geq 1. \end{cases}$ Est-ce-que $f'(1)$ existe?*

D'abord, on note que f est continue dans $\mathbb{R}$. Quand à la dérivé $f'(1)$, en utilisant les regles (11) et (12) on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0-} \frac{1}{h}(f(1+h) - f(1)) &= (2x+1)'|_{x=1} = 2, \\
\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(f(1+h) - f(1)) &= (x^2+2)'|_{x=1} = 2.
\end{aligned}$$

Les deux limites étant égales, montre que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(1+h) - f(1)) = 2$. Donc $f'(1) = 2$.

3.1.4 Une première application: équation de la droite tangente

Soit $y = f(x)$ une fonction donnée dans un intervalle I. On se demande quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f au point$(x_0, f(x_0))$, sâchant que $f'(x_0)$ existe.

On a vu que la pente de la droite tangente au $(x_0, f(x_0))$ est $f'(x_0)$. Alors, l'équation de la droite tangente au $(x_0, f(x_0))$, voir Fig. 10 est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \textit{ou} \quad y = \underbrace{f'(x_0)}_{=k} x + \underbrace{(f(x_0) - x_0 f'(x_0))}_{=b}. \tag{13}$$

Exemple 3.8 *Soit $f(x) = x^2 - x + 1$. Trouvons l'équation de la droite tangente au graphe de f au point $(1, f(1))$.*

Notons que $f(1) = 1$. Donc le point $(1, 1)$ appartient au graphe de f. Ensuite, d'après la regle (12) on a $f'(1)$:

$$f'(x) = 2x - 1, \quad \textit{d'où}$$

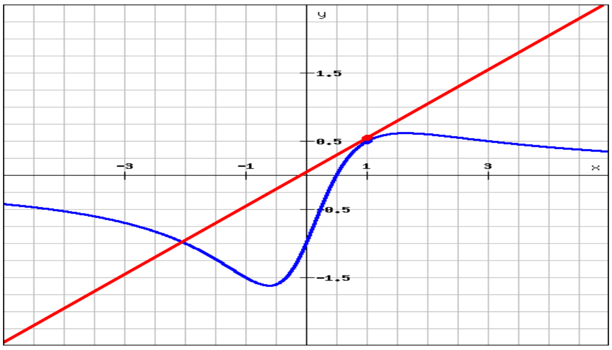


Figure 10: Le graphe de la fonction $f(x)$ et la droite tangente au $(x_0, f(x_0))$

$$f'(1) \quad = \quad 1.$$

Alors, l'équation de la droite tangente est

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1 \cdot (x-1) + 1 = x.$$

3.1.5 Règles de dérivation

La dérivation est une opération très commune dans le calcul différentiel. Au lieu d'utiliser la définition formelle de la dérivée, nous avons plusieurs règles que nous pouvons les utiliser pour trouver la dérivée plus rapidement.

Régle de la combinaison linéaire. C'est une règle qu'on l'utilise très souvent. Elle dit que chaque combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable, c.à.d. si f et g sont deux fonctions dérivables dans l'intervalle I, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x). \tag{14}$$

Règle de la puissance, et de la puissance généralisé. Pour tout $n \in \mathbb{R}$, ou tout f dérivable, on a

$$(x^n)' \quad = \quad nx^{n-1}, \tag{15}$$

$$(f(x)^n)' \quad = \quad nf(x)^{n-1}f'(x). \tag{16}$$

En particulier on a

$$(1)' = (x^0)' = 0, \quad x' = 1, \quad (x^2)' = 2x.$$

Exemple 3.9 *Calculons les dérivées de* $f(x) = x^4$, $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ *et* $h(x) = 5x^{-3}$. *En utilsant la règle (15) on obtient:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3, \\ g'(x) &= (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}, \\ h'(x) &= (x^{-3})' = (x^{-3})' = (-3x^{-3-1}) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}. \end{aligned}$$

Exemple 3.10 *Soit* $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 100$ *et calculons* $f'(x)$. *D'abord on reécrit* $f(x)$ *en forme de puissances*

$$f(x) = x^2 - 2x^{1/2} + 3x^{-1/2} - 100.$$

En appliquant les règles (14) et (15) on obtient

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2)' - 2(x^{1/2})' + 3(x^{-1/2})' - (100)' \\
&= 2x - 2\frac{1}{2}x^{1/2-1} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1/2-1} - 0 \\
&= 2x - x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{-3/2} \\
&= 2x - \frac{1}{x^{1/2}} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.11 *Soit* $f(x) = 13$. *Selon règle (15) on a* $f'(x) = 0$. *Pour comprendre pourquoi, pensez au graphe de cette fonction. Le graphe de* $f(x)$ *est une ligne horizontale, donc sa pente est égale à zéro, d'où* $f(x) = 0$.

Exemple 3.12 *Prouvons la règle (15) pour la fonction* $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, *en utilisant la définition de la dérivée. En effet, on a*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}((x+h)^n - x^n) \qquad \textit{[utilisons la formule du binôme]} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(x^n + nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n) \\
&= nx^n,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (15).

Règle de l'exponentiel et de l'éxponentiel généralisé. Les fonctions e^x et e^{-x} sont dérivables et

$$(e^x)' = e^x, \quad (e^{-x})' = -e^{-x}, \tag{17}$$

$$(e^{g(x)})' = e^{g(x)}g'(x) \quad \text{pour tout } g \text{ dérivable.} \tag{18}$$

En particulier, $(e^{cx})' = ce^{cx}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Règle du logarithme et du logarithme géneralisé. La fonction $\ln|x|$ est dérivable

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \tag{19}$$

$$(\ln|g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \text{pour tout } g \text{ dérivable, } g(x) \neq 0. \tag{20}$$

Exemple 3.13 *Trouvez la dérivée de* $f(x) = x^{-\frac{3}{5}} - 2x^3 + 5\ln|x| + 7$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^{-\frac{3}{5}} - 2x^3 + 5\ln|x| + 7)' \\ &= (x^{-\frac{3}{5}})' - 2(x^3)' + 5(\ln|x|)' + (7)' \\ &= -\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}-1} - 2(3)x^{3-1} + \frac{5}{x} + 0 \\ &= -\frac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}} - 6x^2 + \frac{5}{x}. \end{aligned}$$

Les règles précédentes forment une base de fonction pas très compliquées. Pour trouver la dérivée de fonctions plus complexes, on utilise les règles suivantes.

Règle du produit. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables alors le produit $f(x)g(x)$ est dérivable et

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{21}$$

Règle de quotient. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables alors le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est dérivable et

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \quad \text{pour} \quad g(x) \neq 0. \tag{22}$$

Exemple 3.14 *Soient* $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3$ *et* $g(x) = \ln|x|$ *et calculons* $(f(x)g(x))'$ *et* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$. *On a*

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \left(\left(\frac{2}{3}x^3\right)(\ln|x|)\right)' \\ &= \left(\frac{2}{3}x^3\right)'(\ln|x|) + \left(\frac{2}{3}x^3\right)(\ln|x|)' \\ &= \left(\frac{2}{3}3x^2\right)(\ln|x|) + \left(\frac{2}{3}x^3\right)\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (2x^2)\left(\ln|x|) + \frac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(\frac{2x^3}{3\ln|x|}\right)' = \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{\ln|x|}\right)' \\ &= \frac{2}{3}\frac{(x^3)'(\ln|x|) - x^3(\ln|x|)'}{(\ln|x|)^2} \\ &= \frac{2}{3}\frac{3x^2\ln|x| - x^3\frac{1}{x}}{(\ln|x|)^2} \\ &= \frac{2}{3}\frac{3x^2\ln|x| - x^2}{(\ln|x|)^2} = \frac{2x^2(3\ln|x| - 1)}{3(\ln|x|)^2}. \end{aligned}$$

Règle fonction composée (dérivée en chaîne). Si $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables alors $f \circ g(x))$ est dérivable dans son domaine de définition et

$$(f \circ g(x))' = f'(g(x))g'(x). \tag{23}$$

Exemple 3.15 *Trouvez la dérivée de* $(e^{5x})^4$*. On a*

$$\begin{aligned} ((e^{5x})^4)' &= 4(e^{5x})^3(e^{5x})' && \textit{[on utilise règle (16), } f(x) = e^{5x}\textit{]} \\ &= 4(e^{15x}) \cdot 5e^{5x} && \textit{[on utilise règle (18)]} \\ &= 20e^{20x}. \end{aligned}$$

Exemple 3.16 *Soit* $f(x) = e^{2-x+x^2}$*. On a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{g(x)})' && \textit{[avec } g(x) = 2 - x + x^2\textit{]} \\ &= e^{g(x)}g'(x) \\ &= e^{2-x+x^2} \cdot (-1 + 2x). \end{aligned}$$

Exemple 3.17 *Soit* $f(x) = (\ln(x^2 - 1))^5$*. On a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((\ln(x^2-1))^5)' && \textit{[on utilise règle (16) avec } f(x) = \ln(x^2-1)\textit{]} \\ &= 5(\ln(x^2-1))^4(\ln(x^2-1))' && \textit{[on utilise règle (20) avec } g(x) = x^2 - 1\textit{]} \\ &= 5(\ln(x^2-1))^4 \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} \\ &= 5(\ln(x^2-1))^4 \frac{2x'}{x^2-1}. \end{aligned}$$

Exemple 3.18 *Les valeurs de f, f', g et g' sont données dans ce tableau*

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	*3*	*-1*	*2*	*4*
2	*-2*	*3*	*1*	*-1*

A partir de ce tableau calculons $(f(x)g(x))'$ *et* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$ *pour* $x = 1, 2$*:*

x	$(f(x)g(x))'$	$(f(x)/g(x))'$
1	$f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$ $= (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4$ $= 10$	$\frac{1}{g(1)^2}(f'(1)g(1) - f(1)g'(1))$ $= \frac{1}{2^2}((-1) \cdot 2 - 3 \cdot 4)$ $= -\frac{14}{4}$
2	$f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$ $= 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1)$ $= 5$	$\frac{1}{g(2)^2}(f'(2)g(2) - f(2)g'(2))$ $\frac{1}{1^2}(3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1))$ $= 1$

Exemple 3.19 *Soit $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{3x-2}}$. Trouvons l'équation de la droite tangente au graphe de f à $x = 2$.*

Notons que

$$f(2) = \frac{8}{\sqrt{3 \cdot 2 - 2}} = \frac{8}{\sqrt{4}} = 4.$$

Donc le point $(2,4)$ appartient au graphe de f. Ensuite, on trouve $f'(2)$. D'abord on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(8(3x-2)^{-1/2}\right)' = 8\left(-\frac{1}{2}\right)(3x-2)^{-3/2}(3x-2)' \\
&= -\frac{8}{2}\frac{1}{(3x-2)^{3/2}}3; \qquad \textit{donc} \\
f'(2) &= -\frac{8}{2}\frac{1}{(3\cdot 2-2)^{3/2}}3 = -\frac{8}{2}\frac{1}{8}3 \\
&= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation de la droite tangenmte au $(2,4)$ est

$$\begin{aligned}
y &= f'(2)(x-2) + f(2) = -\frac{3}{2}(x-2) + 4 \\
&= -\frac{3}{2}x + 7.
\end{aligned}$$

3.1.6 Dérivation implicite

Pour une fonction donnée par une formule de la forme $y = f(x)$ on dit qu'elle est donnée de façon explicite, et f est une fonction explicite.

Or, une fonction n'est pas toujours donnée de façon explicite. Par exemple, les variables x et y peuvent être liées par une équation de la forme $E(x,y) = 0$. Il se peut que cette équation définit parfaitement $y = f(x)$, sans qu'on puisse écrire de façon explicite $y = f(x)$. Dans ce cas on dit que f est défini de façon implicite, et que f est une fonction implicite.

Par exemple, $x + \dfrac{1}{3+x^2} - y = 0$ définit une fonction implicite $y = f(x)$. Il se trouve que dans ce cas y se resout explicitement, et $y = f(x) = x + \dfrac{1}{3+x^2}$ est une fonction explicite.

Dans l'exemple $x - ye^{xy} = 0$, l'équation qui lie x et y définit une fonction implicite $y = f(x)$. Ici, il se trouve que $f(x)$ ne peut pas être resolu explicitement.

Il est intéressant à noter qu'on peut calculer la dérivée des fonctions implicites. La procédure à suivre est comme suit.

1. On dérive l'équation $E(x,y) = 0$ en utilisant les régles de la dérivation. Ici, $y = y(x)$ ou bien $y = f(x)$), donc au fait on a $E(x, y(x)) = 0$ et

$$(E(x,y(x))' = 0. \tag{24}$$

2. De l'équation résultante on resout $y'(x)$. C'est la dérivée de la fonction implicite $y(x)$.
3. Si on veut la valeur $y'(c)$ à $x = c$, on substitue $x = c$ et $y = y(c)$ dans (24), et ensuite on resout $y' = y'(c)$.
4. Autrement, on resout y' en fonction de x et y.

Remarquons donc que l'idée centrale de la différenciation implicite est de supposer que y est une fonction de x, même si ce n'est pas possible de résoudre explicitement pour y. Donc, chaque fois que vous différenciez un terme contenant y, vous devriez obtenir un terme qui a un y'.

Exemple 3.20 *Supposons que y est une fonction de x et calculons $(y^5)'$, $(x^2y^3)'$ et $(cos(y)^2)'$. On a*

$$\begin{aligned}
(y^5)' &= (y(x)^5)' = 5y^4 \cdot y' \\
&= 5y^4 \cdot y', \\
(x^2y^3)' &= (x^2y(x)^3)' \qquad \textit{en utilisant la règle du produit}, \\
&= (x^2)' \cdot (y(x)^3) + (x^2) \cdot (y(x)^3)' \\
&= 2xy^3 + x^2 3y^2 \cdot y' \\
&= 2xy^3 + 3x^2y^2 \cdot y', \\
(\cos(y)^2)' &= 2\cos(y)(\cos(y))' = 2\cos(y)(-\sin(y))y' \\
&= -2\sin(y)\cos(y)y'.
\end{aligned}$$

Exemple 3.21 *Soit $y = f(x)$ définie implicitement par*

$$x^2y - 9\frac{x}{1+y} - y^2 = 5.$$

Sâchant que $f(3) = 2$ trouvons la dérive implicite $f'(3)$ et ensuite, comme une application, l'équation de la droite tangente au point $(3, 2)$ du graphe de f.

Ici, on voit bien que $(3, 2)$ appartient au graphe de f parce qu'en remplaçant $x = 3$ et $y = 2$ on obtient une égalité

$$3^2 \cdot 2 - 9\frac{3}{1+2} - 2^2 = 5.$$

Ensuite, on trouve la dérivée $f'(3)$. On procède en différentiant l'équation ci-haut par rapport à x, tout en considérant $y = y(x)$:

$$\begin{aligned}
(x^2y)' - 9\left(\frac{x}{1+y}\right)' - (y^2)' &= 5', \\
2xy + x^2y' - 9\frac{x'(1+y) - xy'}{(1+y)^2} - 2yy' &= 0.
\end{aligned}$$

Ici, on pourrait resoudre $y'(x)$, et ensuite replacer $x = 2$ et $y = 2$ pour avoir $y'(3)$. Or, il est plus simple de remplacer dans cette équation $x = 3$, $y = 2$, $x' = 1$ on ensuite resoudre y', qui donne $f'(3)$:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 3 \cdot 2 + 3^2 \cdot y' - 9\frac{1 \cdot (1+2) - 3 \cdot y'}{(1+2)^2} - 2 \cdot 2 \cdot y' &= 0, \\
12 + 9y' - 3 + 3y' - 4y' &= 0, \\
8y' &= -9, \\
y' &= f'(3) = -\frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

Enfin, l'équation de la droite tangente est

$$\begin{aligned}
y &= f'(3)(x-3) + f(3), \\
y &= -\frac{9}{8}(x-3) + 2, \\
y &= -\frac{9}{8}x + \frac{43}{8}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.22 *La function $y = f(x)$ est définie implicitement par*

$$x^3 + xy = 2y^3 - 13.$$

Trouvons sa dérivée $y'(x)$. Ensuite, trouvons l'équation de la droite tangente au graphe de f à $x = 1$.

En dérivant l'équation ci-haut on obtient

$$\begin{aligned}
(x^3 + xy)' &= (2y^3 - 13)', \\
3x^2 + x'y + xy' &= 2 \cdot 3y^2 y'; \qquad \text{[on factorise } y'\text{]} \\
3x^2 + y &= (6y^2 - x)y', \\
y' &= \frac{3x^2 + y}{6y^2 - x}.
\end{aligned}$$

Comment trouver $y'(1)$? L'équation ci-haut qui donne y' dépend de x et $y = y(x)$. Alors, dans l'équation initiale $x^3 + xy = 2y^3 - 4$ en remplace $x = 1$ et on trouve $y = y(1)$:

$$\begin{aligned}
1^3 + 1 \cdot y &= 2y^3 - 13, \\
2y^3 - y &= 14, \qquad \text{d'où} \\
y &= 2.
\end{aligned}$$

Il n'y a pas d'autres solutions.[3] *Donc $y(1) = 2$ et alors en remplaçant dans la formule de y' on obtient*

$$y' = \frac{3 \cdot 1^2 + 2}{6 \cdot 2^2 - 1} = \frac{5}{23}.$$

[3] On peut se convaincre en divisant le polynôme $2y^3 - y - 14$ par $y = 2$. On obtient $2y^3 - y - 14 = (y-2)(2y^2 + 4y + 7)$, avec $2y^2 + 4y + 7 = 0$ qui n'a pas de solution

Alors, l'équation de la droite tangente est

$$\begin{aligned}
y &= f'(1)(x-1)+f(1),\\
y &= \frac{5}{23}(x-1)+2,\\
y &= \frac{5}{23}x+2-\frac{5}{23}=\frac{5}{23}x+\frac{41}{23}.
\end{aligned}$$

3.1.7 Problèmes

Problème 3.1.1 *Calulez la dérivée des fonctions $f(x)$ suivantes en utilisant la définition de la dérivée:*

a) $f(x)=3x^2-1$

b) $f(x)=\dfrac{2}{3-x}$

c) ^{s} $f(x)=\dfrac{1}{4x-1}$

d) ^{s} $f(x)=\sqrt{x+1}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

f) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

Problème 3.1.2 *Est-ce-que la fonction $f(x)$ suivante admet une dérivée au point c spécifié? Si oui, trouvez le.*

a) $c=3,\quad f(x)=\begin{cases} x^2+3, & x<3,\\ 6x-6, & x\geq 3,\end{cases}$

b) ^{s} $c=0,\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+1}, & x<0,\\ 3+x, & x\geq 0,\end{cases}$

c) $c=1,\quad f(x)=\begin{cases} 4\sqrt{3+x^2}, & x<1,\\ 2x+6, & x\geq 1,\end{cases}$

d) ^{s} $c=0,\quad f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0,\end{cases}$

e) $c=0,\quad f(x)=\sqrt{x}$

f) $c=1,\quad f(x)=|x-1|$

Problème 3.1.3 *Calculez f', f'' et f''' des fonctions suivantes:*

a) $f(x)=x^{-1}$

b) $f(x)=e^x$

c) $f(x)=xe^x$

d) ^{s} $f(x)=xe^{-x}$

e) ^{s} $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

f) $f(x)=x\ln x$

Problème 3.1.4 *Etant donné f et g, calculez $(f\circ g)'(x)$ et $(g\circ f)'(x)$:*

a) $^s\ f(x) = x^2,\ g(x) = \dfrac{1}{1+x}$

b) $f(x) = 1 + x,\ g(x) = e^x$

c) $f(x) = (1-x)^2,\ g(x) = \ln(2-x)$

d) $f(x) = \sqrt{1-x},\ g(x) = 1 - 3x^2$

Problème 3.1.5 *Calculez $f'(c)$ de la fonction implicite $y = f(x)$, et ensuite l'équation de la droite tangente au même point:*

a) $x + y^3 = 11,\ @(3,2)$

b) $^s\ 7x + y^5 = 15,\ @(2,1)$

c) $x^2 - xy + y^2 = 3,\ @(1,2)$

d) $^s\ x^2y^2 + \dfrac{x^3}{1-y} = 1,\ @(1,0)$

e) $x^2y^3 + \dfrac{x}{y} = 6,\ @(2,1)$

f) $xe^{xy} + \ln(1+xy) = 1,\ @(1,0)$

Problème 3.1.6 *Trouvez l'équation de la droite tangente au graphe de $y = f(x)$ au point M spécifié.*

a) $^s\ y = \sqrt{x^2+16},\quad M = (3,5)$

b) $(x-1)^2 + y^2 = 4^2,\quad M = (1,2)$

c) $^s\ (3x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2,\quad M = (2,4)$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}},\quad M = (4,1)$

e) $y = x^2 - e^x + 2,\quad M = (0,1)$

f) $y = (1+x^2)\ln x,\quad M = (1,0)$

3.2 Autres applications de la dérivée

On a déjà vu une première application de la dérivée, qui est l'équation de la droite tangente. Dans cette section on va voir des applications de la dérivée au kinématique/mécanique, finance et aux taûx liés.

3.2.1 Applications kinématiques: vitesse, accélération

Soit $s = s(t)$ une fonction donnée, où $t \geq 0$ et le temps et $s(t)$ est le chemin parcouru par un point. On suppose que $s'(t)$ existe, $t > 0$. Dan la section 3.1.1 on a vu que $s'(t)$ est la vitesse instantannée du point en question, donc $v(t) = s'(t)$.

De la même façon on peut conclure que l'accélération est la dérivée de la vitesse:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Exemple 3.23 *Un objet se déplace verticalement et son hauteur par rapport à la surface de la terre est donné en mètres par* $h(t) = \dfrac{t}{t^2+36}$, $t \geq 0$ *(t en secondes).*
i) À quel temps l'objet commence à retoruner à la position initiale?
ii) Que valent l'hauteur et l'accélération de l'objet à ce temps?
Solution.
i) Nous recherchons le moment t *à lequelle l'hauteur de l'objet cesse à augmenter et commence à diminuer. A cet instant, la tangente au graphe de* h *est horizontale, voir Figure 11. Donc, nous*

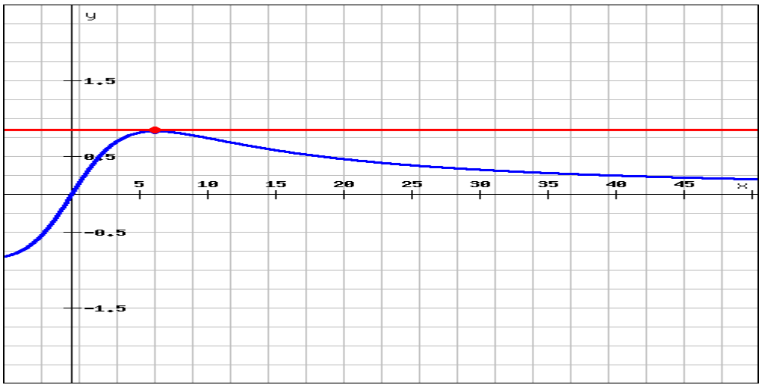


Figure 11: Le graphe de $h(t)$ et la tangente au point maximum

cherchons le temps t *auquel* $h'(t) = 0$*, c.à.d. un temps* t *qui est point critique pour* h*. On resout* $h'(t) = 0$*:*

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{t^2+36-2t^2}{(t^2+36)^2} = \frac{36-t^2}{(t^2+36)^2} = 0, \\ 36-t^2 &= 0, \\ t &= 6 \quad (\textit{et } t=-6, \textit{ mais il est exclu parce que } t \geq 0). \end{aligned}$$

On étudie aussi le signe de $h'(t)$*, pour confirmer le comportment de* $h(t)$ *avant et après le temps* $t = 6$*:*

t	$-\infty$		-6		0		6		∞
$h'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{12}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	0

Donc, pour $t \in [0, 6)$ *on a* $h'(t) > 0$*, ce qui signifie que* h *croît et l'object augmente en hauteur. Pour* $t \in (6, \infty)$ *on a* $h'(t) < 0$*, ce qui signifie que* h *decroît et l'object diminue en hauteur. Il en*

suit qu'à $t = 6s$, l'object commence à retourner à sa position initiale.
ii) Pour trouver l'hauteur, on substitue $t = 6$ dans $h(t)$:

$$h(6) = \frac{6}{6^2+36} = \frac{1}{12},$$

Alors, l'hauteur est $\frac{1}{12} = 0.083m$. Pour trouver l'accélération de l'objet à ce temps, on trouve la deuxième derivée à $t = 6$.

$$\begin{aligned}
h''(t) &= (h'(t))' \\
&= \left(\frac{36-t^2}{(t^2+36)^2}\right)' = \frac{-2t(t^2+36)^2-(36-t^2)2(t^2+36)2t}{(t^2+36)^4} \\
&= \frac{-2t(t^2+36)-(36-t^2)\cdot 2\cdot 2t}{(t^2+36)^3} \\
&= \frac{2t^3-6\cdot 36t}{(t^2+36)^3}, \\
h''(6) &= \frac{2\cdot 6^3-6\cdot 36\cdot 6\cdot 6}{(6^2+36)^3} = -0.00231481.
\end{aligned}$$

Donc, l'accélération est $-0.00231481m/s^2$.

3.2.2 Applications financières: marginaux, élasticité de la demande

Marginaux Soient $P(x)$, resp. $R(x)$, $C(x)$, la fonction profit, resp. revenue, coût. Alors, on définit

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \textit{le profit marginal à } x, \\
R'(x) &= \textit{le revenu marginal à } x, \\
C'(x) &= \textit{le coût marginal à } x.
\end{aligned}$$

Notons que le profit marginal $P'(x)$ sert à approcher le changement du profit quand la demande x est augmenté de x à $x+1$. Alors, c'est le profit de production d'une unité supplémentaire d'un bien/produit spécifique. La raison est la suivante:

$$P'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{P(x+h)-P(x)}{h} \approx \frac{P(x+1)-P(x)}{1} = P(x+1)-P(x).$$

Un raisonnement similaire a lieu pour $R(x)$ et $C(x)$.

Elasticité de la demande On observe que pour certains biens/produits, la demande varie beaucoup quand le prix change. Dans cette cathégorie de biens entrent typiquement des produits de lux.

Pour d'autres biens, la demande ne varie pas (ou varie très peu) quand le prix change. Dans ce catégorie de biens entrent typiquement des produits de nécessité de base, tel que le lait.

L'élasiticité de la demande est un concept qui décrit le comportement de la demande par rapport aux changement du prix.

Définition: *Soit x la demande et $p = p(x)$ la fonction demande qui donne le prix par unité quand la demande est x. L'élasticité de la demande à x, notée $\eta(x)$, est donnée par*

$$\eta(x) = \frac{p(x)}{xp'(x)}, \quad x > 0. \tag{25}$$

De plus:

i) Si $|\eta(x)| > 1$ on dit que la demande à x est élastique.

ii) Si $|\eta(x)| < 1$ on dit que la demande à x est inélastique.

iii) Si $|\eta(x)| = 1$ on dit que la demande à x est unitaire.

Notons que $\eta(x)$ est obtenue comme quotient du changement relative de la demande avec le changement relative du prix, comme suit

$$\eta(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p}{x\frac{\Delta p}{\Delta x}} = \frac{p(x)}{xp'(x)}.$$

Remarque 3.3 *Si au lieu de $p = p(x)$ on a la fonction $x = x(p)$, qui est l'inverse de $p(x)$, l'élasticité η est donnée par:*

$$\eta(p) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{p\frac{\Delta x}{\Delta p}}{x} = \frac{px'(p)}{x}. \tag{26}$$

Remarque 3.4 *À quoi sert la notion de l'élasticité? Au fait, sâchant que $\eta(x) \approx \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$, on obtient*

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \eta(x)\frac{\Delta p}{p}.$$

Donc, à $n\%$ de changement relatif en prix p correspond $\eta(x) \cdot n\%$ de changement relatif de la demande x. En total, ceci implique essentiellement à un changement relatif du revenu par $(1+\eta) \cdot n\%$. Ce fait facilite les décisions à optimiser la production. De plus on a

Proposition 3.5 *Le revenue est maximal quand*[4] $\eta = -1$.

[4]On peut ce convaincre comme suit. Au point de maximum, $R' = 0$. Puisque $R = x \cdot p$, il en suit $p + xp' = 0$, d'où $p = -xp'$, or $\frac{p}{xp'} = -1$, ci qui est $\eta = -1$

Exemple 3.24 *Soit $x = 200 - p^2$.*
i) Trouver l'élasticité quand $p = 5, 10$.
ii) À quel prix le revenu est maximal?
Solution.
i) Ici, il est donné $x = x(p)$ et alors on utilise la formule (26). Comme $x'(p) = -2p$ on obtient

$$\eta(p) = \frac{p(-2p)}{200 - p^2} = \frac{2p^2}{200 - p^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \eta(p = 5) &= \frac{-2 \cdot 5^2}{200 - 5^2} = \frac{-50}{150} = \frac{-1}{3}, \\ |\eta(p = 5)| &= \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Donc, à $p = 5$ la demande est inélastique. De Remarque 3.4 il en suit qu'à $+1\%$ de hausse du prix correspond une baisse de $-\frac{1}{3}\%$ de la demande et donc une hause relatif de $(1 - \frac{1}{3}) \cdot 1\% = +\frac{2}{3}\%$ du revenu. Donc, à $p = 5$ le revenu croît si on monte le prix.

Pour $p = 10$ on a

$$\begin{aligned} \eta(p = 10) &= \frac{-2 \cdot 10^2}{200 - 10^2} = \frac{-200}{100} = -2, \\ |\eta(p = 10)| &= 2 > 1. \end{aligned}$$

Donc, à $p = 10$ la demande est élastique. De Remarque 3.4 il en suit qu'à une monté de $+1\%$ du prix correspond un baisse de -2% de la demande, ce qui implique une une baisse relatif de du revenu par $(1 + \eta) \cdot 1\% = (1 - 2)\% = -1\%$.

D'autre part, à $p = 10$ si on baisse le prix par -1% la demande monte par $\eta(10) \cdot (-1\%) = +2$, donc le revenu relatif monte par $(1 + \eta) \cdot (-1\%) = +1\%$.
ii) On resout $\eta = 1$, donc

$$\begin{aligned} \frac{2p^2}{200 - p^2} &= 1, \\ 2p^2 &= 200 - p^2, \\ p^2 &= \frac{200}{3}, \\ p &= \sqrt{\frac{200}{3}} \quad \textit{(la racine négative est éliminé parce que } p \geq 0\textit{)}. \end{aligned}$$

Donc, $p = \sqrt{\frac{200}{3}} \approx 8\$$ maximise le revenu.

3.2.3 Taûx liés

Soient deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ qui sont liées par une équation, disons $E(f(t), g(t)) = 0$. En dérivant cette relation on trouve que $f'(t)$ et $g'(t)$ satisfont une autre relation. De ce fait, on dit que f et g ont "taûx liés". Cette équation permet de resoudre un des $f'(t)$, $g'(t)$ en fonction de l'autre.

Exemple 3.25 *La région occupée (où vit) par un animal est de forme circulaire. Au moment quand la région avait un rayon de 3 km, l'aire de la région agrandisait de tauî de 4 km^2/an. On veut trouver à quelle vitesse (taût) grandissait le rayon au même moment.*

Pour resoudre ce problème on note avec r le rayon de la région et A son aire. Ici $r = r(t)$ et $A = A(t)$ sont des fonctions du temps. A et r satisfont

$$A = \pi r^2, \quad ou \quad A(t) = \pi r(t)^2.$$

C'est l'équation qui lie r at A (c'est l'équation $E(f(t), g(t)) = 0$). En dérivant cette équation on obtient

$$A' = \pi 2rr'.$$

On substitue $r = 3$, $A' = 4$ et on resout r':

$$r' = \frac{A'}{\pi r} = \frac{4}{3}\frac{1}{\pi}.$$

3.2.4 Problèmes

Problème 3.2.1 ^{s} *Un objet se déplace verticalement et son hauteur par rapport à la surface de la terre est donné par $h(t) = \dfrac{t}{t^2 + 25}$, $t \geq 0$.*
i) À quel temps l'objet commence à retoruner à la position initiale?
ii) Que valent l'hauteur et l'accélération de l'objet à ce temps?

Problème 3.2.2 *Deux objects se déplacent verticalement avec des hauteurs respectives par rapport à la surface de la terre $h_1(t) = 3t^2 - 7t$ et $h_2(t) = 2t^2 - 4t - 2$.*
i) À quel temps les deux objects se rencontrent?
ii) Quelles sont leurs vitesses et accélérations à ce temps?

Problème 3.2.3 *Trouvez le profit marginal $P'(x)$, où $P(x) = R(x) - C(x)$, aux cas suivants:*

a) $R(x) = 25x,\ C(x) = (10 - x + 2x^2)$

b) ^{s} $R(x) = 3 + 7x^2,\ C(x) = \dfrac{x}{1 + x}$

c) $R(x) = \dfrac{x^2}{1 - x},\ C(x) = x(3 + x^7)$

d) ^{s} $R(x) = 3^{1+x^2},\ C(x) = \ln(1 + x^2)$

e) ^{s} $R(x) = (x^2 - 1)^4,\ C(x) = (\ln(1 + x))^2$

f) $R(x) = (1 + 2x)^4,\ C(x) = (e^{-x})^2$

Problème 3.2.4 *Trouvez l'élasticité de la demande. Est-ce la demande est élastique, inélastique ou unitaire, au x spécifié?*

a) ^{s} $p(x) = 100 - 4x, \quad x = 50$

b) $p(x) = x^2 + 2, \quad x = 1$

c) $p(x) = \dfrac{x}{1+x}, \quad x = 2$

d) $p(x) = 10 + \sqrt{x}, \quad x = 9$

e) $p(x) = x + \dfrac{1}{1+x}, \quad x = 1$

f) ^{s} $p(x) = 3x + \ln(1+x), \quad x = 2$

Problème 3.2.5 *Pour quels x dans l'intervalle spécifié la demande suivante est élastique?*

a) $p(x) = 1 + 4x, \ x \geq 0$

b) ^{s} $p(x) = 4 + x^2, \ x \geq 0$

c) ^{s} $p(x) = 15 - \sqrt{x}, \ x \in [0, 225]$,

d) $p(x) = 3x^2 + 27, \ x \geq 0$

Problème 3.2.6 *Pour quels x la demande suivante est inélastique?*

a) $p(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \ x \geq 0$

b) $p(x) = x^2 + 64, \ x \geq 0$

c) $p(x) = 2x^2 + x, \ x \geq 0$

d) $p(x) = \sqrt{x-1}, \ x \geq 1$

Problème 3.2.7 ^{s} *Due à un accident, une nappe de petrôle qui s'echappe d'un transporteur de petrôle, se diffuse en forme circulaire avec un rayon qui s'augmente avec un taûx de $3m/min$. Quel est le taûx de l'augmentation de l'aire de la nappe du petrole quand le rayon est 50 m?*

Problème 3.2.8 ^{s} *Une échelle de longueur $10m$, au temps $t = 0$ est à la position verticale. L'extremité basse de l'échelle se deplace horizontallement avec une vitesse $3m/sec$ alors que l'autre extremité se deplace verticalement (contre un mur vertical). À quelle vitesse se deplace l'extremité verticale au moment quand l'extremité basse est deplacée de $8m$ de sa position d'origine?*

Problème 3.2.9 *Une échelle de longueur $5m$, au temps $t = 0$ est à la position verticale. L'extremité haute de l'échelle se deplace verticalement avec une vitesse $-2m/sec$ alors que l'autre extremité se deplace horizontallement. À quelle vitesse se deplace l'extremité horizontalle au moment quand l'extremité haute est $3m$ loin du sol?*

Problème 3.2.10 ^{s} *Le volume d'un ballon sphèrique s'augmente avec un taûx de $3m^3/heure$. Quelle est le taûx de croîssance de son rayon quand le rayon est $7m$?*

Problème 3.2.11 *Le volume d'un ballon sphèrique s'augmente avec un taûx de $5m^3/heure$. Quelle est le taûx de croîssance de son rayon quand le rayon est $11m$?*

Problème 3.2.12 *L'aire d'un ballon sphèrique s'augmente avec un taûx de $5m^2/heure$. Quelle est le taûx de croîssance de son volume quand le rayon est $3m$?*

Problème 3.2.13 [s] *Le volume d'un cube s'augmente avec un taûx de* $5m^3/min$*. Quel est le taûx de l'augmentation de son aire quand la longueur d'un côté de cube est* $9m$*?*

Problème 3.2.14 *Le volume d'un cube s'augmente avec un taûx de* $9m^3/min$*. Quel est le taûx de l'augmentation de son aire quand la longueur de son côté est* $3m$*?*

Problème 3.2.15 *L'aire d'une cube s'augmente avec un taûx de* $4m^2/min$*. Quel est le taûx de l'augmentation de son volume quand la longueur de son côté est* $6m$*?*

3.3 Optimisation d'une fonction

3.3.1 Definitions. Premiers résultats

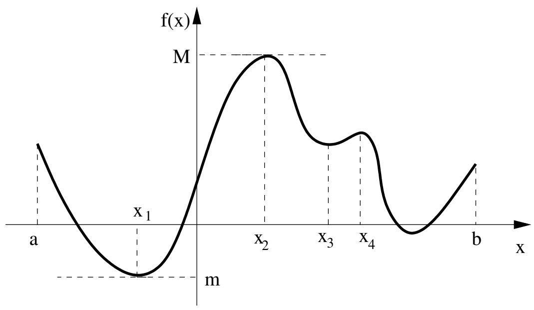
Un des problèmes les plus importants du calcul (et même de l'analyse mathématique) est de trouver la valeur maximale et minimale d'une fonction. La procédure associée est appellée optimisation.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ une intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie dans I avec $Dom(f) = I$. On suppose que f est continue dans I, c.à.d. $f \in C^0(I)$.

On cherche *la valeur maximale et minimale de f dans I*. La valeur maximale, resp. minimale, de f dans I est une valeur $M = f(x_M)$, resp. $m = f(x_m)$, pour un certain $x_M \in I$, resp. $x_m \in I$, tel que

$$M = f(x_M) = \max\{f(x),\ x \in I\}, \quad m = f(x_m) = \min\{f(x),\ x \in I\}.$$

La valeur maximale et minimale de f sont appellée "*valeurs extremales*", ou "*extrema*". Le point x_M, resp. x_m, où le maximum, resp. minimum, est atteint s'appelle "*point de maximum*"", resp. "*point de minimum*".



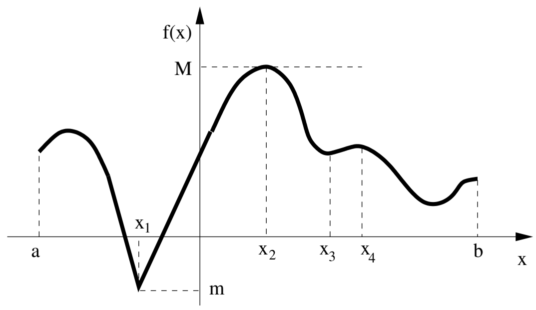


Figure 12: Une fonction $f \in C^0([a, b])$ et ces extrema

Figure 12 demontre graphiquement les extrema de f, où $x_m = x_1$ et $x_M = x_2$.

Est-ce-que les extrema de f dans I existent? Si oui, comment peut-on les trouver? Pour répondre à ces questions il faut élaborér quelques notions.

Définition 3.6 *Un $c \in I$ s'appèlle point critique (PC) de f dans I si:*

i) $f'(c)$ existe et $f'(c) = 0$, ou

ii) $f'(c)$ n'existe pas mais $f(c)$ existe.

Cette définition est motivée par la Figure 12, où à gauche la dérivée est zéro aux points x_m et x_M, alors qu'à droite la dérivée au x_m n'existe pas. On a cette proposition:

Proposition 3.7 *Si $f(c)$ est un extrema, alors c est un point critique.*

Le résultat de cette proposition est assez intuitive. En effet, si $f'(c)$ existe alors la droite tangente à $(c, f(c))$ est horizontale, donc $f'(c) = 0$.

Remarque 3.8 *À noter que le contraire de la proposition n'est pas vrai en général. Par exemple la fonction $f(x) = x^3$ dans $I = [-1, 1]$ a un point critique $c = 0$, mais $f(0)$ n'est pas un extrema (ni maximum, ni minimum) de f dans I.*

Proposition 3.7 suggère que pour trouver les extrema de f il faut trouver les points critiques de f dans I. Avec la notion du point critique on a ce premier résultat.

Theorem 3.9 *Soit $I = [a, b]$ et $f \in C^0(I)$. Alors, les extremas de f dans I existent. Plus précisement, si m, resp. M, est la plus petite, resp. plus grande, valeur de f dans I alors on trouve ces valeurs comme suit.*

1. *On trouves les points critiques de f dans I.*
2. *On évalue f aux PCs et aux extrêmités de $[a, b]$, c.à.d. $f(a)$, $f(b)$.*
3. *La plus petite, resp. grande, valeur trouvée au 2. est m, resp. M.*

Exemple 3.26 *Trouvons les extrema de $f(x) = x^2 - 2x + 3$ dans l'intervalle $I = [0, 4]$.*

D'abord on note que I est une intervalle fermée et f est continue dans I. Donc les extrema de f dans I existent. Ensuite, les points critiques de f sont donnés par $f'(x) = 0$, parce que $f'(x)$ existe pour tout x. Donc

$$f'(x) = 2x - 2 = 0, \quad x = 1.$$

On évalue f:

$$f(0) = 3, \quad f(1) = 2, \quad f(4) = 11.$$

Donc $f(4) = 11$ est le maximum de f et $f(1) = 2$ est le minimum de f dans I.

Remarque 3.10 *À noter que si I n'est pas fermé alors les extrema de f dans I, en général, n'existent pas. Par exemple, soit $f(x) = x$ et $I = (0, 1)$. Alors, f n'atteint pas ni maximum, ni minimum dans I. Quelqu'un pourrait penser que le minimum est 0, mais puisque f atteint 0 que pour $x = 0$, et $0 \notin I$ alors on conclut que le minimum de f dans I n'existe pas.*

On raisonne de façon similaire pour le maximum.

3.3.2 Intervalles de monotonie. Classification des points critiques I

On a vu avec l'exemple $f(x) = x^3$ dans la Remarque 3.8 qu'un point critique, en général, n'est pas un extrema. Que peut-on dire des points critiques?

Dans Figure 12, x_3 et x_4 sont des points critiques, mais $f(x_3)$, $f(x_4)$ ne sont pas des extrema. En fait, $f(x_3)$ est un minimum local, et $f(x_4)$ est un maximum local.

Définition 3.11 *En général, $c \in I$, resp. $C \in I$ est un point d'un minimum, resp. maximum, local, si $f(c)$, resp. $f(C)$, est la plut petite valeur, resp. plus grande valeur, de $f(x)$ pour x dans un petit voisinage de c, resp. C (voir Figure 13), i.e.*

$$f(c) \leq f(x), \qquad f(C) \geq f(x), \quad \textit{pour } x \textit{ près de } c\textit{, resp. } C.$$

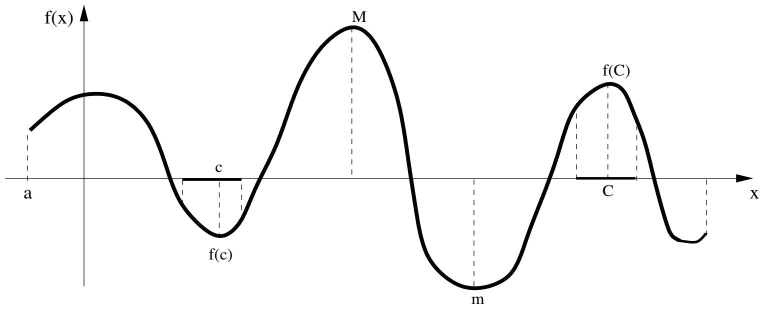


Figure 13: Une fonction $f \in C^0(a,b])$ et ses extrema locaux c, C

On a deux critères pour classifier les points critiques. Le premier utilise la monotonie des fonctions (les fonctions croîssantes et décroîssantes), alors que le deuxième utilise la concavité des fonctions.

Définition 3.12 *Une fonction est croissante, resp. décroissante, dans une intervalle I (voir Figure 14) si*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2), \ \ resp. \ \ f(x_1) > f(x_2).$$

En général, toute intervalle I où f est croîssante ou décroissante est appellée "intervalle de monotonie".

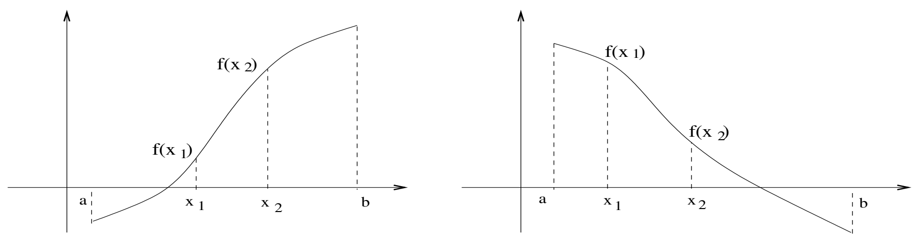


Figure 14: À gauche une fonction croissante, à droite une fonction decroissante

La proposition suivante donne des critères pour la monotonie des fonctions.

Proposition 3.13 *Soit f une fonctions dérivable dans une intervalle I. On a:*

i) Si $f'(x) > 0$ pour tous les $x \in I$ alors f est croissante dans I (on écrit $\nearrow$).

ii) Si $f'(x) < 0$ pour tous les $x \in I$ alors f est décroissante dans I (on écrit $\searrow$).

iii) Si $f'(x) = 0$ pour tous les $x \in I$ alors f est constante dans I.

À l'aide de cette proposition on a ce premier critère de classification des points critiques.

Theorem 3.14 (I-ère classification des P.C.s) *Soit $c \in (a,b)$ un point critique de f. On a les suivants.*

i) Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [a,c]$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,b]$ alors c est un point de minimum local.

ii) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,c]$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [c,b]$ alors c est un point de maximum local.

Le tableau ci-dessous résume le contenu du théorème.

x	a	c	b
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$min.\ loc.$	$\nearrow$

x	a	c	b
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$max.\ loc.$	$\searrow$

Au cas où on a un seul point critique on a cette proposition.

Proposition 3.15 *Supposons que $c \in I$, I intervalle finie ou infinie, est le seul point critique de f dans I. Si c est une point de minimum local, resp. maximum local, alors c est un point de minimum global, resp, maximum global, de f dans I.*

Exemple 3.27 *Trouvons les PCs de $f(x) = x\ln(x)$ et les classifions.*

On a $I = Dom(f) = (0, +\infty)$. Les points critiques de f sont de la forme $f'(x) = 0$. Donc

$$f(x) = \ln x + 1 = 0, \quad \ln x = -1, \quad x = e^{-1}.$$

Pour le signe de $f'(x)$ on a:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$min.\ loc.$	$\nearrow$

Le signe de $f'(x)$ on le trouve comme suit. Dans chanque intervalle $(0, e^{-1})$ et $(e^{-1}, +\infty)$ on prend un point x qui nous convient et on évalue $f'(x)$. Le signe de $f'(x)$ est le signe de f' dans toute l'intervalle. Par exemple, $e^{10} \in (e^{-1}, +\infty)$, $f'(e^{10}) = \ln(e^{10}) + 1 = 11 > 0$, et $e^{-10} \in (0, e^{-1})$, $f'(e^{-10}) = \ln(e^{-10}) + 1 = -9 < 0$.

On conclut que

$$f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) = -e^{-1}$$

est minimum global de f dans $I = (0, +\infty)$ parce que e^{-1} est le seul point critique.

3.3.3 Intervalles de concavité. Classification des points critiques II

Que-ce-que c'est une fonction concave? A quoi sert la concavité?

Considèrons l'example suivant. Supposons que vous avez à prendre une décision sur les politiques de la santé publique pour affronter une épidémie. Supposons que le graphe de la fonction qui represente le nombre des personnes infectées par l'épidémie est donné dans la Fig 15. Dans les deux cas l'épidémie s'étend parce que le nombre des personnes infectées croît. Pourtant, il y une différence fondamentale entres ces deux cas. A gauche, le pente de la tangente décroît, qui veux dire que le taûx de croîssance de l'épidémie baisse, avec une tendance de devenir zéro, qui laisse penser que le traitement dans ce cas est efficace. Par contre, dans le cas à droite la pente de la tangente croît, qui veux dire que le taûx de croîssance de l'épidémie augmente, qui laisse penser que le traitement dans ce cas n'est pas efficace.

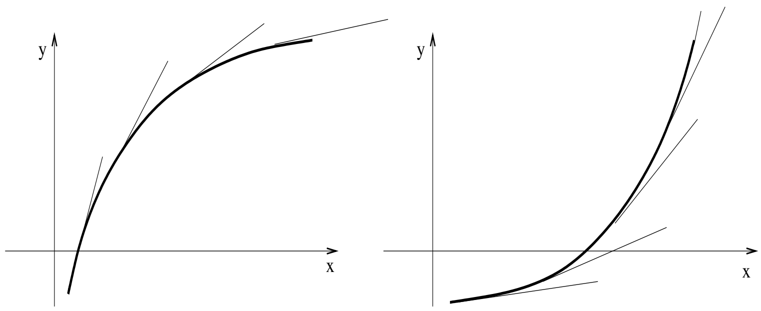


Figure 15: À gauche: une fonction croîssante avec la pente qui décroît; à droite: une fonction croîssante avec la pente qui croît.

La notion de la concavité sert à distinguer le comportement de la pente d'une fonction, c.à.d. de la dérivée de la fonction. La concavité d'une fonction est aussi liée à la classification des points critiques, comme on va le voir plus loin dans cette section.

Définition 3.16 *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et supposons que f est deux fois dérivable dans I.*
1) On dit que f ext concave vers le haut (c.v.h.) (voir Fig. 16, gauche) dans I si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$. On represente une fonction c.v.h. dans I par $\smile$.
2) On dit que f ext concave vers le bas (c.v.b.) (voir Fig. 16, droite) dans I si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$. On represente une fonction c.v.b. dans I par $\frown$.
3) Une intervalle I où f est c.v.h. ou c.v.b. est dite "intervalle de concavité'.

Puisque $f''(x) = (f'(x))'$, si $f''(x) > 0$ dans (a, b) alors $f'(x)$ est croîssant dans (a, b). De même, si $f''(x) < 0$ dans (a, b) alors $f'(x)$ est decroîssante dans (a, b), voir Fig. 17. Donc on a la proposition suivante.

Proposition 3.17 *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Si f est c.v.h., resp. c.v.b., dans I, alors f' est croissante, resp. décroissante, dans I, voir Fig. 17.*

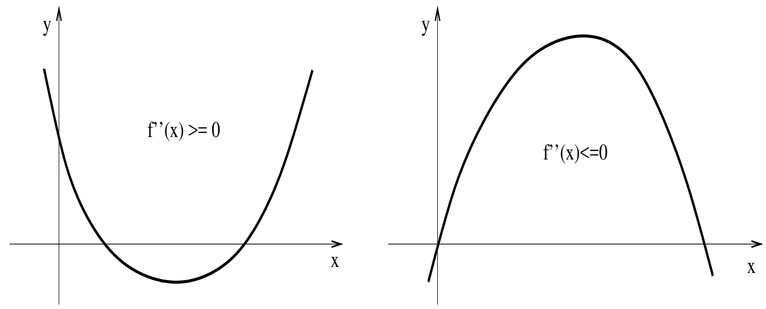


Figure 16: À gauche: une fonction concave vers le haut; à droite: une fonction concave vers le bas

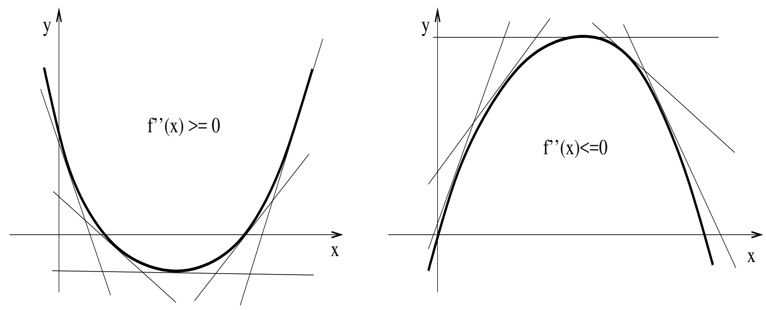


Figure 17: À gauche: une fonction c.v.h. et ses droite tangentes; à droite: une fonction c.v.b. et ses droite tangentes

Remarque 3.18 *Si $f''(x) = 0$ dans une intervalle I alors $f(x)$ est une fonction linéaire de la forme $f(x) = kx + b$ parce que $f''(x) = 0$ signifie f' est constante, disons $f'(x) = k$. D'où $f(x) = kx + b$, avec un certain b.*

Dans l'étude des fonctions, on utilise aussi la notion du point d'inflexion.

Définition 3.19 *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. Un point $c \in I$ est dite "point d'inflexion" (P.I.) si f est continue à c est f change de concavité en passant à c.*

Example 3.28 *Généralement, si c est un PI alors $f''(c) = 0$. Mais pas toujours! En effet, considérons les exemples suivants.*

i) Soit $f(x) = x^3$. Alors $c = 0$ est PI parce que $f''(x) = 6x$ et donc $f''(x)$ change de signe en passant par $x = 0$.

ii) Soit $f(x) = x^{-1}$. On a $f''(x) = 2x^{-3}$, donc $f''(x)$ change de signe en passant par $x = 0$. Or, f n'est pas continue à 0. Donc, $x = 0$ n'est pas un PI.

iii) Soit $f(x) = x^4$. On a $f''(0) = 0$, pourtant $x = 0$ n'est pas un PI parce que $f''(x) = 12x^2$ ne change pas de signe en passant par $x = 0$.

Maintenant, on peut donner un deuxieme résultat de classification des points critiques.

Theorem 3.20 (II-ème classification des P.C.s) *Soit $c \in (a, b)$ un point critique de f, avec $f'(c) = 0$. On a les suivants.*

i) Si $f''(c) > 0$ alors c est un point de minimum local.

ii) Si $f''(c) < 0$ alors c est un point de maximum local.

iii) Si $f''(c) = 0$ le théorème est inconclusif.

Le tableau ci-dessous résume le contenu du théorème.

x	a		c		b
$f'(x)$			0		
$f''(x)$			$+$		
$f(x)$		$\searrow$	$min.loc.$	$\nearrow$	

x	a		c		b
$f'(x)$			0		
$f''(x)$			$-$		
$f(x)$		$\nearrow$	$max.loc.$	$\searrow$	

Exemple 3.29 *Soit $f(x) = x^4 - 24x^2 + 1$. Trouvons les points critiques, les intervalles de concavité et les PIs de cette fonction.*

On a

$$f'(x) = 4x^3 - 48x = 4x(x^2 - 12).$$

Alors, $f'(x) = 0$ donne

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3},$$

qui sont les PCs de f. De plus

$$f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x^2 - 4).$$

Les racines de $f''(x) = 0$ sont donc $x = \pm 2$. Faisons un tableau qui regroupe les résultats et les signes de $f'(x)$, $f''(x)$.

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		$\overset{\smile}{\searrow}$	$\overset{\smile}{loc.min}$	$\overset{\smile}{\nearrow}$	PI	$\overset{\frown}{\nearrow}$	$\overset{\frown}{max.loc}$	$\overset{\frown}{\searrow}$	PI	$\overset{\smile}{\searrow}$	$\overset{\smile}{min.loc}$	$\overset{\smile}{\nearrow}$	$\overset{\smile}{\nearrow}$

Donc, $x = \pm 2$ sont des PIs, $f(\pm 2\sqrt{3})$ sont des min. locaux et $f(0)$ est max. local.

3.3.4 Problèmes

Problème 3.3.1 *Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et classifiez-les.*

a) ^{s} $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

b) ^{s} $f(x) = |x-7|$

c) ^{s} $f(x) = x^2 - |x-2|$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

e) ^{s} $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

f) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8x - 7$

Problème 3.3.2 *Trouvez les intervalles de monotonie (les intervalles de croîssance et de decroîssance) des fonctions suivantes*

a) ^{s} $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4x-1, & x \leq 1, \\ x^2+2, & x > 1, \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

e) $f(x) = |x-1|$

f) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - |x|$

g) $f(x) = x^2 - 3|x-2|$

h) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 7$

Problème 3.3.3 *Trouvez les points d'infléxion et les intervalles de concavité des fonctions suivantes*

a) ^{s} $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 11$

b) ^{s} $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x}$

d) $f(x) = x^4 - 2x^3$

e) $f(x) = x^3 - 2x$

f) $f(x) = x^4$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

3.3.5 Modélisation et optimisation

Dans cette section, à travers quelques exemples on va démontrer comment modéliser quelques problèmes d'optimisation, et les resoudre. Généralement, la liste des opérations à suivre est:

1) On modélise le problème en termes mathématiques, c.à.d., on identifie la fonction à optimiser et on pose le problème d'optimisation.

2) On trouve les PCs de la fonction.

3) On classifie les PCs.

4) On trouve la solution.

Example 3.30 *Soient $x, y \geq 0$ et on considère la somme $s = x + y$ et le produit $p = xy$. Parmis toutes les couples (x, y) satisfaisant $s = 10$, trouvons le couple qui maximise le produit p.*

Solution.
1) Ici, on a deux variables x et y. A resoudre est

trouver le maximum de $p = xy$, avec $x, y \geq 0$.

En utilisant la condition $x + y = 10$, on peut éliminer une, disons y. En effet, puisque $x + y = 10$, alors $y = 10 - x$. On remplace y dans $p = xy$ et on obtient $p = x(10 - x) = 10x - x^2$. Donc, à resoudre est

trouver le maximum de $p(x) = 10x - x^2$ pour $x \in I = [0, 10]$,

parce que $x, y \geq 0$ et $x = 10 - y \leq 10$. On procède avec la procédure.
2) Les points critiques.

$$p'(x) = 10 - 2x = 0, \quad x = 5.$$

3) Classification de PCs. On utilise Théorème 3.20:

$$p''(x) = -2.$$

Donc, $p'(5) = 0$, $p''(5) < 0$. Il en découle que $x = 5$ est un point critique de maximum local.
Puisque $x = 5$ est le seul PC de p dans I, est que ce PC est un maximum local, il en suit que $x = 5$ est un point de maximum global de p dans I (de Proposition 3.15).
4) Alors $x = 5$, $y = 10 - x = 5$. Donc $(5, 5)$ est le couple qui maximise le produit p parmis toutes les couples (x, y) satsfaisant $x + y = 10$, $x, y \geq 0$. □

Example 3.31 *On considère tous les nombres $x, y > 0$ tels que $xy = 100$. Quel est le pair (x, y) parmis eux qui minimise la somme $s = x + y$?*

Solution.
1) Soit $s = x + y$. On cherche a minimiser $s = x + y$, avec $x, y > 0$. On élimine une variable, disons y, en utilisant la relation $xy = 100$. De ce dernier il suit que $y = \dfrac{100}{x}$ et alors

$$s = s(x) = x + \frac{100}{x}.$$

On cherche alors a minimiser la fonction $s(x)$ pour $x \in I = (0, +\infty)$.
2) Les PCs. La dérivée $s'(x)$ est

$$s'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} = \frac{x^2 - 100}{x^2}.$$

Alors, $s'(x) = 0$ donne $x^2 - 100 = 0$, $x = 10$ (et $x = -10$, mais il est éliminé parce que $x \geq 0$). Donc, le PC de s est $x = 10$.
3) Clasiffication. La dérivée $s''(x)$ est

$$s'(x) = \frac{200}{x^3}.$$

Puisque $f''(10) = \frac{1}{5} > 0$, il suit que $x = 10$ est minimum local de $s(x)$.
4) Puisque $x = 10$ est le seul PC de p dans I, est que ce PC est un minimum local, il en suit que $x = 10$ est un point de minimum global de $s(x)$ dans I (de Proposition 3.15).

Donc, $x = 10$ et $y = 100/10 = 10$ est le couple qui minimise la somme s parmis toutes les couples (x, y) satsfaisant $xy = 100$, $x, y > 0$. □

Exemple 3.32 *Un agriculteur veut construre pour ses animaux une cloturage de forme rectangulaire et de l'aire* 5400 *m*^{2}*. Due au terrain, le coût d'un côté du cloturage est $20/m alors que pour les trois autres côtès le coût est $10/m. Quelles sont les dimensions du cloturage qui minimisent le coût?*

Solution.
1) Soient x et y les dimensions du cloturage. Donc on a $x, y > 0$. Il est donné que $xy = 5400$.
2) Le coût associé et

$$C = \underbrace{10(x + x + y)}_{\text{le coût de 3 côtés}} + \underbrace{20y}_{\text{le coût de 1 côté}} = 20x + 30y.$$

On cherche $x, y >$ tes que le coût C devient minimal.
3) On élimine une des variables dans la formule de C, disons y. De $xy = 5400$ on obtient $y = \frac{5400}{x}$, et alors

$$C = 20x + \frac{30 \cdot 5400}{x}.$$

Alors, on resout le problème: minimiser $C(x)$ pour $x \in I = (0, +\infty)$.
4) PCs. Les seuls PCs de C sont donnés par $C'(x) = 0$. Donc

$$C'(x) = 20 - \frac{30 \cdot 5400}{x^2} = 20\frac{x^2 - 30 \cdot 270}{x^2} = 0,$$

qui donne

$$x^2 - 30 \cdot 270 = 0, \quad x^2 = 30 \cdot 270 = 30 \cdot 30 \cdot 9, \quad x = 30 \cdot 3 = 90.$$

5) Classification. On a

$$C''(x) = \frac{30 \cdot 5400 \cdot 2}{x^3}, \quad C''(90) > 0$$

Donc $C(90)$ est un minimum local. Puisque $x = 90$ est le seul PC de C dans I on déduit que $C(90)$ est minimum global de C dans I.

6) On conclut que $x = 90$ et $y = \dfrac{5400}{90} = 60$ minimisent le coût. □

Example 3.33 *On se dispose de* 100 *mètres linéaire de filets à utiliser pour construire un bassin maritime rectangulaire qui servira pour l'élevage de poisson. Sâchant que toute côté du bassin doit être au moins* 2 *m, quelles sont les dimensions du bassin qui maximisent l'aire?*

Solution.

1) Soient x et y les dimensions du bassin rectangulaire. Il est donné que $2x + 2y = 100$, qui est équivalent à $x + y = 50$, et que $x, y \geq 2$. A noter que de cette condition il découle $x \geq 2$ et $x = 50 - y \leq 48$, donc $x \in I = [2, 48]$.

A maximser est l'aire $A = xy$, avec $x, y \geq 2$. On élimine une des variables, disons y, en utilisant la relation $x + y = 50$. Cette relation donne $y = 50 - x$ et alors $A(x) = x(50 - x)$.

Donc, à trouver la valeur maximale de $A(x) = x(50 - x)$ pour $x \in I = [2, 48]$.

2) PC. La fonction A est continue et sa dérivée est $A'(x) = 50 - 2x$. Puisque $A'(x) = 0$ donne $x = 25$ il en suit que $x = 25$ est le seul PC de A dans I.

3) Classification. On peut utiliser Théroème 3.9. En effet, puisque

$$A(2) = 2(50 - 2) = 96, \quad A(25) = 25^2 = 625, \quad A(48) = 48(50 - 2) = 96,$$

on conclut de que $x = 5$ est PC de maximum global. Donc, $x = 25$ et $y = 50 - 25 = 25$ sont les dimensions qui maximisent l'aire du bassin. □

Example 3.34 *Un pizzayol vend* 6000 *pizzas quand le prix par unité est de* \$10*. Le pizzayol a observé que pour toute augmentation/baisse du prix de pizza par* \$1 *les ventes baissent/augmentent de* 100 *pizzas.*

i) En supposant que la fonction demande est linéaire, trouvez les fonctions demande et revenue.

ii) Pour quel prix de pizza par unité le revenu devient maximal?

Solution.

1) Soit x la demande et $p(x)$ la fonction demande. Puisque $p(x)$ est linéaire, donc $p(x) = kx + b$, on a

$$k = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{+1}{-100} = \frac{-1}{+100} = -\frac{1}{100}.$$

Donc, $p(x) = -\dfrac{1}{100}x + b$. Puisque $p(6000) = 10$, on rempace $p = 10$, $x = 6000$ et on obtient b:

$$10 = -\frac{1}{100} \cdot 6000 + b, \quad \text{d'où } \; b = 10 - \left(-\frac{1}{100}\right) 6000 = 10 + 60 = 70.$$

Donc

$$p(x) = -\frac{1}{100}x + 70, \quad R(x) = xp(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 70x.$$

2) Donc, le problème est à trouver la valeur maximale de $R(x)$ pour $x \in I = [0, +\infty)$, et le prix associé.
3) PCs. On a

$$R'(x) = -\frac{1}{100}2x + 70 = -\frac{1}{50}x + 70.$$

Les points critiques sont donnés par $R'(x) = 0$, ce qui donne

$$-\frac{1}{50}x + 70 = 0; \quad \text{d'où } \ x = 70 \cdot 50 = 3500,$$

est le seul PC de $R(x)$.
4) Classification. De plus,

$$R''(x) = -\frac{1}{50} < 0.$$

Donc, à $x = 3500$ la fonction $R(x)$ atteint un maximum local. Or, puisque $x = 3500$ est le seul PC dans $[0, +\infty)$ il en suit que le maximum local est un maximum global.
5) Le prix qui correspond à $x = 3500$ est

$$p(3500) = -\frac{1}{100}3500 + 70 = -35 + 70 = 25.$$

Donc, pour un prix de pizza par unité de $25 le revenu devient maximal. □

Example 3.35 *Avec une pièce de carton de* 108 *cm*^{2} *on fait des boîtes rectangulaires de base carrée, avec la face du haut ouverte. Quelles sont les dimensions de la boîte qui maximise le volume?*

Solution.
1) Soit x la dimension d'une côté de la base (carrée), h l'hauteur de la boîte, A l'aire de la boîte et V son volume. Il est donné que

$$x, h > 0, \quad A = \underbrace{x^2}_{\text{la base du bas}} + \underbrace{4xh}_{\text{quatres faces lattérales}} = 108,$$

parce que la face du haut et ouverte.
A noter que puisque $x, y > 0$ et $x^2 = 108 - 4xh$ on déduit que $x \in I = (0, \sqrt{108})$.
2) Le volume est $V = x^2h$. On élimine h du volume en utilisant la relation $x^2 + 4xh = 108$. En effet

$$\begin{aligned} h &= \frac{108 - x^2}{4x}, \quad \text{d'où} \\ V &= x^2\frac{108 - x^2}{4x} = \frac{1}{4}x(108 - x^2) = \frac{1}{4}(108x - x^3). \end{aligned}$$

Donc, à maximiser $V(x)$ pour $x \in I$.
3) PCs et classification. Il en suit que

$$
\begin{aligned}
V'(x) &= \frac{1}{4}(108 - 3x^2),\\
V''(x) &= \frac{1}{4}(-6x).
\end{aligned}
$$

L'équation $V'(x) = 0$ donne

$$108 - 3x^2 = 0, \quad 3x^2 = 108, \quad x^2 = 36, \quad x = 6, \text{ (et } x = -6\text{; éliminé parce que } x > 0).$$

Puisque $V''(6) < 0$, $x = 6$ est un maximum local. Puisque $x = 6$ est le seul point critique de V dans I, on déduit que $V(6)$ est un maximum global de V.
4) En conlusion,

$$x = 6cm, \quad h = \frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3cm,$$

sont les dimensions qui maximisent le volume. □

Example 3.36 *On fait des boîtes rectangulaires de base carrée et face de haut ouverte, et de volume* 27 *cm*^{3}*, Le coût de la base est $20 par cm*^{2}*, alors que le coût de chaque face lattérale est de $10 par cm*^{2}*. Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent le coût?*

Solution.
1) Soit x la dimension de la base (carrée), h l'hauteur de la boîte et V son volume. Il est donné que

$$x, h > 0, \quad V = x^2 h = 27.$$

Notez qu'ici $x \in I = (0, +\infty)$.
Le coût est donné par

$$C = \underbrace{20 \cdot x^2}_{\text{le coût de la base}} + \underbrace{10 \cdot 4xh}_{\text{le coût des quatres faces laterales}} = 20x^2 + 40xh,$$

parce que la face du haut et ouverte.
2) Puisque V dépend de x et h, on élimine une des variables x, h, par exemple h, en utilisant $x^2h = 27$. On obtient $h = \frac{27}{x^2}$ et alors

$$C = 20x^2 + 40 \cdot x\frac{27}{x^2} = 20x^2 + 40 \cdot 27\frac{1}{x}.$$

Donc, à minimiser $C(x)$ pour $x \in I$.
3) PCs et classification. On a

$$C'(x) = 40x - \frac{40 \cdot 27}{x^2} = 40\frac{x^3 - 27}{x^2},$$

$$C''(x) \quad = \quad 40 + \frac{40 \cdot 27 \cdot 2}{x^3}.$$

L'équation $C'(x) = 0$ donne $x^3 = 27$, donc $x = 3$.

Puisque $C''(3) > 0$ on conclut que $C(3)$ est un minimum local. Puisque $x = 3$ est le seul point critique de C dans I on déduit que $C(3)$ est un minimum global de C.

4) En conlusion,

$$x = 3cm, \quad h = \frac{27}{3^2} = 3cm,$$

sont les dimensions qui minimisent le coût. □

Example 3.37 *La fonction demande d'un produit est donnée par $p(x) = e^{-2x}$, où x est le nombre des unités et $p(x)$ est le prix par unité. Quel prix par unité maximise le revenu?*

Solution.

1) Ici on a

$$R(x) = xp(x) = xe^{-2x}.$$

On charche à maximiser $R(x)$ pour $x \in I = (0, +\infty)$.

2) On a

$$\begin{aligned} R'(x) &= e^{-2x} - 2xe^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}, \\ R''(x) &= -2e^{-2x} + (1-2x)(-2)e^{-2x} = (-2-2(1-2x))e^{-2x} \\ &= 4(x-1)e^{-2x}. \end{aligned}$$

3) PCs et classification. Les solutions de $R'(x) = 0$ sont $1 - 2x = 0$, donc $x = \frac{1}{2}$ est le point critique de $R(x)$. Puisque $R''(\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2})e^{-1} < 0$, il suit que $x = \frac{1}{2}$ est un point de maximum local de R. De plus, comme $x = \frac{1}{2}$ est le seul point critique de R dans I, on conclut que $x = \frac{1}{2}$ maximise $R(x)$.

4) Le prix correspondant est $p(1/2) = e^{-1}$. □

Example 3.38 *On veut dessigner un cahier de notes en forme rectangulaire, dont l'aire de l'écriture est de 24 cm^2 et les marges verticales sont de 1 cm alors que les marges horizontales sont de 1.5 cm. Quelles sont les dimensions du cahier qui minimise l'aire totale du papier?*

Solution.

1) Soient x et y les dimensions de l'aire de l'écriture du cahier. Les dimensions de l'aire totale seront alors $x + 2$ et $y + 3$, parce que il y a deux marges verticales et deux horizontales.

Il est donnée que l'aire de l'écriture satisfait

$$xy = 24.$$

On cherche à minimiser l'aire totale du cahier, soit $A = (x+2)(y+3)$, pour $x > 0$ et $y > 0$.

Ici, on élimine une variable, disons y, en utilisant la relation $xy = 24$. De cette relation on obtient

$$\begin{aligned} y &= \frac{24}{x}; \text{ d'où} \\ A(x) &= (x+2)\left(\frac{24}{x}+3\right) = 24 + 3x + \frac{48}{x} + 6 \\ &= 3x + \frac{48}{x} + 30. \end{aligned}$$

Donc, à maximiser $A(x)$ pour $x \in I = (0, +\infty)$. Les bornes de I découlent du fait $x, y > 0$ et $x = \dfrac{24}{y}$.

2) On a

$$A'(x) = 3 - \frac{48}{x^2}, \qquad A''(x) = \frac{96}{x^3}.$$

3) PCs et classification. Les solutions de $A'(x) = 0$ sont

$$3 - \frac{48}{x^2} = 0, \quad 3x^2 - 48 = 0, \quad x^2 = 16, \quad x = 4, \ (x = -4 \text{ est éliminé parce que } x > 0)$$

Donc, $x = 4$ est le seul point critique de A dans I.

Puisque $A''(4) > 0$, on déduit que $x = 4$ est un point de minimum local. De plus, comme $x = 4$ est le seul point critique dans I on obtient que A atteint un minimum local à $x = 4$.

4) En conclusion,

$$x = 4 + 2 = 6cm, \ \ y = \frac{24}{x} + 3 = \frac{24}{4} + 3 = 9cm,$$

sont les dimensions du cahier qui minimise son aire totale. □

Example 3.39 *Une tige mince de métal de longueur ℓ est coupée en deux morceaux. La première partie est tordue pour créer un cercle alors que la deuxième est tordue pour créer un carré. Où doit-on couper la tige afin de minimiser l'aire totale des deux figures?*

Solution.

1) Soit r le rayon du cercle et a le côté du carré. Alors l'aire des deux figures est

$$A = \pi r^2 + a^2.$$

C'est A qu'on va minimiser.

On va éliminer une des variables, disons a. Comment? Notons que le périmètre des deux figures est ℓ. Donc

$$2\pi r + 4a = \ell; \ \text{ d'où } \ a = \frac{1}{4}(\ell - 2\pi r).$$

On remplace dans A et on obtient

$$\begin{aligned}A(r) &= \pi r^2 + \left(\frac{1}{4}(\ell - 2\pi r)\right)^2 = \pi r^2 + \frac{1}{16}(\ell - 2\pi r)^2 \\ &= \pi r^2 + \frac{1}{16}(2\pi r - \ell)^2, \quad r \in I := [0, \ell].\end{aligned}$$

3) PCs. Il en suit que

$$A'(r) = 2\pi r + \frac{1}{16} 2(2\pi r - \ell)(2\pi) = 2\pi\left(r + \frac{1}{8}(2\pi r - \ell)\right) = 2\pi\left(r\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\ell}{8}\right).$$

Alors, $A'(r) = 0$ donne

$$r = \frac{\frac{\ell}{8}}{1 + \frac{\pi}{4}} = \frac{\ell}{8 + 2\pi},$$

qui est le seul point critique de A.
4) Classification. Puisque

$$A''(r) = 2\pi\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

on conclut que $r = \dfrac{\ell}{8 + 2\pi}$ est un minimum local. Or, puisque $r = \dfrac{\ell}{8 + 2\pi}$ est le seul point critique dans I il en suit que ce minumim local est un minumum global.
5) En conculsion, la tige doit être coupér en deux morceaux de logueur

$$2\pi r = 2\pi \frac{\ell}{8 + 2\pi}, \quad \ell - 2\pi \frac{\ell}{8 + 2\pi} = \ell \frac{8}{8 + 2\pi},$$

afin de minimiser l'aire des deux figures. □

Example 3.40 *Avec une pièce de carton de 54π cm^2 on fait des boîtes cylindriques de base circulaire. Quelles sont les dimensions de la boîte qui maximise le volume?*

Solution.
1) Soit r le rayon de la base et h l'hauteur du cylindre, A l'aire de la boîte et V son volume. Il est donné que

$$r, h > 0, \quad 2\pi r^2 + 2\pi r h = 54\pi = A,$$

parce que l'aire d'une base est πr^2 et l'aire de la surface lattérale est $2\pi r h$.
2) Le volume est $V = \pi r^2 h$. On élimine h du volume en utilisant la relation $2\pi r^2 + 2\pi r h = 54\pi$, ou bien $r^2 + rh = 27$. En effet

$$h = \frac{27 - r^2}{h}, \quad \text{d'où}$$

$$V = \pi r^2 \frac{27-r^2}{r}, = \pi r(27-r^2) = \pi(27r - r^3).$$

Donc, à maximiser $V(r)$ pour $r \in I = (0, \sqrt{27})$. Les bornes de I sont trouvés par le fait que $r > 0$, $h > 0$ et que $r^2 = 27 - rh$, donc $r^2 < 27$, d'où $r < \sqrt{27}$.
3) Il en suit que

$$V'(r) = \pi(27 - 3r^2),$$
$$V''(r) = \pi(-6r).$$

4) PCs et classification. L'équation $V'(r) = 0$ donne

$$27 - 3r^2 = 0, \quad 3r^2 = 27, \quad r^2 = 9, \quad r = 3, \text{ (et } r = -3\text{; éliminé parce que } r > 0).$$

Le point critique $r = 3$ est un maximum local, parce que $V''(3) < 0$. Puisque $r = 3$ est le seul point critique de V dans I, on déduit que $r = 3$ est un point de maximum global de V.
5) En conlusion,

$$r = 3cm, \quad h = \frac{27 - 3^2}{3} = 6cm,$$

sont les dimensions qui maximisent le volume de la boîte. □

3.3.6 Problèmes

Problème 3.3.4 *Soit $f(x)$ une fonction donnée comme ci-dessous.*

i) Expliquez si f atteint son maximum et minimum dans l'intervalle $[a, b]$.

ii) Si oui, trouvez le maximum et minimum de f dans $[a, b]$ indiquée.

a) ^{s} $f(x) = x^3 - 4x + 1$, $[a, b] = [-3, 3]$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$, $[a, b] = [-2, 4]$,

c) ^{s} $f(x) = \frac{1}{x}$, $[a, b] = [1, 2]$

d) ^{s} $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$, $[a, b] = [1, 3]$

e) ^{s} $f(x) = xe^{-x}$, $[a, b] = [0, 2]$

f) $f(x) = x\ln(1 + x)$, $[a, b] = [0, 3]$

g) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, $[a, b] = [0, 2]$

h) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $[a, b] = [0, 3]$

Problème 3.3.5 *On considère tous les nombres $x, y \in [1, 100]$ tels que $xy = 100$. Quel est le pair (x, y) parmis eux qui minimise la somme $x + y$?*

Problème 3.3.6 *On considère tous les nombres $x, y \in [0, 500]$ tels que $x + y = 500$. Quel est le pair (x, y) qui maximise le produit xy?*

Problème 3.3.7 *On se dispose de* 100 *mètres linéaire de filets à utiliser pour construire un bassin maritime rectangulaire qui servira pour l'élevage de poisson. Sâchant que toute côté du bassin doit être au moins* 2 *m, quelles sont les dimensions du bassin qui maximisent l'aire?*

Problème 3.3.8 *Un agriculteur se dispose de* 1000 *mètre linéaire de cloture à utiliser pour clôturer un terrain en forme rectangulaire afin de confiner ses animaux. Un côté du terrain est délimité par un escarpement, et donc il a décidé de ne pas clôturer ce côté. Sâchant que toute côté de la clôture doit etre au moins* 5 *m, quelles sont les dimensions de la cloture qui maximisent l'aire?*

Problème 3.3.9 *Un agriculteur veut construre une cloturage de forme rectangulaire pour ses animaux, de* 3000 *m*^{2}*. Due au terrain, pour un côté du cloturage coût est de $20/m et pour les trois autres côtès le coût est de $10/m. Quelles sont les dimension qui minimisent le coût?*

Problème 3.3.10 *Un vendeur de hamburger vend* 2000 *hamburgers par semaine, à un prix de $10 par unité. D'expérience il sait qu'il vend* 250 *hamburger de plus pour toute réduction de $0.25. Supposant que la fonction demande et linéaire, à quel prix par unité son revenu sera maximal?*

Problème 3.3.11 *Avec une pièce de carton de* 108 *cm*^{2} *on veut faire une boîte rectangulaire de base carrée, avec la face (base) du haut ouverte. Quelles sont les dimensions de la boîte qui maximise le volume?*

Problème 3.3.12 *One fait des boîtes rectangulaires de base carrée et face de haut ouverte, et de volume* 125 *cm*^{2}*. Le coût de la base est $20 par cm*^{2}*, alors que le coût de chaque face lattérale est de $10 par cm*^{2}*. Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent le coût?*

Problème 3.3.13 *On veut dessigner un cahier de notes en forme rectangulaire, dont l'aire de l'écriture est de* 24 *cm*^{2} *et les marges verticales sont de* 1 *cm alors que les marges horizontales sont de* 1.5 *cm. Quelles sont les dimensions du cahier qui minimise l'aire totale du papier?*

Problème 3.3.14 *La fonction demande d'un produit est donnée par* $p(x) = e^{-2x}$*, où* x *est le nombre des unités et* $p(x)$ *est le prix par unité. Quel prix par unité maximise le revenu?*

3.4 Tracer le graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction est très utile parce qu'il donne une aperçue générale de la fonction. Les dérivées font un instrument analytique qui aide à visualiser le graphe des fonctions. Plus particulièrement, la dérivée première aide à identifier les intervalle de monotonie et les extrema, et la dérivée seconde à identifier les intervalles de convexité et les points d'inflexion.

Pour tracer le graphe d'une fonction, généralement, on suit les pas suivants.

1) On trouve $Dom(f)$.

2) On trouve les AV et AH.

3) One trouve les intersections avec les axes, c.à.d. les points $(x, 0)$ avec $f(x) = 0$ et $(0, f(0))$.

4) On calcule $f'(x)$. On resout $f'(x) = 0$.

5) On calcule $f''(x)$. On resout $f''(x) = 0$.

6) On cré un tableau avec quatres lignes et plusieures colonnes. Dans les lignes on met x, $f'(x)$, $f''(x)$ et $f(x)$. Dans les colonnes on mets les valeurs particulières de x qu'on a trouvé.

7) Dans ce tableau on identifie les PCs, les intervalles de monotonie, les extrema (globales et/ou locales), les PIs, les intervalles de concavité.

8) On trace le graphe de f.

Exemple 3.41 *Tracez le graphe de la fonction* $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1) Ici, $dom(f) = \mathbb{R}$.

2) L'ordonnée à l'origine est $(0, (f(0)) = (0, 6)$. *L'intersection avec l'axe des* x *est donnée par* $(x, 0)$ *avec* $f(x) = 0$. *On trouve une première racine de* $f(x) = 0$ *en essayant quelques valeurs* $x = 0, \pm 1, \pm 2$. *On vérifie que* $x = 1$ *est une solution. Pour trouver les autres racines on divise* $f(x)$ *par* $x-1$ *et on trouve* $f(x) = (x-1)(x^2-x-6) = (x-1)(x-3)(x-(-2))$. *Donc, les solutions sont* $x = -2, 1, 3$ *et les intersections avec l'axe des* x *sont les points* $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$.

3) f *étant un polynôme, il n'y a pas de AV et AH.*

4) On a

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5.$$

Alors, $f'(x) = 0$ *donne* $x = \frac{1}{6}(4 \pm \sqrt{16 + 60}) = \frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{19}) \approx -0.8, 2.3$, *qui sont les PCs.*

5) De plus,

$$f''(x) = 6x - 4,$$

d'où $f''(x) = 0$ *donne* $x = \dfrac{2}{3}$.

6) On crée le tableau, avec le signe de $f'(x)$, $f''(x)$ et les intervalles de monotonie et de concavité.

x	$-\infty$		-2		-0.8		$\frac{2}{3}$		1		2.3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\overset{\frown}{\nearrow}$	$\overset{\frown}{\nearrow}$	$\overset{\frown}{\nearrow}$	$\overset{\frown}{\nearrow}$	$\overset{\frown}{\textit{max. loc}}$	$\overset{\frown}{\searrow}$	PI	$\overset{\smile}{\searrow}$	$\overset{\smile}{\searrow}$		$\underset{\smile}{\textit{min. loc}}$	$\overset{\smile}{\nearrow}$	$\overset{\smile}{\nearrow}$	$\overset{\smile}{\nearrow}$	$\overset{\smile}{\nearrow}$

7) Ensuite on trace le graphe de f, see Fig. 18.

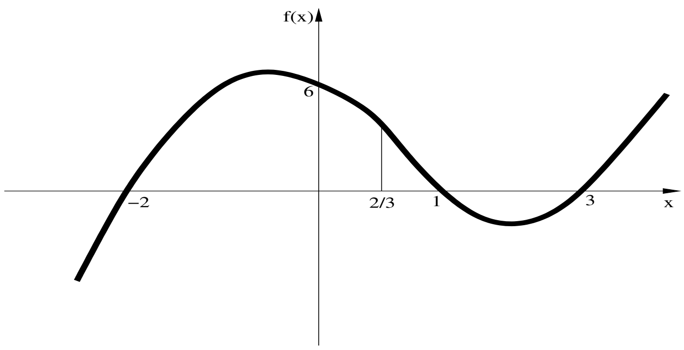


Figure 18: Le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Exemple 3.42 *Tracez le graphe de la fonction $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.*

1) Ici, $dom(f) = \mathbb{R}$.

2) L'ordonnée à l'origine est $(0, (f(0)) = (0, 1)$. L'intersection avec l'axe des x est donnée par $(x, 0)$ avec $f(x) = 0$. Donc $(1 - x^2)e^{-x} = 0$, or $1 - x^2 = 0$, d'où $x = \pm 1$, et alors $(\pm 1, 0)$ sont les points d'intersection avec l'axe des x.

3) f n'a pas de AV parce que f est continue, et $y = 0$ est AH à $x = +\infty$ parce que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

La fonction n'a pas de AH à $-\infty$ parce que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4) On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x)e^{-x} + (1-x^2)e^{-x}(-1) \\ &= (x^2-2x-1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Alors, $f'(x)=0$ *donne* $x^2-2x-1=0$ *d'où* $x = 1 \pm \sqrt{2} \approx -0.4, 2.4$*, qui sont les PCs.*

5) De plus,

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x-2)e^{-x} + (x^2-2x-1)e^{-x}(-1) \\ &= -(x^2-4x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Alors, $f''(x)=0$ *donne* $x^2-4x+1=0$ *d'où* $x = 2 \pm \sqrt{3} \approx 0.3, 2.7$*, qui sont les PCs.*

6) On crée le tableau, avec le signe de $f'(x)$*,* $f''(x)$ *et les intervalles de monotonie et de concavité.*

x	$-\infty$		-1		-0.4		0.3		1		2.4		2.7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\overset{\frown}{\nearrow}$	$\overset{\frown}{\nearrow}$	$\overset{\frown}{\nearrow}$	*max. loc.*	$\overset{\frown}{\searrow}$	PI	$\overset{\smile}{\searrow}$		$\overset{\smile}{\searrow}$	*min. loc.*	$\overset{\smile}{\nearrow}$	PI	$\overset{\frown}{\nearrow}$ $\overset{\frown}{\nearrow}$	$\overset{\frown}{\nearrow}$

7) Ensuite on trace le graphe de f*, see Fig. 19.*

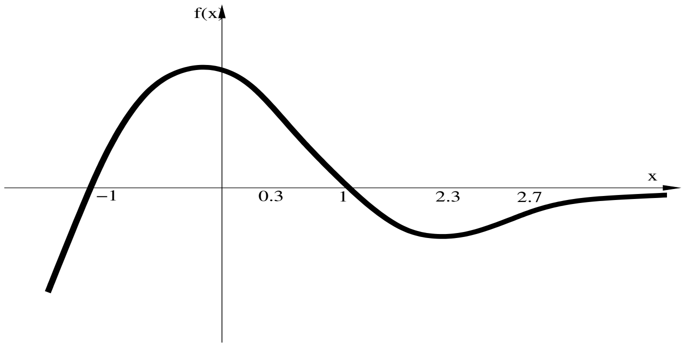


Figure 19: Le graphe de la fonction $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$

3.4.1 Problèmes

Problème 3.4.1 *Tracer le graphe des fonctions suivantes:*

a) $f(x) = x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + 10x + 9$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

g) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

h) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

i) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

j) $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

k) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x}$

l) $f(x) = x \ln x$

4 Calcul intègral

Le calcul intègral a été inventé simultanement par Leibniz et Newton au 17ème siècle. Leur travail été motivé en grande partie par la solution des problèmes de la vie réelle.

A la fin de ce chapitre l'étudiant

- ✓ aura une compréhension de la notion de l'intègrale et des téchniques de base de calcul des intègrales,
- ✓ et pourra appliquer les outils du calcul intègral aux domaines diverses, tels que finances et géomètrie.

4.1 Motivation

Pourquoi veut-on intégrer une fonction? Qu'est-ce-que c'est l'intègrale d'une fonction? On considère deux exemples pour donner une première motivation.

L'aire d'une région. Considérons la région R délimitée par le graphe de f et sur l'intervalle $[a, b]$, voir Fig. 20, à gauche. Une façon très naturelle de calculer l'aire de R est d'abord le

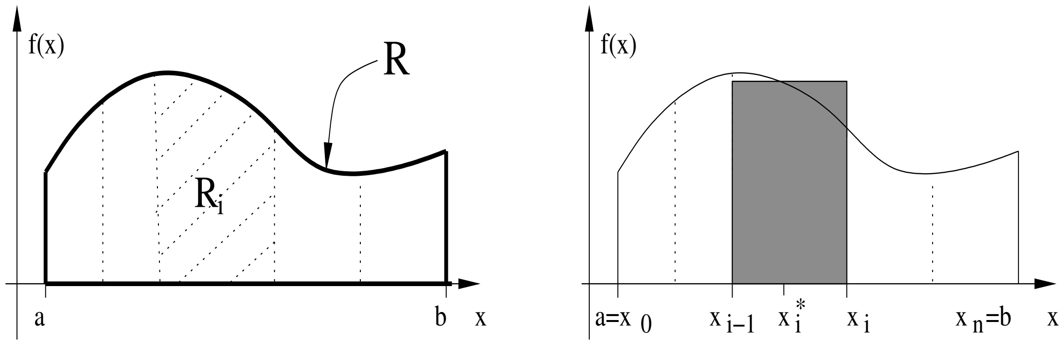


Figure 20: A gauche: la région R sous le graphe de $y = f(x)$ et sur $[a, b]$ et les sous-régions R_i; à droite, la même région avec les sous-rectangles R_i^*.

l'approcher. Par exemple, on peut divisier l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égalles, de taille Δx, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Soient $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ les points des divisions, avec $x_i = x_0 + i\Delta x$, $i = 0, 1, \ldots, n$, et $[x_{i-1}, x_i]$ les intervalles ainsi crées. On note par R_i la région sous le graphe de f et sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, voir Fig. 20, à droite. Alors

$$A(R) = A(R_1) + \cdots + A(R_n) = \sum_{i=1}^{n} A(R_i).$$

On approche l'aire $A(R_i)$ comme suit. Dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ on prend un point x_i^* et on considère le rectangle R_i^* de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur $f(x_i^*)$, voir Fig. 20, à droite. Alors on approche $A(R_i)$ par $A(R_i^*) = (x_i - x_{i-1})f(x_i^*) = f(x_i^*)\Delta x$. Donc

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Alors, on peut définir $A(R)$ comme

$$A(R) = \lim_{\Delta x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Remarque 4.1 *Parfois, on écrit Δx au lieu de h. Alors, la limite ci-dessus devient*

$$A(R) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

C'est de cette forme, qui a été utilisé par les inventeurs du calcul intègral, l'origine de l'écriture moderne de l'intègrale de f dans $[a, b]$, c.à.d. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

L'accumulation d'une quantité . On s'intéresse à l'accumulation de quelque chose. Soit $F(t)$ la fonction qui donne la quantité de la chose au temps t, et $f(t)$ son taût de change. Par example on peut considérer que $F(t)$ est la balance d'un compte bancaire déposée avec un intêrèt qui est composé continûment, et $f(t)$ et le taûx de change de la balance $F(t)$.

On peut calculer la some d'argent qui entre dans le compte pendant l'intervalle $[a, b]$. D'une part, cette somme d'argent est donné par $F(b) - F(a)$. D'autre part cette somme peut être compter comme suit. On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égalles, et soient $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ les points de division. Alors,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(t_i) - F(t_{i-1})).$$

Notons que $F(t_i) - F(t_{i-1})$ donne la somme d'argent nette qui entre dans le compte dans l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$. Cette somme peut s'approcher par $f(t_i^*)\Delta t$, avec $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ et $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, ce qui donne

$$F(b) - F(a) \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t.$$

Laissant n tendre vers l'infini (ou $\Delta t \to 0$), il en résulte que

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t,$$

ce qui est équivalent à

$$F(b) - F(a) = A(R), \tag{27}$$

où $A(R)$ est l'aire sous le graphe de $f(t)$ et sur $[a, b]$. Ce raisonement s'applique à l'intervalle $[a, t]$, auquel cas on aurait

$$F(t) - F(a) = A(R(t)),$$

où $A(R(t))$ est l'aire sous le graphe de $f(t)$ et sur $[a, t]$.

4.2 Integrale indéfinie

On a vu que la formule (27) est vraie pour F une fonction telle que $F'(x) = f(x)$. Si on croît que ceci est vraie pour les régions délimitée par une fonction f (ce qui en effet est vraie), pour trouver l'aire $A(R)$ on est mené à trouver les fonctions F telles que $F'(x) = f(x)$. Cette observation conduit premièrement à l'étude de l'intègrale indéfinie.

4.2.1 Définitions.

1) Soit $I \subset \mathbb{R}$ une intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $F : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction primitive de f dans I si

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

2) On écrit toutes les primitives de f par

$$\int f(x)dx,$$

et on le lit "integrale indefinie de f(x) dx". Parfois on évite le mot "indéfinie".

4.2.2 Premiers résultats

Résumons ci-bas quelques premières propriétes de l'intègrale.

1) Si F est une primitive de f dans I alors toutes les primitives de f dans I sont de la forme $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, donc

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$, parce que $(f(x) + C)' = f'(x)$.

3) $\int 1dx = x + C$, parce que $(x + C)' = 1$.

4) $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, parce que $\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right)' = x^n$.

5) $\int e^x dx = e^x + C$, parce que $(e^x + C)' = e^x$. en général $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k}e^x + C$, parce que $\left(\frac{1}{k}e^{kx}x + C\right)' = e^{kx}$.

6) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, parce que $(\ln|x| + C)' = \dfrac{1}{x}$.

7) $\displaystyle\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$.

Exemple 4.1 *Soit* $f'(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} - 4e^{-5x}$ *avec* $f(0) = 1$. *Trouvons* $f(x)$ *et* $f(1)$. *On a*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int f'(x)dx \\
&= \int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} - 4e^{-5x}\right)dx \\
&= \int \left(2x^{1/2} - 3x^{-1/2} - 4e^{-5x}\right)dx \\
&= 2\frac{x^{3/2}}{3/2} - 3\frac{x^{1/2}}{1/2} - 4\frac{1}{-5}e^{-5x} + C \\
&= \frac{4}{3}x^{3/2} - 6x^{1/2} + \frac{4}{5}e^{-5x} + C.
\end{aligned}$$

Pour trouver C *on utilise la condition* $f(0) = 1$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\cdot 0^{3/2} - 6\cdot 0^{1/2} + \frac{4}{5}e^{-5\cdot 0} + C &= 1, \\
\frac{4}{5} + C &= 1, \\
C &= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{4}{3}x^{3/2} - 6x^{1/2} + \frac{4}{5}e^{-5x} + \frac{1}{5}, \\
f(1) &= \frac{4}{3} - 6 + \frac{4}{5}e^{-5} + \frac{1}{5}. \\
&= -\frac{67}{15} + \frac{4}{5}e^{-5}.
\end{aligned}$$

4.2.3 Téchniques d'intégration (intègrales indéfinies)

Contrairement au calcul de la dérivée, le calcul des intèglrales est en général difficile. La raison est que l'intègrale est au fait l'opération inverse de la dérivée.

Il y a deux méthodes qu'on utilise couramment pour trouver les intègrales.

4.2.3.1 Changement de variable / substitution. Dans cette méthode, pour toute fonction dérivable g on va utiliser la notation suivante

$$\frac{dg}{dx} = g'(x), \quad \text{donc} \quad dg = g'(x)dx.$$

Alors, si on pose $t = g(x)$ on aura

$$dt = g'(x)dx.$$

Il en suit que

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{=t})\underbrace{g'(x)dx}_{=dt} = \int f(t)dt, \quad \textit{où on a posé } t = g(x).$$

Alors, si F est une primitive de f, c.à.d. $F'(x) = f(x)$ on a

$$\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)dx &= F(t) + C \\ &= F(g(x)) + C. \end{aligned} \tag{28}$$

Example 4.2

$$\begin{array}{rl} \displaystyle\int xe^{x^2}dx & \textit{[on pose } t = x^2\textit{]} \\ \| & \textit{[donc } dt = 2xdx \textit{ et } xdx = \frac{1}{2}dt\textit{; on remplace]} \\ \displaystyle\int \frac{1}{2}e^t dt & \\ \| & \textit{[on intègre]} \\ \displaystyle\frac{1}{2}e^t + C & \\ \| & \textit{[on revient à la variable initiale]} \\ \displaystyle\frac{1}{2}e^{x^2} + C. & \end{array}$$

Example 4.3

$$\begin{array}{rl} \displaystyle\int x\sqrt{10 - x^2}dx & \textit{[on pose } t = 10 - x^2\textit{]} \\ \| & \textit{[donc } dt = -2xdx \textit{ et } xdx = -\frac{1}{2}dt\textit{; on remplace]} \\ \displaystyle\int (-\frac{1}{2})\sqrt{t}dt & \\ \| & \textit{[on intègre]} \\ \displaystyle -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C & \end{array}$$

$$\begin{array}{c}\| \\ -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C \\ \| \\ -\frac{1}{3}(10-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.\end{array}$$

[on revient à la variable initiale]

Example 4.4

$$\int \frac{x}{5-x}dx \qquad \textit{[on pose } t=5-x\textit{]}$$

$$\| \qquad \textit{[donc } dt=-dx,\ dx=-dt \textit{ et } x=5-t\textit{; on remplace]}$$

$$\int \frac{5-t}{t}(-dt)$$

$$\|$$

$$-\int\left(\frac{5}{t}-1\right)dt \qquad \textit{[on intègre]}$$

$$\|$$

$$-5\ln|t|+t+C$$

$$\| \qquad \textit{[on revient à la variable initiale]}$$

$$-5\ln|5-x|+5-x+C.$$

4.2.3.2 Intérgration par parties. Intégration par parties se base sur la formule de différentiation du produit des fonctions, comme suit

$$f(x)g'(x)=(f(x)g(x))'-f'(x)g(x).$$

On en déduit la formule suivante de l'intègration par parties:

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)dx &= \int((f(x)g(x))'-f'(x)g(x))dx \\ &= f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx. \qquad (29)\end{aligned}$$

Example 4.5

$$\int xe^x dx \qquad \textit{[on pose } f(x)=x,\ g'(x)=e^x\textit{]}$$

$$\| \qquad \textit{[donc } f'(x)=1,\ g(x)=e^x\textit{]}$$

$$\int f(x)g'(x)dx \qquad \textit{[on remplace]}$$

$$\| \qquad \textit{[et on applique la formule (29)]}$$

$$f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$
\begin{array}{rl}
 = & \\
xe^x - \displaystyle\int e^x dx & \textit{[on intègre]} \\
 = & \\
xe^x - e^x + C. &
\end{array}
$$

Example 4.6

$$
\begin{array}{rl}
\displaystyle\int xe^{-3x}dx & \textit{[on pose } f(x) = x,\ g'(x) = e^{-3x}\textit{]} \\
 = & \textit{[donc } f'(x) = 1,\ g(x) = -\tfrac{1}{3}e^{-3x}\textit{]} \\
\displaystyle\int f(x)g'(x)dx & \textit{[on remplace]} \\
 = & \textit{[et on applique la formule (29)]} \\
f(x)g(x) - \displaystyle\int f'(x)g(x)dx & \\
 = & \\
-\dfrac{1}{3}xe^{-3x} + \dfrac{1}{3}\displaystyle\int e^{-3x}dx & \textit{[on intègre]} \\
 = & \\
-\dfrac{1}{3}xe^{-3x} - \dfrac{1}{9}e^{-3x} + C. &
\end{array}
$$

Example 4.7

$$
\begin{array}{rl}
\displaystyle\int x^n \ln x dx & \textit{[on pose } f(x) = \ln x,\ g'(x) = x^n\textit{]} \\
 = & \textit{[donc } f'(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \displaystyle\int g'(x)dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\textit{]} \\
\displaystyle\int f(x)g'(x)dx & \textit{[on remplace]} \\
 = & \textit{[et on applique la formule (29)]} \\
f(x)g(x) - \displaystyle\int f'(x)g(x)dx & \\
 = & \\
\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \displaystyle\int \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\dfrac{1}{x}dx & \\
 = & \\
\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int x^n dx & \textit{[on intègre]} \\
 = & \\
\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \dfrac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C. &
\end{array}
$$

Example 4.8

$$
\begin{array}{rl}
\displaystyle\int (2x-1)\ln x dx & \textit{[on pose } f(x)=\ln x,\ g'(x)=2x-1\textit{]} \\
\shortparallel & \textit{[donc } f'(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=\displaystyle\int g'(x)dx = x^2-x\textit{]} \\
\displaystyle\int f(x)g'(x)dx & \textit{[on remplace]} \\
\shortparallel & \textit{[et on applique la formule (29)]} \\
\displaystyle f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx & \\
\shortparallel & \\
\displaystyle (x^2-x)\ln x-\int (x^2-x)\frac{1}{x}dx & \\
\shortparallel & \\
\displaystyle (x^2-x)\ln x-\int (x-1)dx & \textit{[on intègre]} \\
\shortparallel & \\
\displaystyle (x^2-x)\ln x-\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)+C. &
\end{array}
$$

4.2.4 Problèmes

Problème 4.2.1 *Trouvez les primitives suivantes:*

a) $^s \displaystyle\int (-1)dx$

b) $\displaystyle\int (3-2x+\frac{1}{4}x^2)dx$

c) $^s \displaystyle\int \left(\frac{3}{x}+5x^2-9\sqrt{x}-x^{7/2}\right)dx$

d) $\displaystyle\int (2x-1)(3x^2+5)dx$

e) $^s \displaystyle\int (3-2x)^2dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3-5x^2}{3x}dx$

Problème 4.2.2 *Soient $f'(x)$ et $f(a)$ donnés comme ci-dessous. Trouvez $f(b)$.*

a) $^s\ f'(x)=4x^{-3/2}-3x^{-1},\ f(1)=2.$ *Trouvez* $f(4)$

b) $f'(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+e^{-x},\ f(0)=4.$ *Trouvez* $f(1)$

c) $^s\ f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}-5x+3,\ f(1)=0.$ *Trouvez* $f(4)$

d) $f'(x)=e^{1-x}+\dfrac{3}{\sqrt{1+3x}},\ f(1)=0.$ *Trouvez* $f(0)$

Problème 4.2.3 *Calculez les intégrales suivantes avec la méthode de substitution (changement de variable):*

a) $^s\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

b) $\displaystyle\int xe^{-3x^2}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{2-7x}dx$

d) $^s\displaystyle\int e^{9-5x}dx$

e) $^s\displaystyle\int \frac{x}{5-x}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{(x^{1/3}+5)^3}{x^{2/3}}dx$

g) $^s\displaystyle\int x\sqrt{9-x^2}dx$

h) $\displaystyle\int xe^{-3x^2}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x}{3x+4}dx$

k) $\displaystyle\int x(2+7x^2)^{11}dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x}{3-x^2}dx$

Problème 4.2.4 *Calculez les intégrales suivantes avec la méthode de l'intégration par parties:*

a) $\displaystyle\int xe^{x}dx$

b) $^s\displaystyle\int xe^{-3x}dx$

c) $\displaystyle\int \ln x dx$

d) $^s\displaystyle\int x^{-3}\ln x dx$

e) $\displaystyle\int x\ln x dx$

f) $\displaystyle\int x^2\ln x dx$

g) $\displaystyle\int x\ln(x^2+1)dx$

h) $\displaystyle\int (2x+3)\ln x dx$

i) $\displaystyle\int x^{-4}\ln x dx$

j) $^s\displaystyle\int (3x^2-2x)e^{x}dx$

4.3 Intègrale définie

Du point de vue pratique, l'intégrale définie donne l'accummulation d'une certaine quantité pendant un certain intervalle $[a, b]$, ou bien l'aire de la région sous le graphe d'une fonction. Avant de procéder avec des applications on va élaborer quelques définitions et téchniques.

4.3.1 Définitions et premiers résultats.

1) Soit $I \subset \mathbb{R}$ une intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction, et F une primitive de f dans I, c.à.d. $F'(x) = f(x)$. Pour $a, b \in I$, “l’intègrale définie “ de f entre a et b est définie par

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b.$$

Le nombre a est la borne inférieure, et b est la borne supérieure. La fonction f est “l’intègrand”

Remarque 4.2 *La valeur de* $\int_a^b f(x)dx$ *est indépendante du choix de la primitive* F*, parce que si* $G(x)$ *est une autre primitive de* f *alors* $G(x) = F(x) + C$*, pour certaine constante* C*, et donc*

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

De plus, la définition $\int_a^b f(x)dx$ *a bien un sens avec* a *et* b *dans n’importe quel ordre.*

2) Pour tout $a \in I$ et toute fonction f on a

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3) Si $a, b, c \in I$ on a

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

4) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

4.3.2 Théorème fondamental du calcul

Le théorème suivant donne le lien entre l’intègrale définie est l’aire de la région sous le graphe d’une fonction.

Theorem 4.3 (le théorème de l’aire) *Soit* $y = f(x)$ *une fonction continue et non-négative dans l’intervalle* $[a, b]$*. De plus soit* A *l’aire de la région sous le graphe de* f *et sur l’intervalle* $[a, b]$*. Alors*

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Voici le théorème fondamental du calcul. Il donne le lien entre la dérivée et l'intègrale.

Theorem 4.4 (le théorème fondamental du calcul) *Soit $y = f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$. Pour $x \in [a, b]$ on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors F est continue dans $[a, b]$ et est une primitive de f dans (a, b), c.à.d.*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Remarque 4.5 *Ce théorème montre que la dérivation et l'intègration sont deux opérations inverse de l'une l'autre, dans le sense que l'application succéssive de ces deux opérations ne change pas la fonction, notemment*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) &= f(x), \\ \int_a^x \frac{df(t)}{dt}dt &= f(x), \quad \textit{si } f(a) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 4.6 *L'intègrale définie peux étre introduite avec les sommes de Riemann, ce qui d'ailleurs est la méthode mathématique (voir l'introduction de ce chapitre). Pour ceci, soit $n \in \mathbb{N}$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i \cdot \Delta x$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Pour chaque i, on choisi un point $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Alors, on définie les somme*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

S_n est dite "somme de Riemann". Elle represente une approximation de l'aire de la région sur $[a, b]$ et sous le graphe de $y = f(x)$, voir Fig. 21. Ensuite on définit

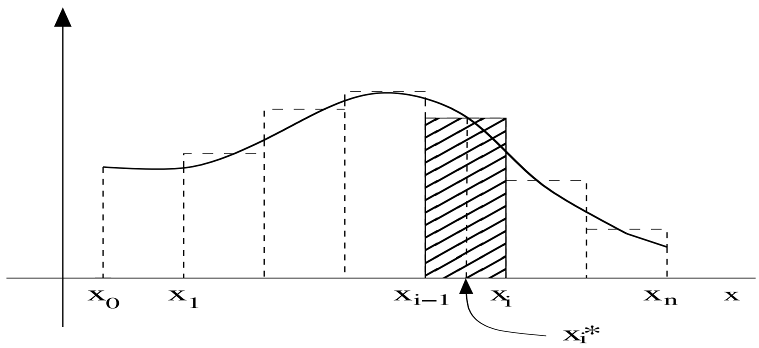


Figure 21: La région entre le graphe de $y = f(x)$ et $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x.$$

Cette limite existe, indépendemment du choix des points x_i^*, pour des classes larges de fonctions, par exemple pour les fonctions continues (ou continues par morceaux) dans $[a, b]$.

4.3.3 Téchniques d'intègration (intègrales définies)

Pour les intègrales définies on utilise les mêmes téchniques d'intègration que pour les intégrales indéfinies (la méthode de substitution, voir l'équation (28), et la méthode d'intègration par parties, voir (29)). Simplement, à la fin, on évalue la primitive aux bornes de l'intègrale, c.à.d. si $F(x) = \int f(x)dx$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

4.3.4 Problèmes

Problème 4.3.1 *Calculez les inégrales définies suivantes:*

a) $^s \int_1^1 (3e^{x^2+7\sqrt{x}} + \ln(1+x^2))dx$

b) $\int_0^1 \left(\sqrt{x} + e^{1-2x} + \dfrac{1}{1+x}\right) dx$

c) $^s \int_0^1 (x^2 + x^{1/2})dx$

d) $^s \int_2^3 (x+1)\sqrt{x-2}dx$

e) $\int_0^1 \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

f) $\int_1^2 x \ln x dx$

g) $\int_0^1 \dfrac{1}{(8x+1)^{1/2}}dx$

h) $\int_0^1 e^{1-2x}dx$

i) $\int_0^1 x\sqrt{10-x^2}dx$

j) $\int_0^1 x^{-1/2}e^{x^{-1/2}}dx$

k) $\int_1^2 (x+2)(x+1)^3dx$

l) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

m) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

n) $\int_0^3 xe^{x^2}dx$

o) $^s \int_0^2 |x^2-1|dx$

p) $\int_{-2}^3 |x-1|dx$

q) $\int_{-1}^{1} |x - x^2| dx$

r) $\int_{-1}^{2} x|x| dx$

4.4 Application de l'intégrale

Dans cette section on verra trois applications de l'intègrale: une en géomètrie et deux en finances.

4.4.1 L'aire d'une région bornée par deux courbes

Soit $y = f(x)$ et $y = g(x)$ deux fonctions continues dans $[a, b]$, soit R la région sur l'intervalle $[a, b]$ et entre les graphes des fonction f et g, voir Fig. 22. Alors on a ce résultat.

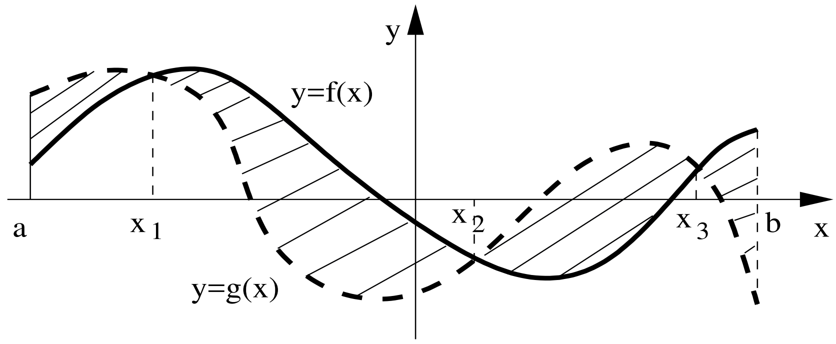


Figure 22: La région R entre les graphes des fonctions $y = f(x)$ et $y = g(x)$

Proposition 4.7 *L'aire A de la région R est donnée par*

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx. \tag{30}$$

Dans la pratique on utilse (30) avec l'algorithme suivant.

Algorithme pour le calcul de l'aire

1) D'abord, on étudue le signe de $h(x) := f(x) - g(x)$. Pour ceci on trouve les solutions de

$$h(x) = 0.$$

2) Pour fixer les idées, supposons qu'il y a trois racines $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, avec $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$.

3) Ensuite, on trouve le signe de $h(x)$, dans chaque sous-intervalle (a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, b). Pour ceci it suffit de prendre un point dans chaque intervalle et d'évaluer $h(x)$. Le signe de la valeur $h(x)$ qu'on obtient est le signe de h dans toute l'intervalle en question.

   Pour fixer les idées, on suppose que le signe de $h(x)$ est comme dans le tableau qui suit.

x	a		x_1		x_2		x_3		b
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert h(x)\rvert$		$-h(x)$	0	$+h(x)$	0	$-h(x)$	0	$+h(x)$	

4) De ce tableau de signe on déduit la formule pour $|h(x)|$. Alors, on a

$$A = \int_a^{x_1} (-h(x))dx + \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} (-h(x))dx + \int_{x_3}^{b} h(x)dx.$$

Remarque 4.8 *A noter que parfois l'intervalle $[a, b]$ n'est pas donnée, notemment quand la région est juste entre les deux graphes. Dans ce cas l'intervalle est trouvée comme suit. D'abord on trouve les racines de $f(x) - g(x) = 0$. Alors $[a, b]$ est avec a la plus petite des racines et b la plus grande des racines, voir Fig. 23.*

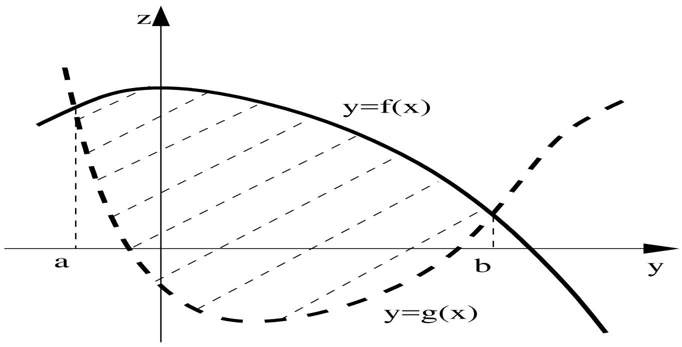


Figure 23: La région R entre les graphes des fonctions $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les points d'intersection

Exemple 4.9 *Calculez l'aire de la région R délimitée par les graphes des fonctions $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = 3x$ et sur $[a, b] = [0, 2]$.*
Solution.
Il faut étudier le signe de $h(x) := f(x) - g(x)$. Pour ceci, on resout d'abord $h(x) = 0$. Donc,

$$h(x) = x^2 + 2 - 3x = 0, \quad x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}) = \frac{1}{2}(3 \pm 1), \quad x = 1,\ x = 2.$$

Pour le signe de $h(x)$ on fait un tableau:

x	$-\infty$		0		1		2		∞
$h(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit que

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 h(x)dx + \int_1^2 (-h(x))dx \\
&= \int_0^1 (x^2+2-3x)dx + \int_1^2 (-(x^2+2-3x))dx \\
&= \left[\left(\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{3}{2}x^2\right)\right]_0^1 + \left[-\left(\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{3}{2}x^2\right)\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{1}{3}+2-\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}2^3+2\cdot 2-\frac{3}{2}2^2\right) + \left(\frac{1}{3}+2-\frac{3}{2}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Exemple 4.10 *Calculez l'aire de la région R délimitée par les graphes des fonctions $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}}$, $g(x)=-2x$ et sur $[a,b]=[0,3]$.*

Solution.

A nouveau, il faut étudier le signe de $h(x):=f(x)-g(x)$. La solution de $h(x)=0$ est

$$
\begin{aligned}
h(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - (-2x) &= 0, && \textit{on multiplie par } \sqrt{x+1}\textit{:} \\
x + 2x\sqrt{x+1} &= 0, \\
x(1+2\sqrt{x+1}) &= 0, && \textit{donc} \\
x &= 0.
\end{aligned}
$$

Pour le signe de $h(x)$ on fait un tableau:

x	-1		0		3		∞
$h(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	

On déduit que

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^3 h(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} + 2x\right)dx \\
&= \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx + [x^2]_0^3
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx + 9.$$

On calcule $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ *avec la méthode de substitution:*

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx \qquad \Big| \textit{On pose } u = x+1\textit{; alors } x = u-1 \textit{ et } dx = du.$$
$$\|$$
$$\int \frac{(u-1)}{\sqrt{u}}du \qquad \Big| \textit{On substitue}$$
$$\|$$
$$\int (u^{1/2} - u^{-1/2})du$$
$$\|$$
$$\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + C \qquad \Big| \textit{On revient à } x \textit{ en remplaçant } u = x+1]$$
$$\|$$
$$\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + C.$$

Alors

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2}\right]_0^3 + 9 \\ &= \left(\frac{2}{3}4^{3/2} - 2\cdot 4^{1/2}\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) + 9 \\ &= \frac{16}{3} - 4 + \frac{4}{3} + 9 \\ &= \frac{35}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 4.11 *Calculez l'aire de la région* R *délimitée par les graphes des fonctions* $f(x) = \sqrt{x}$ *et* $g(x) = x^2$.

Solution.

Ici, a *et* b *ne sont pas donnés. Pour les trouver il faut d'abord trouver les points d'intersection des graphes. On resout donc* $h(x) := f(x) - g(x) = 0$*, or*

$$\begin{aligned} h(x) &:= \sqrt{x} - x^2 = 0, \\ \sqrt{x}(1 - x^{3/2}) &= 0, \\ \sqrt{x} &= 0, \quad \textit{ou } 1 - x^{3/2} = 0, \\ x &= 0, \quad \textit{ou } \ x = 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$A = \int_0^1 |h(x)| dx.$$

Que vaut $|h(x)|$ *dans* $(0, 1)$*? Pour ceci on étudie le signe de* $h(x)$ *par le tableau:*

x	0		1		∞
$h(x)$		$+$	0	$-$	

Donc

$$A = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Exemple 4.12 *Calculez l'aire de la région* R *délimitée par les graphes des fonctions* $f(x) = 2x^2 + 10$ *et* $g(x) = 4x + 16$*.*

Solution.

A nouveau a *et* b *ne sont pas donnés. On les trouve en resolvant* $h(x) = f(x) - g(x) = 0$*. On a*

$$\begin{aligned} h(x) &= (2x^2 + 10) - (4x + 16) = 2(x^2 - 2x - 3) = 0, \\ x^2 - 2x - 3 &= 0, \text{ d'où} \\ x &= \frac{1}{2}(2 + \sqrt{4 + 12}) = \frac{1}{2}(2 \pm 4), \\ x &= -1,\ x = 3. \end{aligned}$$

Donc,

$$A = \int_{-1}^3 |h(x)| dx.$$

On étudie le signe de $h(x)$*:*

x	$-\infty$		-1		3		∞
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 (-h(x))dx \\ &= \int_{-1}^3 (-2(x^2 - 2x - 3))dx \\ &= -2\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^3 \\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

4.4.2 Les surplus

Rappelons-nous d'abord les fonctions demande et l'offre.

i) La fonction demande d'un produit, notée $p = p(x)$, associe le prix par unité p du produit, quand la demande est x, c.à.d. quand les consomateurs sont prèts à acheter x unitiés de ce produit à ce prix p par unité.

   Parfois, on donne la fonction inverse de cette fonction, c.à.d. $x = x(p)$.

ii) La fonction offre est similaire à la fonction demande, mais vue de la perspective des fabricants qui cherchent à vendre. La fonction offre, notée $s = s(x)$, donne le prix par unité s du produit, quand la demande est x, c.à.d. quand les fabricants sont prèts à vendre x unitiés de ce produit à ce prix s par inité.

Le surplus du consomatuer (SC) et le suplus du producteurs (SP) sont définis comme suit (voir Fig. 24).

Procédure pour calculer les surplus

i) On définie le point d'équilibre (PE) (x_0, y_0) en resolvant d'abord l'équation

$$p(x) = s(x).$$

   Soit x_0 la solution, et $p_0 = p(x_0)$. Alors, PE=(x_0, y_0).

ii) On définit les surplus par

$$SC = \int_a^{x_0} (p(x) - p_0)dx, \qquad SP = \int_0^{x_0} (p_0 - s(x))dx.$$

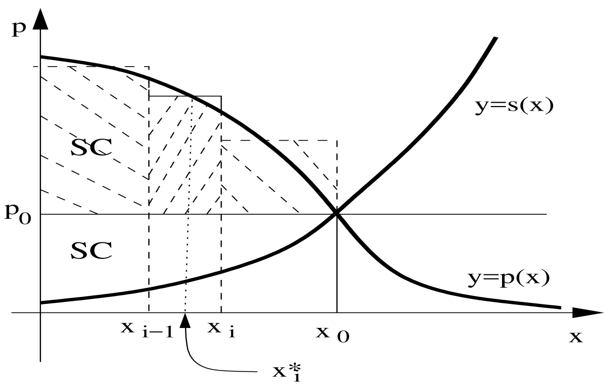


Figure 24: La fonction demande, offre, le point d'équilibre et les surplus

Pourquoi de telles définitions?

Au fait, au point d'équilibre les consomateurs et les producteurs s'entendent d'acheter/de vendre x_0 unités à un prix p_0. Or, pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$, le prix par unité est en moyenne $p(x_i^*)$. Alors, $(x_i - x_{i-1})$ consomateurs sentent d'avoir gagné $p(x_i^*) - p_0$ (parce que le prix d'achat est p_0). En total, par rapport au prix d'équilibre, les consomateurs ont gagné

$$\begin{aligned} SC_n &= p(x_1^*)(x_1 - 0) + p(x_2^*)(x_2 - x_1) + \cdots + p(x_n^*)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(x_i^*)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Or S_n est une somme de Riemann de la fonction $p(x) - p_0$. D'où la formule pour SC.

Le raisonnement pour SP est similaire.

Exemple 4.13 *Calculez le point d'équilibre et les surplus du consomateur et du producteur si* $p(x) = -3x + 9$, $s(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Solution.

On trouve le point d'équilibre:

$$\begin{aligned} p(x) &= s(x) \\ -3x + 9 &= \frac{1}{2}x + 2, \\ x_0 &= 2, \\ p_0 &= p(x_0) = s(x_0) = 3. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} SC &= \int_0^2 (-3x + 9 - 3)dx = 6, \\ SP &= \int_0^2 (3 - \frac{1}{2}x - 2)dx = 1. \end{aligned}$$

Exemple 4.14 *Calculez le point d'équilibre et les surplus du consomateur et du producteur si* $p(x) = 9e^{-x}$, $s(x) = e^x$.

Solution.

On trouve le point d'équilibre:

$$\begin{aligned} p(x) &= s(x) \\ 9e^{-x} &= e^x, \\ e^{2x} &= 9, \\ x_0 &= \frac{1}{2}\ln 9 = \ln 9^{1/2} = \ln 3, \\ p_0 &= p(x_0) = s(x_0) = e^{\ln 3} = 3. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
SC &= \int_0^{\ln 3} (9e^{-x} - 3)dx = \left[-9e^{-x} - 3x\right]_0^{\ln 3} = 6 - \ln 27, \\
SP &= \int_0^{\ln 3} (3 - e^x)dx = [3x - e^x]_0^{\ln 3} = \ln 27 - 2.
\end{aligned}$$

Exemple 4.15 *Calculez le point d'équilibre et les surplus du consomateur et du producteur si* $p(x) = 15 - x^2$, $s(x) = x + 3$.
Solution.
On trouve le point d'équilibre:

$$\begin{aligned}
p(x) &= s(x) \\
15 - x^2 &= x + 3, \\
x^2 + x - 12 &= 0, \\
x_0 &= \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 48}) = \frac{1}{2}(-1 \pm 7), \\
x_0 &= 3, \\
p_0 &= s(x_0) = 4.
\end{aligned}$$

La racine $x_0 = -4$ *est éliminée puisqu'elle est négative. Alors*

$$\begin{aligned}
SC &= \int_0^3 \left(15 - x^2 - 4\right) dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 18, \\
SP &= \int_0^3 (4 - x - 3)dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Exemple 4.16 *Calculez le point d'équilibre et les surplus du consomateur et du producteur si* $p(x) = \dfrac{8}{x+1}$, $s(x) = x + 3$.
Solution.
On trouve le point d'équilibre:

$$\begin{aligned}
p(x) &= s(x) \\
\frac{8}{x+1} &= x + 3, \\
(x + 3)(x + 1) &= 8, \\
x^2 + 4x - 5 &= 0, \\
x_0 &= \frac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{16 + 20}) = \frac{1}{2}(-4 \pm 6), \\
x_0 &= 1, \\
p_0 &= s(x_0) = 4.
\end{aligned}$$

La racine $x_0 = -5$ est éliminée puisqu'elle est négative. Alors

$$\begin{aligned} SC &= \int_0^1 \left(\frac{8}{x+1} - 4\right) dx = [8\ln|x+1| - 4x]_0^1 = 8\ln 2 - 4, \\ SP &= \int_0^1 (4 - x - 3)dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4.4.3 Problèmes

Problème 4.4.1 *Calculez l'aire de la région R délimitée par les graphes des fonctions f et g données ci-dessous, et entre $x = a$ et $x = b$. Aux cas où $x = a$ et $x = b$ ne sont pas donnés, la région R est délimitée par les graphes de f et g.*

a) $f(x) = x,$ $\quad g(x) = x - x^2,$ $\quad a = -1,$ $\quad b = 1$

b) $f(x) = x^2,$ $\quad g(x) = x^{1/3},$ $\quad a = 0,$ $\quad b = 1$

c) $f(x) = x^2 - 1,$ $\quad g(x) = 1 - x,$ $\quad a = -2,$ $\quad b = 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)},$ $\quad g(x) = 0,$ $\quad a = 0,$ $\quad b = 1$

e) $f(y) = \dfrac{1}{2}y^2 - 3,$ $\quad g(x) = x - 1$

f) $f(x) = \sqrt{2x+6},$ $\quad g(x) = x - 1$

Problème 4.4.2 *Calculez le point d'équilibre et les surplus du consomateur et du producteur dans les cas suivants:*

a) $p(x) = \dfrac{4}{\sqrt{3x+1}},$ $\quad s(x) = \sqrt{x+3}$

b) $p(x) = \dfrac{20}{x+1},$ $\quad s(x) = x + 2$

c) $p(x) = \sqrt{5+4x},$ $\quad s(x) = x$

d) $p(x) = -50x + 2000,$ $\quad s(x) = 10x + 500$

4.5 Valeur future et valeur présente

Rappelons que si on dépose une somme P dans un compte bancaire, avec un intérêt annuel r qui est composé continûment, alors la balance du compte au temps t sera

$$F(t) = Pe^{rt}.$$

Parfois, $F(t)$ est appellé "valeur future au temps t" et P "valeur présente", et on note

$$V_F = Pe^{rt}, \quad V_P = P.$$

Il arrive que l'argent est déposé continûment pendant une période $[0,T]$, par exemple un flux de revenu continu. Soit $R(t)$ le flux d'argent[5] déposé au compte au temps t, $t \in [0,T]$. Alors, la balance du compte au temps T sera donnée par

$$F(T) = \int_0^T R(t)e^{r(T-t)}dt,$$

où r est l'intérêt annuel composée continûment. On définit[6]

$$V_F = \int_0^T R(t)e^{r(T-t)}ds, \quad \text{resp.} \quad V_P = \int_0^T R(t)e^{-rt}ds,$$

appellée "valeur future au temps t", resp. "valeur présente" du revenu $R(t)$ pendant T années. Notons qu'on a

$$V_F = e^{rT}V_P.$$

Remarque 4.9 *V_F représente la valeur au temps T du flux de revenu continu $R(t)$ déposé avec un intérêt annuel r composé continûment. V_P represnte la valeur qu'on devrait déposer aujourd'hui afin qu'après T années cette valeur avec son intérêt annuel r composé continûment vaut V_F.*

Exemple 4.17 *Vous avez l'opportunité d'acheter une activité qui génère \$10,000/année de profit continûment pendant 10 années. L'intérêt annuel est de 3%, composé continûment. Vaut-il acheter cette activité pour \$70,000?*
Solution. *Pour repondre à cette question, il faut calculer V_P de cette activité et la comparer avec* $70,000$.

Ici $R(t) = 10,000$, $r = 0.03$ et $T = 10$. Donc

$$\begin{aligned} V_P &= \int_0^{10} 10,000e^{-0.03t}dt \\ &= 10,000\frac{1}{-0.03}[e^{-0.03t}]_0^{10} = 10,000\frac{1}{0.03}(1-e^{-0.3}) \approx 86,393\$. \end{aligned}$$

Comme V_P est plus grand que le prix d'achat, il vaut bien acheter cette activité.

Pour finir, calculons aussi V_F. Notons que $V_F = e^{rT}V_P$, donc

$$\begin{aligned} V_F &= e^{10\cdot 0.03}V_P \\ &\approx 116,619\$. \end{aligned}$$

[5] Ceci signifie que pendant tout interval de temps $[t, t+dt]$ le revenu est $R(t)dt$. Par exemple, pour une personne avec un salaire annuel $\$100,000$ le flux d'argent dans son compte est $R(t) = 100,000$.

[6] Cette définition vient du fait que pendant l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ le flux d'argent est $R(t_i^*)\Delta t$, où $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ et $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, qui en composant l'intérêt à la fin donne $R(t_i^*)e^{(T-t_i^*)r}\Delta t$. Donc, le flux $R(t)$ à la fin donne approximativement $\sum_{i=1}^n R(t_i^*)e^{(T-t_i^*)r}\Delta t$, ce qui conduit à cette définition

4.5.1 Problèmes

Problème 4.5.1 *Trouvez la valeur future d'un flux continu de revenu donné par* $R(t) = 15 + 10t$ *pendant* 10 *années, où* t *est le temps en années et* $R(t)$ *est en dollars, si l'intérêt est %3 par année et est composé continûment.*

Problème 4.5.2 *Trouvez la valeur future d'un flux continu de revenu donné par* $R(t) = 1000 + (500t + 100)^{1/2}$ *pendant* 10 *années, où* t *est le temps en années et* $R(t)$ *est en dollars, si l'intérêt est %6 par année et est composé continûment.*

Problème 4.5.3 *Vous avez l'opportunité d'acheter une activité qui produit $50,000/année continûment pendant* 10 *années. L'intérêt annuel est de 5%, composé continûment. Vaut-il acheter cette activité pour $200,000?*

Problème 4.5.4 *Il est attendu qu'une activité nouvelle génère un revenu continu de $30,000 par année pour les 5 années prochaines. La banque offre un intérêt annuel de %4 par année, composé continûment. Le prix de vente de l'activité est de $150,000. Vaut-il l'accheter?*

5 Calcul multi-dimensionnel

Les phénomènes et les activités de la vie sont bien complexes et les fonctions d'une variable sont incapable de les décricre. Par exemple, une entrprise produit plusieurs articles, disons n, n entier, en quantité $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Le coût total C serait alors un nombre qui dépend de tous les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Par exemple, si $n = 2$ on pourrait avoir

$$C = 3x_1 + 10x_2 + 7x_1x_2^3.$$

Cette situation conduit naturellement à la notion de la fonction de plusieurs variable. A la fin de ce chapitre l'étudiant

- ✓ aura une compréhension de la notion de la fonction de plusieurs variables,
- ✓ apprendra les notions de continuité et des dérivées partielles des fonctions à plusieurs variables,
- ✓ et pourra appliquer des outils du calcul multi-dimensionnel à la résolution des problèmes d'optimisation en dimension deux.

5.1 Rappels de quelques éléments de base

On rappelle l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Si x est un nombre réel, on écrit $x \in \mathbb{R}$. Maintenant on considère $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui est l'ensemble des pairs des nombres réels, donc

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y), \;\; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Si (x, y) est un pair de nombres réels on écrit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Parfois on écrit $\mathbb{R}^2$ au lieu de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les nombres x et y sont les coordonnées du pair (x, y).

De façon similaire on considère $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui est l'ensemble des triples des nombres réels, donc

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z), \;\; x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Si (x, y, z) est un pair de nombres réels on écrit $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Parfois on écrit $\mathbb{R}^3$ au lieu de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les nombres x, y et z sont les coordonnées du triple (x, y, z).

Ce raisonnement conduit à l'enseble des n-tuples des réels, noté par $\mathbb{R}^n$. Dans ce cours on se limite au cas $n = 2$.

Présentation géometrique. Il y a une description géometrique des élements de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Par exemple, $x \in \mathbb{R}$ s'indentifie par un point dans l'axe des x, voir Fig. 25, gauche.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont des couples et ils s'identifient avec des points dans le plan xy. Plus précisement, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est donné, on trace le rectangle avec des côtés de longueur x et y, parallèles aux axes et avec un noeud à l'origine. Le noeud diagonal à l'origine représente le pair (x, y), voir Fig. 25, centre.

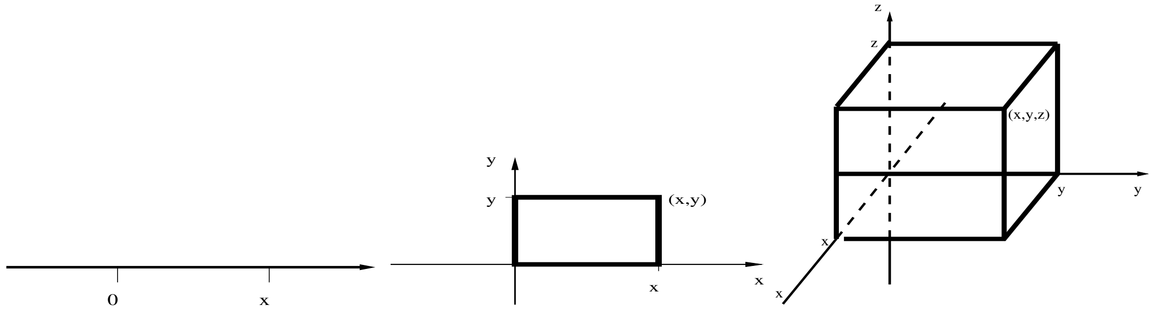


Figure 25: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et la présentation géomètrique des leurs éléments.

Similairement, les éléments de $\mathbb{R}^3$ sont des triples et s'identifient avec des points dans l'espace xyz. Dans ce cas on utilise le système (trois-dimmensionnel) cartesien de coordonnées xyz, voir Fig. 25, droite. Plus précisement, si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est donné, on trace le parallélépipède avec des côtés de longueur x, y et z et parallèles aux axes x, y et z, et un noeud à l'origine. Le point (x, y, z) est le noeud du parallélépipède diagonal à l'origine, voir Fig. 25, droite.

Enfin, rappelons-nous que la distance entre deux points est donnée comme suit.

i) En dimension un: si $P = x_1$, $Q = x_2$ alors

$$d(P, Q) = |x_1 - x_2|,$$

ii) En dimension deux: si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ alors

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, et$$

iii) En dimension trois: si $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$ alors

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Exemple 5.1 *Les points de cercle de rayon r et centre $C = (a, b)$ sont tous les points $P(x, y)$ tels que $d(P, C) = r$. Donc,*

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} &= r, \\
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2, \\
(y-b)^2 &= r^2 - (x-a)^2, \quad \textbf{\textit{d'où}}, \\
y &= b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}.
\end{aligned}$$

De façon similaire, les points de la sphère de rayon r et centre $C = (a, b, c)$ sont tous les points $P(x, y, z)$ tels que $d(P, C) = r$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} &= r, \\
(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 &= r^2, \\
(z-c)^2 &= r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2, \quad \textbf{\textit{d'où}}, \\
z &= c \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}.
\end{aligned}$$

5.2 Fonctions de deux variables

Par définition, une fonction à deux variables est de la forme

$$\begin{array}{lccc} f: & \mathbb{R}^2 & \mapsto \mathbb{R}, & \\ & x \in Dom(f) & \mapsto & z = f(x) \in Im(f). \end{array} \tag{31}$$

Ici $\mathbb{R}^2$ est l'espace du départ, $\mathbb{R}$ est l'espace d'arrivée, f represente une loi, généralement donnée par une formule, qui à tout $(x, y) \in Dom(f)$ associe une valeur unique $z = f(x, y) \in Im(f)$, (x, y) est la variable et $z = f(x)$ est la valeur de la fonction.

$Dom(f)$ est "le domaine de f" et $Im(f)$ est "l'image de f" définis comme suit

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x, y) \text{ est bien défini}\}, \\ Im(f) &= \{f(x, y),\ (x, y) \in Dom(f)\}. \end{aligned}$$

Remarque 5.1 *Notons que pour noter la variable (x, y) et la fonction f, on peut utiliser n'importe quelles lettres, telles que (u, v) et g. Dans la plupart de ce cours on va utiliser (x, y) et f.*

Par définition, "graphe $G(f)$ d'une fonction f" est l'ensemble des points $(x, y, f(x, y))$ dans un système trois dimensionnel de coordonnées,

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in Dom(f)\}.$$

Example 5.2 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x - y$.*

Ici, $Dom(f) = \mathbb{R}$, puisque $f(x, y)$ est bien défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$. Aussi $Im(f) = \mathbb{R}$. En effet, soit $z \in \mathbb{R}$. Alors, alors il existe $(x, y) \in Dom(f)$ tel que $z = f(x, y) = x - y$. Par exemple, si $y = 0$ alors $x = z$. Donc $f(z, 0) = z$.

Example 5.3 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{y - x}$.*

Ici, $Dom(f) = \{(x, y),\ y - x \geq 0\} = \{(x, y),\ x \leq y\}$. Aussi $Im(f) = [0, +\infty)$. En effet, si $z \geq 0$, alors il existe $(x, y) \in Dom(f)$ tel que $z = f(x, y) = \sqrt{y - x}$, c.à.d. $y - x = z^2$. Par exemple, si $x = 0$ alors $y = z^2$. Donc $f(0, z^2) = \sqrt{z^2 - 0} = z$.

Exemple 5.4 *Traçons le graphe de quelques fonctions élémentaires.*

a) $z = C$. Ici, le graphe est le plan horizontal parallel au plan xy qui interesecte l'axe z au point $(0, 0, C)$, voir Fig. 26, la 1ère de la gauche.

b) $x = C$. Ici, le graphe est le plan vertical parallel au plan yz qui interesecte l'axe x au point $(C, 0, 0)$, voir Fig. 26, la 2ème de la gauche.

c) $y = C$. Ici, le graphe est le plan vertical parallel au plan xz qui interesecte l'axe y au point $(0, C, 0)$, voir Fig. 26, la 3ème de la gauche.

d) En général, le graphe d'une fonction $z = ax + by + c$ est un plan, voir Fig. 26, la 4ème de la gauche.

e) $x^2+y^2+z^2=r^2$ *(la sphère de rayon* r*), voir Fig. 27, la 1ère de la gauche;* $z=x^2+y^2$ *(le parboloïd), voir Fig. 27, la 2ème de la gauche;* $z=x^2-y^2$ *(le hyperboloïd), voir Fig. 27, la 3ème de la gauche.*

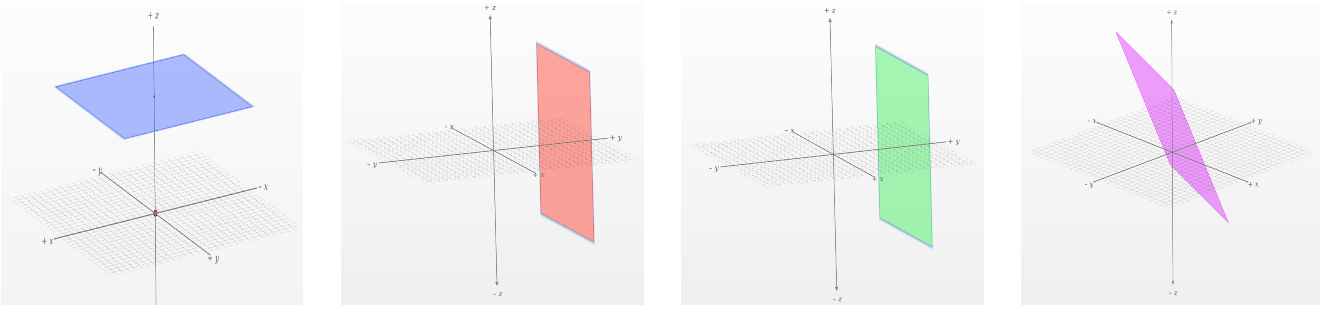


Figure 26: Le graphe de $z=C$, $x=C$, $y=C$ et $z=ax+by+c$

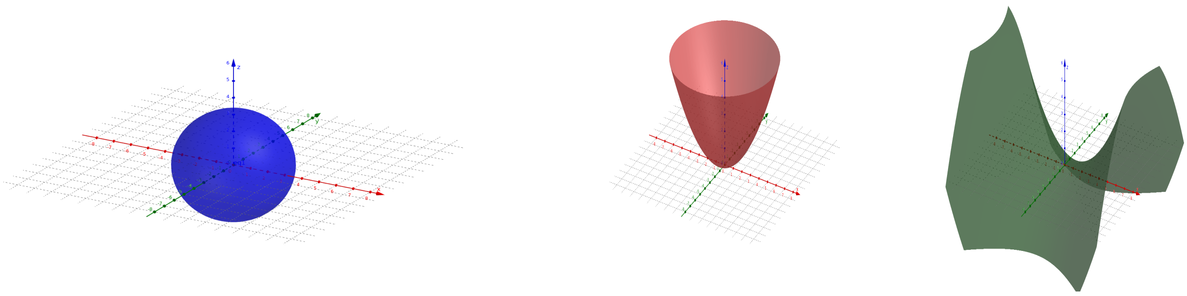


Figure 27: Le graphe de $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z=x^2+y^2$ et $z=x^2-y^2$

5.3 Problèmes

Problème 5.3.1 *Trouvez le domaine de définition et l'image des fonctions suivantes:*

a) ^{s} $f(x,y)=4x-5y-\dfrac{3x}{x^2+7y^2+1}$

b) ^{s} $f(x,y)=\dfrac{x}{2x-3y}$

c) ^{s} $f(x,y)=\sqrt{2x-7y}$

d) $f(x,y)=\ln(5y-3x)$

e) $f(x,y)=2x^2+9y^2$

f) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Problème 5.3.2 *Esquisez le graphe des fonctions suivantes:*

a) $f(x,y) = C,\ C$ *constante*

b) $f(x,y) = 2x - 5y + 3$

c) $f(x,y) = x^2$

d) $f(x,y) = y^2$

e) $f(x,y) = x^2 + y^2$

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

g) $f(x,y) = 3x$

h) $f(x,y) = 5y$

5.4 Continuité et les dérivées des fonctions à deux variables

Soit $z = f(x,y)$ une fonction à deux variables donnée pour $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, avec $D = Dom(f)$.

5.4.1 Continuité

Pour définir la continuité de la fonction f, on a besoin d'introduire la notion de l'approchement dans $\mathbb{R}^2$. Par définition:

on dit que $(x,y) \in D$ s'approche à $(x_0, y_0) \in D$ ssi $|x - x_0| + |y - y_0|$ s'approche à 0.

Dans ce cas on écrit $(x,y) \to (x_0, y_0)$.

Définition 5.2 *On dit que f est continue à point $(x_0, y_0) \in D$ si et seulement si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Si f est continue à tout point $(x,y) \in D$, on dit que f est continue dans D et on écrit $f \in C^0(D)$.

Proposition 5.3 *Toute fonction algèbrique de deux variables, incluant les fonctions expononticlles et logarithmiques, est continue dans son domaine de définition.*

5.4.2 Les dérivées partielles

La notion des dérivées partielles se base sur la dérivée (usuelle) d'une fonction à une variable.

Définition 5.4 *Soit $f \in C^0(D)$ et $(x,y) \in D$.*

La dérivée partielle de f par rapport (p.r.) à x au point (x,y), notée $f_x(x,y)$ ou $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, est définie par

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \tag{32}$$

quand la limite existe.

De façon similaire, la dérivée partielle de f p.r. à y au point (x, y), notée $f_y(x, y)$ ou $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, est définie par

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}, \tag{33}$$

quand la limite existe.

Si $f_x(x, y)$ et $f_y(x, y)$ existent alors on dit que f est dérivable au (x, y). De plus, si $f_x(x, y)$ et $f_y(x, y)$ existent pour tout $(x, y) \in D$, on dit que f est dérivable dans D.

Donc, le calcul des dérivées partielles est très simple. Pour calculer $f_x(x, y)$ on dérive f p.r. à x en considérant y comme une constante, tout en appliquant les régles de dérivation. Egalemment, pour calculer $f_y(, x, y)$ on dérive f p.r. à y en considérant x comme une constante.

Exemple 5.5 *Calculons f_x et f_y pour les fonction suivantes.*

1) $f(x, y) = ax + by + c$*, donc*

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= (ax)_x + (by)_x + c_x = ax_x + by_x + 0 = a\cdot 1 + b\cdot 0 + 0 \\
&= a, \\
f_y(x,y) &= (ax)_y + (by)_y + c_y = ax_y + by_y + 0 = a\cdot 0 + b\cdot 1 + 0 \\
&= b;
\end{aligned}$$

2) $f(x, y) = ax^2 + bxy + d\dfrac{x+y}{x-y}$*, donc*

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= a2x + by + d\frac{(x+y)_x(x-y) - (x+y)(x-y)_x}{(x-y)^2} \\
&= 2ax + by + d\frac{(x-y) - (x+y)}{(x-y)^2} \\
&= 2ax + by - 2d\frac{y}{(x-y)^2}, \\
f_y(x,y) &= a\cdot 0 + bx + d\frac{(x+y)_y(x-y) - (x+y)(x-y)_y}{(x-y)^2} \\
&= bx + d\frac{(x-y) + (x+y)}{(x-y)^2} \\
&= bx + 2d\frac{x}{(x-y)^2}.
\end{aligned}$$

Une fois les dérivées partielles (premières) obtenues, on peut considérer les dérivées partielles de ces dérivées et alors on obtient les dérivées partielles seconde de f.

Définition 5.5 *On définit les dérivés partielle secondes de f par*

$$f_{xx}(x,y) = (f_x(x,y))_x, \tag{34}$$
$$f_{xy}(x,y) = (f_x(x,y))_y, \tag{35}$$
$$f_{yx}(x,y) = (f_y(x,y))_x, \tag{36}$$
$$f_{yy}(x,y) = (f_y(x,y))_y. \tag{37}$$

Les dérivées f_{xy} et f_{yx} sont appellées les dérivées partielles secondes mixtes de f. La dérivée f_{xx} est la dérivée partielle secondes de f p.r. à x, et la dérivée f_{yy} est la dérivées partielle secondes de f p.r. à y.

De façon similaire, on définit les dérivées partielles de tout ordre.

À noter le théorème de Clairaut, qui dit:

$$\textit{si } f \textit{ a des dérivées secondes continues dans } D \textit{ alors} \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y). \tag{38}$$

De plus on a ce résultat.

Proposition 5.6 *Toute fonction algèbrique de deux variables, incluant les fonctions exponontielles et logarithmiques, est dérivable à tout ordre dans son domaine de définition.*

5.4.3 Problèmes

Problème 5.4.1 *Trouvez les dérivées partielles premières des fonctions suivantes*

a) $^s\ f(x,y) = 2y - 13x + 20$

b) $^s\ f(x,y) = xy - 3x^2y + 4xy^2 - x^2y^2$

c) $f(x,y) = x^2y^3 + 7\dfrac{y}{x}$

d) $f(x,y) = (2x+y)(4xy-1)$

e) $^s\ f(x,y) = e^{xy}$

f) $f(x,y) = \ln(2x - 6y + xy)$

g) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{3x-2y}$

h) $f(x,y) = e^{xy - \frac{y}{x}}$

i) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{y-1}\right)^4$

j) $f(x,y) = \ln(1 + e^{xy})$

Problème 5.4.2 *Trouvez les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes*

a) $^s\ f(x,y) = xy$

b) $^s\ f(x,y) = x^{10}y^{-10}$

c) $f(x,y) = 3x^2 - xy + 5y^2 - 2x + 7y - 1$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = e^{xy}$

f) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

g) $^s\ f(x,y) = 2x - xy + x^3y - x^2y^6$

h) $^s\ f(x,y) = \dfrac{x}{1-y}$

i) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+xy}$ *j)* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$

5.5 Le plan tangent et l'apporiximation avec le plan tangent

Au cas de la dimension un, si $z = f(x)$ est une function dérivable à x_0, on a déjà vu que l'équation de la droite tangente au graphe de f passant par (x_0, z_0), où $z_0 = f(x_0)$, est donnée par

$$z = \ell(x) := f'(x_0)(x - x_0) + z_0. \tag{39}$$

Une formule similaire est vraie pour le plan tangent au graphe d'une function $z = f(x, y)$.

En effet, si on suppose que $z = f(x, y)$ admet des dérivées partielles à (x_0, y_0), alors l'équation du plan tangent au graphe de f au point (x_0, y_0, z_0), avec $z_0 = f(x_0, y_0)$ est donnée par

$$z = \pi(x, y) := f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0. \tag{40}$$

Notons que si $y = y_0$ alors (40) devient l'équation de la droite tangente au graphe de $z = f(x, y_0)$. De même, si $x = x_0$ alors (40) devient l'équation de la droite tangente au graphe de $z = f(x_0, y)$.

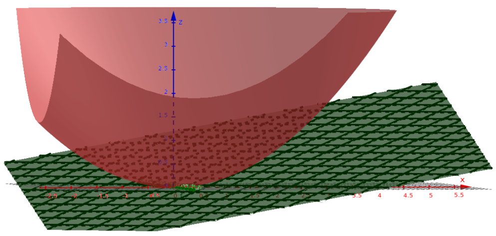


Figure 28: Le graphe de $z = f(x, y)$ et son plan tangent 'a $x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Remarque 5.7 *Comme dans le cas de la dimension un, les valeurs des fonctions à deux variables $f(x, y)$ peuvent être approchées par les valeurs de l'équation de leur plan tangent. Notemment, si (x, y) est proche de (x_0, y_0) alors*

$$f(x, y) \approx \pi(x, y) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0 \quad \textit{pour} \quad (x, y) \approx (x_0, y_0).$$

Démontrons cette idée à travers de quelques exemples.

Exemple 5.6 *Trouvons une approximation de $\sqrt{5}$ en utilsant l'approximation par le plan tangent de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x + y}$.*

Notons que $5 = f(x,y)$ *avec* $(x,y) = (2+1/2, 2+1/2)$. *Donc, si on pose* $(x_0,y_0) = (2,2)$ *alors* $(x,y) = (x_0+1/2, y_0+1/2) = (2.5, 2.5)$. *Maintenant, si* $\pi(x,y)$ *est l'équation du plan tangent à* (x_0,y_0), *alors* $f(x,y) = \sqrt{5} \approx \pi(x,y)$ *parce que* $(x,y) = (2.5,2.5)$ *est proche de* $(x_0,y_0) = (2,2)$.

Pourquoi on a choisi $(x_0,y_0) = (2,2)$? *Le choix de* $(x_0,y_0) = (2,2)$ *est à la fois pour que* (x_0,y_0) *soit proche de* (x,y) *et que* $f(x_0,y_0)$ *soit calculé facilement (même si* f *a une racine carrée). Ici,* $f(x_0,y_0) = \sqrt{2+2} = 2$

Maintenant, procédons à l'approximation de $\sqrt{5}$. *D'abord on trouve l'équation du plan tangent. On a*

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{x+y}}, \quad f_x(x_0,y_0) = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4},\\
f_y(,x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{x+y}}, \quad f_y(x_0,y_0) = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4},\\
\pi(x,y) &= f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)\\
&= \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4}(y-2) + \sqrt{2+2}\\
&= \frac{1}{4}(x+y) + 1; \quad \textit{d'où}\\
\sqrt{5} &= f(2+1/2, 2+1/2)\\
&\approx \pi(2+1/2, 2+1/2)\\
&= \frac{1}{4}(2.5+2.5) + 1 = \frac{5}{4} + 1 =\\
&= \frac{9}{4} = 2.25
\end{aligned}$$

Notons que la valeur exacte est $\sqrt{5} = 2.23606...$.

Pour une meilleure approximation, on peut prendre $(x_0,y_0) = \left(\frac{49}{18}, \frac{49}{18}\right)$. *En effet, ici*

$$\begin{aligned}
(x,y) &= \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = (x_0,y_0) - \left(\frac{4}{18}, \frac{4}{18}\right), \qquad \left(\textit{parce que } \tfrac{5}{2} = \tfrac{49}{18} - \tfrac{4}{18}\right)\\
f(x_0,y_0) &= \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3},\\
f_x(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\cdot 7/3} = \frac{3}{14},\\
f_y(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\cdot 7/3} = \frac{3}{14}.
\end{aligned}$$

Donc l'équation du plan tangent est

$$\pi(x,y) = \frac{3}{14}(x - \frac{49}{18}) + \frac{3}{14}(y - \frac{49}{18}) + \frac{7}{3}.$$

Il en suit

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &= f\left(\frac{49}{18}-\frac{2}{9}, \frac{49}{18}-\frac{2}{9}\right) \\
&\approx \pi\left(\frac{49}{18}-\frac{2}{9}, \frac{49}{18}-\frac{2}{9}\right) \\
&= -\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{9}-\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{9}+\frac{7}{3} \\
&= \frac{94}{42} \approx 2.23809,
\end{aligned}$$

ce qui donne une meilleure approximation de $\sqrt{5} = 2.23606...$. □

5.5.1 Problèmes

Problème 5.5.1 *Trouvez l'équation du plan tangent aux graphes des fonctions suivantes aux points spécifiés:*

a) ^{s} $f(x,y) = 1 + x^2y + (x-1)y^2$ *au* $(1,2,3)$

b) $f(x,y) = xy\sqrt{8-x-y}$ *au* $(2,2,8)$

c) $f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ *au* $(0,0,a)$

d) ^{s} $f(x,y) = xy^2 - \dfrac{x}{y}$ *au* $(1,2,f(1,2))$

e) $f(x,y) = (x+y)e^x$ *au* $(0,2,f(0,2))$

f) $f(x,y) = xy - \dfrac{1}{x+y} - x^2 + y^2$ *au* $(1,2,f(1,2))$

Problème 5.5.2 *Trouvez une approximation des racines carrées suivantes, en utilisant l'approximation avec le plan tangent de la fonction* $f(x,y)$ *au points specifiés.*

a) $\sqrt{3} = ?$*; prenez* $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ *et le plan tangent au* $(x_0,y_0) = (2,2)$

b) $\sqrt{10} = ?$*; prenez* $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ *et le plan tangent au* $(x_0,y_0) = (3,3)$

c) $\sqrt[3]{10} = ?$*; prenez* $f(x,y) = \sqrt[3]{x+y}$ *et le plan tangent au* $(x_0,y_0) = (4,4)$

5.6 Optimisation à deux variables

Soit $z = f(x, y)$ une fonction continue dans une domaine D, borné est fermé. Le problème est de trouver les valeurs extremales de f dans D. Notemment, on considère le problème:

Trouver m, M tels que

$$m = \min\{f(x, y),\ \ (x, y) \in D\}, \quad M = \max\{f(x, y),\ \ (x, y) \in D\}. \tag{41}$$

La valeur m est appellée "minimum (global) de f dans D", et M est appellée "maximum (global) de f dans D". Les deux sont appellés "extrema (globales) de f dans D".

Est-ce-que les extrema de f dans D existent? La reponse est oui.

Theorem 5.8 *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné est fermé et $f \in C^0(D)$. Alors les extrema de f dans D existent.*

Comment trouver les extrema de f? Aux quels points (x_0, y_0) les extrema sont atteints? La réponse à ces questions passe par la notion des points critiques (PC).

Définition 5.9 *Un $(x_0, y_0) \in D$ est point critique de f si*

i) $f_x(x_0) = f_y(x_0) = 0$, *ou*

ii) au moins une des dérivées $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ n'existe pas, mais $f(x_0, y_0)$ existe.

Remarque 5.10 *Pourquoi on considère les PCs de f? La raison est que si $f(x_0, y_0)$ est un extrema de f alors nécessairement (x_0, y_0) est un point critique (exactement comme dans le cas de la dimension un). À noter qu'en général, la reciprioque n'est pas vraie.*

Dans ce texte, on ne va pas resoudre le problème (41). Plûtot, on se contentera à la classification des points critiques. Introduisons d'abord la notion des extrema (minimum, maximum) locaux.

Définition 5.11 *Soit $(x_0, y_0) \in D$.*

i) On dit "$f(x_0, y_0)$ est un maximum local" (ou simplement "(x_0, y_0) est maximum local"), s'il existe un voisinage $V \subset D$ de (x_0, y_0) tel que (voir gauche, Fig. 29)

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in V.$$

ii) On dit "$f(x_0, y_0)$ est un PC de minimum local" (ou simplement "(x_0, y_0) est maximum local"), s'il existe un voisinage $V \subset D$ de (x_0, y_0) tel que (voir centre, Fig. 29)

$$f(x_0, y_0) \le f(x, y), \quad \forall (x, y) \in V.$$

iii) Tout minimum local ou maximum local est appellé "extremum" local. Leur ensemble est appellé "extrema locaux".

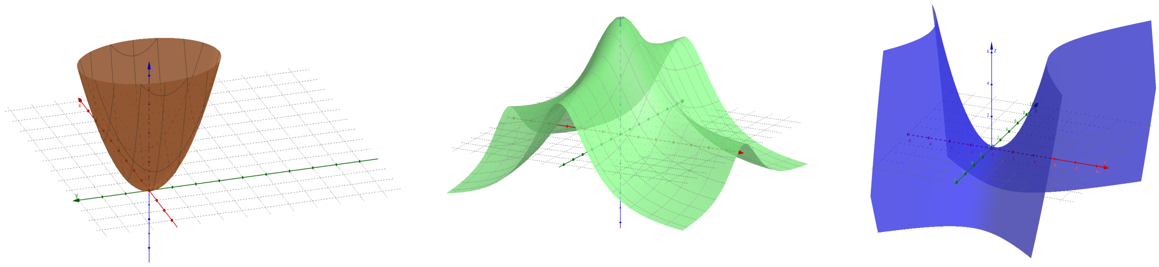


Figure 29: Un point critique: maximum local (gauche), minim local (centre) et point selle (droite)

iv) On dit "$f(x_0, y_0)$ est un "point selle" (PS) (ou simplement (x_0, y_0) est PS") si (x_0, y) n'est ni maximum local, ni minimum local (voir droite, Fig. 29).

Le théorème suivant donne une classification des points critiques.

Theorem 5.12 *Soit $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction avec des dérivées partielles secondes continues autour d'un point critique (x_0, y_0). On suppose de plus que*

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0,$$

et on pose

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

On a:

i) si $D(x_0, y_0) > 0$ et $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ alors (x_0, y_0) est un minimum local;

ii) si $D(x_0, y_0) > 0$ et $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ alors (x_0, y_0) est un maximum local;

iii) si $D(x_0, y_0) < 0$ alors (x_0, y_0) est un point selle.

iv) Dans tous les autres cas le théorème est inconclusif.

Remarque 5.13 *Le théorème précédent donne une classification des points critique. La solution du problème des extrema globaux d'une fonction dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est un problème plus difficile, à étudier dans un cours de calcul plus avancé.*

Example 5.7 *Soit $f(x, y) = x^2 y - 2x^2 - y^2$. Trouvons et classifions ses points critiques.*
1) Les points critiques. A resoudre le système

$$\begin{cases} f_x(x, y) & = & 0, \\ f_y(x, y) & = & 0, \end{cases}$$

ce qui revient à

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2xy-4x &=& 0, \\ x^2-2y &=& 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcll} 2x(y-2) &=& 0, & [1] \\ x^2-2y &=& 0. & [2] \end{array}\right.$$

L'équation [1] donne: $x=0$ *ou* $y=2$*. En remplaçant dans l'équation [2] on obtient:*
pour $x=0$*:* $y=0$*, donc* $(0,0)$ *est PC,*
pour $y=2$*:* $x^2=4$*,* $x=\pm 2$*, donc* $(\pm 2,2)$ *sont des PCs.*
En total, on a trois PCs: $(0,0)$ *,*$(\pm\sqrt{2},2)$*.*
2) Classification.
On a

$$f_{xx}(x,y)=-4, \quad f_{xy}=2x, \quad f_{yy}=-2; \quad D(x,y)=8-4x^2.$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} (0,0) &:& D(0,0)=8>0, \ f_{xx}(0,0)=-4<0; \quad \textit{ce PC est maximum local}, \\ (\pm 2,2) &:& D(\pm 2,2)=8-4\cdot(\pm 2)^2=-8<0; \quad \textit{ces PCs sont des PS}. \end{array}$$

Example 5.8 *Soit* x*, resp.* y*, la demande pour un produit* P*, resp.* Q*, et leurs respectives fonctions demandes soient* $p(x,y)=100-3x-y$*, resp.* $q(x,y)=180-x-4y$*.*
i) Trouvons d'abord la fonction revenue.
ii) Ensuite, trouvons pour quelles demandes et prix le revenu est maximal.
Solution*.*
i) Pour le revenu on a

$$\begin{array}{rcl} R(x,y) &=& \underbrace{x\cdot p(x,y)}_{\textit{le revenu pour } P} + \underbrace{y\cdot q(x,y)}_{\textit{le revenu pour } Q} \\ &=& (100x-3x^2-xy)+(180y-xy-4y^2) \\ &=& 100x+180y-3x^2-2xy-4y^2. \end{array}$$

ii) Maintenant cherchons le maximum de $R(x,y)$*.*
ii.1) Les points critiques:

$$\left\{\begin{array}{rcl} R_x(x,y) &=& 0, \\ R_y(x,y) &=& 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} 100-6x-2y &=& 0, \\ 180-2x-8y &=& 0. \end{array}\right. \ \textit{D'où} \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 10, \\ y &=& 20. \end{array}\right.$$

ii.2) Classification:
On a

$$\begin{array}{l} R_{xx}(x,y)=-6, \quad R_{xy}(x,y)=-2, \quad R_{yy}=-8, \\ D(x,y)=(-6)\cdot(-8)-(-2)^2=44>0. \end{array}$$

On est dans le cas ii) du Théorme 5.12 ($D(x_0,y_0)>0$*,* $R_{xx}(x_0,y_0)<0$*). Donc,* $(x,y)=(10,20)$ *est un maximum local du revenu. Les prix correspondants sont*

$$(p,q)=(100-3\cdot 10-20, 180-10-4\cdot 20)=(50,90).$$

ii.3) Est-ce-que $R(x,y)$ *attient un maximum global à* $(10,20)$*? La reponse est oui, mais nous ne présenterons pas la preuve ici.*

5.6.1 Problèmes

Problème 5.6.1 *Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et les classifiez:*

a) ^{s} $f(x,y) = \dfrac{1}{3}x^2 - xy + y^2 - 3x$

b) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x$

c) $f(x,y) = 6xy + x^2 - y^3$

d) ^{s} $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

e) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2 + 5x + 7$

f) $f(x,y) = x - y^2$

g) $f(x,y) = 4xy + 2x - 2x^2 - 4y^2$

h) $f(x,y) = -x^2 + 4xy - 3y^2 - 2y + 5$

i) $f(x,y) = x^2 + xy^2 + 2y^2$

j) $f(x,y) = 6xy + y^2 - x^3$

k) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy - 1$

l) $f(x,y) = e^{-\frac{1}{3}x^3 + x - y^2}$

6 Solutions des problémes choisis

6.1 Solutions des problémes choisis du chapitre 1

Solution du problème [1.1.1]
Solution de (f)
Ici, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \geq 0\}$. Puisque $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, l'inéquation $x^2 - 1 \geq 0$ devient $(x-1)(x+1) \geq 0$. Pour le resoudre cette inéqialité, il revient à étudier le signe du produit $(x-1)(x+1)$.

Les racines sont $x \pm 1 = 0$, donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. Alors pour étudier le signe du $x^2 - 1$ on fait un tableau comme ci-dessous. On met les racines à l'ordre crîossant, on trouve le signe de chaque facteur et ensuite le signe du produit des facteurs.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où, $Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Quant à l'image, on a $Im(f) = [0, +\infty)$. En effet, soit $y \in [0, +\infty)$. Alors, on cherche $x \in Dom(f)$ tel que $f(x) = y$. Donc, $\sqrt{x^2 - 1} = y$, c.à.d. $x^2 - 1 = y^2$, d'où $x^2 = y^2 + 1$. Il en suit que $x = \pm\sqrt{y^2 + 1} \in Dom(f)$ resout $f(x) = y$. Puisque $y \in [0, +\infty)$ était arbitraire, ceci montre que $Im(f) = [0, \infty)$.

Solution du problème [1.1.3]
Solution de (b)
On a $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R},\ 2 - x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Pour f^{-1} on trouve d'abord son expression en resolvant y dans l'équation $f(y) = x$, donc

$$x = \frac{1}{2-y}, \quad 2 - y = \frac{1}{x}, \quad y = f^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$$

Il en suit que $Dom(f^{-1}) = \{x \neq 0\}$.

À noter que le résultat est consistent puisque $Dom(f^{-1}) = Im(f)$.

Solution du problème [1.1.4]
Solution de (c)

On multiplie par -3:	$2(z^2 - 3) = -6(3z + 1)$
On met tous les termes à gauche:	$2(z^2 - 3) + 6(3z + 1) = 0$
On simplifie:	$2z^2 + 18z = 0$
On factorise:	$2z(z + 9) = 0$

D'où: $z = 0,\ z = -9.$

Solution du problème [1.1.5]
Solution de (e))

Puisque $|a| < b$ est équivalent à $-b < a < b$ on obtient: $-2 < \dfrac{1-5x}{-3} < 2$

On multiplie par -3: $6 > 1 - 5x > -6$

On soustrait 1 à toutes les côtés: $5 > -5x > -7$

On divise par -5: $-1 < x < \dfrac{7}{5}$

Donc, la solution est: $x \in \left(-1, \dfrac{7}{5}\right).$

Solution de (g)

On passe tous les termes d'un côté: $x^2 - 3x + 2 < 0$

On factorise: $(x-1)(x-2) < 0$

On fait un tableau de signe:

x	$-\infty$		1		2		∞
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, la solution est: $x \in (1, 2).$

Solution du problème [1.2.4]
Solution de (e)

On ordre les monômes de $p(x)$ et de $q(x)$ à l'ordre décroissant: $x^3 + 0 \cdot x^2 - 7x + 6 \quad \big|\ \underline{x - 2}$

x entre dans x^3 (le monôme d'ordre plus élevé de $p(x)$) $+x^2$ fois: $\big|\ + x^2$

On multiplie $q(x) = x - 2$ par x^2 et on le soustrait de $p(x)$: $\underline{x^3 - 2x^2}$

On obtient $p_1(x) = 2x^2 - 7x + 6$: $2x^2 - 7x + 6$

x dans $2x^2$ (le monôme d'ordre plus élevé de p_1) entre $+2x$ fois: $\big|\ + 2x$

On multiplie $q(x) = x - 2$ par $+2x$ et on le soustrait de $p_1(x)$:	$\underline{2x^2 - 4x}$	
On obtient $p_2(x) = -3x + 6$:	$-3x + 6$	
x dans $-3x$ (le monôme d'ordre plus élevé de p_2) entre -3 fois:		-3
On multiplie $q(x) = x - 2$ par -3 et on le soustrait de $p_2(x)$:	$\underline{-3x + 6}$	
On obtient:	0	

Donc, $p(x) = (x-2)(x^2+2x-3)$. Alors, $p(x) = 0$ est équivalent à $x-2 = 0$ ou $x^2+2x-3 = 0$. D'où $x = 2$ ou $x^2 + 2x - 3 = 0$, qui donne $x = 2$, $x = -3$, $x = 1$.

Solution du problème [1.3.8]
Soit t le temps, commençant en 2011 et $v(t)$ la valeur comptable au temps t.
i) Ici, on suppose que $v(t)$ est une fonction linéaire, donc $v(t) = kt + b$. Puisque $v(0) = 800$ il suit que $800 = k \cdot 0 + b$, donc $b = 800$. Aussi, de $v(4) = 500$ il découle que $500 = k \cdot 4 + 800$, donc $k = -300/4 = -75$. Il en suit que $v(t) = -75t + 800$.
ii) Par conséquent, la valeur comptable du téléphone en 2016 sera $v(5) = -75 \cdot 5 + 800 = \$425$.
Remarquons que la valeur du téléphone se déprecie à chaque année par $75 parce que

$$v(t+1) - v(t) = -75.$$

6.2 Solutions des problèmes choisis du chapitre 2

Solution du problème [2.1.1]
Solution de a)
Dans les deux côtés de $x = 1$ la fonction se donne par deux lois différentes. Il faut considérer alors les limites à côtés.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1-} (x - 3) = -2, \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1-} \frac{1 + x^2}{x} = 2. \end{aligned}$$

Ces deux limites sont differentes. Il en suit que $\lim_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas.
Solution de c)
Ici, $x = -1$ est à l'intérieur de l'intervalle $(-\infty, 2)$ où la fonction f est donnée par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, qui est une fonction rationnelle. Puisque les fonctions rationnelles admettent une limite à tout point dans leur domaine de définition, il en suit que la fonction f admet une limite à $x = -1$ et

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{1 + x^2} = f(-1) = \frac{1}{2}.$$

Solution de d)
Encore ici, dans les deux côtés de $x = 2$ la fonction se donne par deux lois différentes. Il faut considérer alors les limites à côtés.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2-}(5x-6) = 4,\\
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}\frac{2x}{x^2-3} = 4.
\end{aligned}$$

Ces deux limites sont égales. Il en suit que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Solution du problème [2.1.2]
Solution de a)
La fonction f est rationnelle et son dénominateur est toujours différent de zéro. Alors, cette fonction admet une limite à chaque x, en particulier

$$\lim_{x\to c}\frac{1+x-3x^3}{7+x^2} = f(c) = \frac{1+c-3c^3}{7+c^2}.$$

Solution de c)
La fonction f est rationnelle. Son déterminant devient zéro pour les racines de $-x^2+x+1=0$, c.à.d.

$$x_{1,2} = \frac{1}{2(-1)}(-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)1}) = -\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(1\mp\sqrt{5}), \quad x_1\approx -1,\;\; x_2\approx 1.5.$$

Puisque $[0,1]\subset(x_1,x_2)$, il en suit que $1+x-x^2\neq 0$ dans $[0,1]$. Alors, cette fonction admet une limite pour tout $c\in[0,1]$:

$$\lim_{x\to c}\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-x^2} = f(c) = \frac{1-\sqrt{1+c}}{1+c-c^2}.$$

Solution du problème [2.1.3]
Solution de a)

On utilise la méthode de la multiplication par le conjugué. Le conjugué du facteur avec la racine est $\sqrt{x}+2$. Alors on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} f(x) &= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)\\
&= 4
\end{aligned}$$

Solution de e)
Remarquons d'abord que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-1}, & x \geq 1, \\ -\dfrac{x-1}{x-1}, & x < 1. \end{cases}$$

Alors, ici on utilise la méthode des limites aux côtès, parce que la fonction est donnée par deux lois différentes. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1-} f(x) &= \lim_{x\to 1-} -\frac{x-1}{x-1} = -1, \\ \lim_{x\to 1+} f(x) &= \lim_{x\to 1-} \frac{x-1}{x-1} = 1. \end{aligned}$$

Les deux limites étant différentes, on conclut que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.
Solution de f)
Ici on va utiliser la méthode de substitution (la methode de la conjugué peux s'appliquer aussi). On pose $x + 7 = u^3$. Alors

$$\begin{aligned} x &= u^3 - 7, \\ u &= (x+7)^{1/3}, \\ \lim_{x\to 1} u &= 2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{u^3-7-1} \\ &= \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{u^3-2^3} \qquad \text{[on utilise } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\text{]} \\ &= \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{(u-2)(u^2+2u+2^2)} \\ &= \lim_{u\to 2} \frac{1}{u^2+2u+2^2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Solution du problème [2.1.4]
Solution de a)
Ici on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} C_u(x) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+2) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Donc, $C_u(x)$ n'a pas de AH à $+\infty$. Le coût moyen croît infiniment.

Solution de b)
Ici on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} C_u(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}+\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{x^2}}+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{9x^2+1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)\\
&= 9.
\end{aligned}$$

Donc, $y = 9$ est AH de $C_u(x)$ à $+\infty$. Ceci signifie que le coût moyen est de \$3 quand le noveau de production est grand.

Solution du problème [2.1.5]
Solution de a)
La fonction f est rationnelle. Son dénominateur, $x^2 - 1$ se factorise comme $x^2 - 1 = (x-1)(x-(-1))$. Son nominateur n'a pas de racines réelles, donc $f(x)$ ne se simplifie pas. Alors on conlcut que $x = \pm 1$ sont les AV.

Pour trouver les AH, on remarque que degrée$(x^2 - x + 7) =$ degrée$(x^2 - 1) = 1$. Alors,

$$y = \frac{1}{1} = 1,$$

est l'AH.

Solution de d)
Le dénominateur de la fonction $\sqrt{x^2-1}$, devient zéro pour $x = \pm 1$. On calcule les limites suivantes:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm 1} f(x) &= \lim_{x\to\pm 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\\
&= \infty
\end{aligned}$$

Alors, $x = \pm 1$ sont les AV.

Pour les AHs on remarque que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

donc $y = 0$ est AH.

Solution du problème 2.2.1
Solution de c)

Ici, $c = 2 > 1$. Donc, dans un voisinage de $c = 2$ la fonction $f(x)$ est donnée par $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$, qui est une fonction algèbrique, donc continue parce que $f(2)$ est bien définie.

Solution de d)
Ici, à $c = 2$ la fonction change de loi. Donc il faut vérifier les limites à côt̀es avec la valeur $f(2)$. On a

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 + 2 = 6, \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \frac{1}{1 + \sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{1}{3}, \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= 6. \end{aligned}$$

Ces trois valeurs n'étant pas égalles déduisent que f n'est pas continue à $c = 2$.

Solution du problème [2.2.2]
Solution de c)
Puisque f est égale à une fonction algèbrique pour $x < 1$ et $x > 1$ elle est continue dans $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. Il suffit alors de considérer la continuité à $x = 1$. Pour que f soit continue à $x = 1$ il suffit que les deux limites à côtés à $x = 1$ soient égales à $f(1)$. Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} (k^2 + kx^2) = k^2 + k, \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} (kx + 1) = k + 1, \\ f(1) = k + 1, \end{aligned}$$

on doit donc imposer $k^2 + k = k + 1$. D'où $k^2 = 1$ et $k = \pm 1$. Donc, pour $k = \pm 1$ la fonction f est continue à $x = 1$ et dans $\mathbb{R}$.

Solution de e)
Puisque f est égale à une fonction algèbrique pour $x < 1$ et $x > 1$ elle est continue dans $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. Il suffit alors de considérer la continuité à $x = 1$. Pour que f soit continue à $x = 1$ il suffit que les deux limites à côtés à $x = 1$ soient égales à $f(1)$. Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} (2bx - bx^3) = 2b - b = b, \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} (ax^2 + 3ax) = a + 3a = 4a, \\ f(1) = 8, \end{aligned}$$

on doit donc imposer

$$4a = 8, \quad \text{donc} \quad a = 2, \qquad b = 8,$$

Donc, pour $a = 2$, $b = 8$ la fonction f est continue à $x = 1$.

Solution du problème [2.3.1]
Solution de a)
On écrit:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} 8\left(\frac{1}{2}\right)^n &= 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdots \\
&= \underbrace{8\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{=a} + \underbrace{8\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{=a}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{=r} + \underbrace{8\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{=a}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{=r^2} \\
&= a + ar + ar^2 + \cdots \qquad \text{[on applique la formule (5)]} \\
&= \frac{a}{1-r} \\
&= \frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4
\end{aligned}$$

Solution de b)
On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{3^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^{n+1}} \qquad \text{[on écrit comme somme de deux séries]} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3 \cdot 3^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3 \cdot 3^n} \qquad \text{[on écrit comme puissance de } n\text{]} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n .
\end{aligned}$$

La première série converge parce que $|r| = \frac{2}{3} < 1$, alors que la deuxième série diverge parce que $|r| = \frac{5}{3} > 1$. Donc la série initiale diverge.

Solution du problème [2.3.2]
Solution de b)
On écrit:

$$\begin{aligned}
0.4444\cdots &= 0.4 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + \cdots \\
&= 0.4(1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots) \\
&= 0.4(1 + 0.1 + (0.1)^2 + (0.1)^3 + \cdots) \\
&= \frac{0.4}{1-0.1} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Solution de c)
On écrit:

$$\begin{aligned}
1.646464\cdots &= 1+0.64+0.0064+0.000064+\cdots\\
&= 1+0.64(1+0.01+0.0001+\cdots)\\
&= 1+0.64(1+(0.01)^1+(0.01)^2+\cdots)\\
&= 1+0.64\frac{1}{1-0.01}\\
&= 1+\frac{64}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=1+\frac{64}{100}\frac{1}{\frac{99}{100}}=1+\frac{64}{99}\\
&= \frac{163}{99}
\end{aligned}$$

Solution du problème [2.3.3]
i) On pose

$$a=2000,\quad s=0.4,\quad r=1-0.4=0.6.$$

Pour $k=1,2,\ldots$, soit S_k le balance du compte au début du mois k, juste après que le salaire soit déposé. Alors, on aura:
1) $S_1=a$, parce que dans son compte, au debut du premier mois, il n'y a que son salaire, et
2) $S_k=a+S_{k-1}\cdot r$, $k=2,3,\ldots$, parce que au début du mois k, dans son compte il a son salaire a qui est versé, plus $S_{k-1}\cdot r=S_{k-1}\cdot(1-s)$, l'argent qui reste du mois précédent $k-1$ (notez que le montant $S_{k-1}\cdot s$ est dépensé au cours du mois $k-1$).

Alors, on aura

$$\begin{aligned}
S_1 &= a,\\
S_2 &= a+S_1r=a+r,\\
S_3 &= a+S_2r=a+(a+ar)r=a+ar+ar^2,\\
S_4 &= a+S_3r=a+(a+ar+ar^2)r=a+ar+ar^2+ar^3,\\
\cdots&\\
S_k &= a+S_{k-1}r=a+(a+ar+ar^2+\cdots+ar^{k-2})r\\
&= a+ar+ar^2+ar^3+\cdots ar^{k-1}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$S_k=a\frac{1-r^k}{1-r}=2000\frac{1-(0.6)^k}{1-0.6}=\frac{2000}{0.4}(1-(0.6)^k).$$

On déduit alors

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{2000}{0.4}(1-(0.6)^6)=3200.00,\\
S_6 &= \frac{2000}{0.4}(1-(0.6)^1)=4766.72
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{2000}{0.4}(1-(0.6)^{12}) = 4989.11 \\
S_{24} &= \frac{2000}{0.4}(1-(0.6)^{24}) = 4999.97 \\
S_{\infty} &= \lim_{k\to\infty} S_k = \frac{2000}{0.4} = 5000.
\end{aligned}$$

Solution du problème [2.3.7]
Solution de a)
On prend $\ln$ des deux côtés et on resout x. A noter que $e^{\ln c} = c$. Alors

$$\ln(2^x) = \ln 8, \quad x\ln 2 = \ln 8, \quad x = \frac{\ln 8}{\ln 2}$$

Solution de b)
On prend $\ln$ des deux côtés et on isole x:

$$\begin{aligned}
\ln(3^{x-2}) &= \ln(7^{-2x+1}) \\
(x-2)\ln 3 &= (-2x+1)\ln 7 \\
x\ln 3 + 2x\ln 7 &= 1\ln 7 + 2\ln 3 \\
x(\ln 3 + 2\ln 7) &= \ln 7 + 2\ln 3
\end{aligned}$$

$$x = \frac{\ln 7 + 2\ln 3}{\ln 3 + 2\ln 7} = \frac{\ln 7 + \ln(3^2)}{\ln 3 + \ln(7^2)} = \frac{\ln(7\cdot 3^2)}{\ln(3\cdot 7^2)} = \frac{\ln(63)}{\ln(147)}$$

Solution de f)
A noter d'abord qu'on doit avoir $x > 0$ parce que $Dom(\ln) = (0, +\infty)$. Ensuite, notons que $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$. On remplace et on isole x. On obtient

$$\begin{aligned}
&2\ln x + \ln 7 = \ln 3 + \ln 2 + \ln x, \\
&\ln x = \ln 3 + \ln 2 - \ln 7; \qquad \text{on prend } e \text{ des deux côtès} \\
&x = e^{\ln 3 + \ln 2 - \ln 7} = e^{\ln \frac{3\cdot 2}{7}} = \frac{6}{7}
\end{aligned}$$

Solution de h)
A noter que l'équation est définie dans pour $\{x - 3 > 0 \ et \ x > 0\} = \{x > 3\}$. Donc, toute solution doit être plus grande à 3.

On isole x et puis on prend e des deux côtés. A noter que $e^{\ln c} = c$.

$$\begin{aligned}
\ln(x-3) + \ln x &= 2\ln 2, \\
\ln((x-3)x) &= 2\ln 2, \\
e^{\ln((x-3)x)} &= e^{2\ln 2} = e^{\ln(2^2)}, \\
(x-3)x &= 2^2, \\
x^2 - 3x - 4 &= 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}(3+\sqrt{3^2-4\cdot(-4)}) = \frac{1}{2}(3\pm 5),\\
x &= -1, \quad x = 4.
\end{aligned}
$$

Ici, $x=-1$ n'est pas admissible, donc la solution est $x=4$.

Solution du problème [2.3.10]
i) On cherche t tel que $C(t)=3A$. On remplace dans $C(t)=A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ pour n fini et dans $C(t)=Ae^{rt}$ pour n infini, et on obtient

$$
\begin{array}{ll}
n=1: & A\left(1+\dfrac{0.04}{1}\right)^{1\cdot t} = 3A; \quad \text{on simplifie par } A \text{ et on obtient}\\
& (1.004)^{1\cdot t} = 3\\
& (1\cdot t)\ln 1.004 = \ln 3\\
& t = \dfrac{\ln 3}{\ln 1.004} = 28.0110\\
n=6: & A\left(1+\dfrac{0.04}{6}\right)^{6\cdot t} = 3A; \quad \text{on simplifie par } A \text{ et on obtient}\\
& (1.0066\cdots)^{6t} = 3\\
& (6t)\ln 1.0066\cdots = \ln 3\\
& t = \dfrac{\ln 3}{6\ln 1.0066\cdots} = 27.5567\\
n=12: & A\left(1+\dfrac{0.04}{12}\right)^{12\cdot t} = 3A; \quad \text{on simplifie par } A \text{ et on obtient}\\
& (1.0033\cdots)^{12t} = 3\\
& (12t)\ln 1.0033\cdots = \ln 3\\
& t = \dfrac{\ln 3}{12\ln 1.0033\cdots} = 27.5110\\
n=\infty: & Ae^{0.04t} = 3A; \quad \text{on simplifie par } A \text{ et on obtient}\\
& e^{0.04t} = A\\
& 0.04t = \ln 3\\
& t = \dfrac{\ln 3}{0.04} = 27.4653
\end{array}
$$

ii) On prend $t=10$ and $C(10)=2000$ et on resout A:

$$
\begin{array}{ll}
n=1: & A\left(1+\dfrac{0.04}{1}\right)^{1\cdot 10} = 2000\\
& A\,(1.004)^{1\cdot 10} = 2000\\
& A = 2000\,(1.004)^{-1\cdot 10} = 1351.1283;
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
n = 6: \qquad & A\left(1+\frac{0.04}{6}\right)^{6\cdot 10} = 2000\\
& A\,(1.0.066\cdots)^{6\cdot 10} = 2000\\
& A = 2000\,(1.0066\cdots)^{-6\cdot 10} = 1342.4208;\\
n = 12: \qquad & A\left(1+\frac{0.04}{12}\right)^{12\cdot 10} = 2000\\
& A\,(1.0033\cdots)^{12\cdot 10} = 2000 = 1341.5321;\\
n = \infty: \qquad & Ae^{0.04\cdot 10} = 2000\\
& A = 2000e^{-0.04\cdot 10} = 1340.6400.
\end{aligned}
$$

iii) De ces calculs il en suit qu'il est mieux de composer l'intérèt plusieurs fois par an.

Solution du problème [2.3.12]

Ici, $A = \dfrac{1}{10^{12}}$ et $R(t) = Ae^{-rt}$.

i) Il est donné que $R(5715) = \dfrac{1}{2}A$. On remplace et on obtient

$$
\begin{aligned}
R(5715) &= \frac{1}{2}A; \quad \text{alors}\\
\frac{1}{10^{12}}e^{-r\cdot 5715} &= \frac{1}{2}\frac{1}{10^{12}}\\
e^{-r\cdot 5715} &= \frac{1}{2}; \quad \text{on prend } \ln \text{ des deux côtès}\\
-r\cdot 5715 &= \ln\frac{1}{2}\\
r &= -\frac{\ln\frac{1}{2}}{5715} = -\frac{-\ln 2}{5715} = \frac{\ln 2}{5715} = 0.00012128.
\end{aligned}
$$

Donc

$$R(t) = \frac{1}{10^{12}}e^{-0.00012128t}.$$

ii)

$$R(10000) = \frac{1}{10^{12}}e^{-0.00012128\cdot 10000} = 0.00000000000029736349.$$

iii) Si $R(t) = 1/(10^{15}) = 10^{-15}$, on remplace $R(t)$ et on resout t:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{10^{12}}e^{-0.00012128t} &= 10^{-15},\\
e^{-0.00012128t} &= 10^{-15}\cdot 10^{12} = 10^{-3},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} -0.00012128t &= -3\ln 10, \\ t &= \frac{3\ln 10}{0.00012128} = 24736.14 \text{ années.} \end{aligned}$$

Solution du problème [2.3.13]
Solution de b)
Ici, $A = 100$, $n = 4$, $r = 0.05$, $t = 10$. En appliquant la formule $C(t) = A(1 + r/n)^{nt}$ on obtient

$$C(10) = 100\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4\cdot 10} = 100(1+0.0125)^{40} = 100\cdot 1.0125^{40} \approx 100\cdot 1.6436 = 164.36.$$

Solution du problème [2.3.14]
Solution de c)
Ici $C = 100$, $n = 2$, $r = 0.08$, $t = 10$. En utilisant la formule $C(t) = A(1 + r/n)^{nt}$ on obtient

$$\begin{aligned} 100 &= A\left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{2\cdot 10} = A(1 + 0.04)^{20} = A(1.04)^{20}; \quad \textit{d'où} \\ A &= 100(1.04)^{-20} \approx 100 \cdot 0.4563 = 45.63. \end{aligned}$$

Solution du problème [2.3.15]
Solution de b)
Ici $n = 4$, $r = 0.05$. On cherche t tel que $C(t) = 2A$. En remplaçant dans la formule $C(t) = A(1 + r/n)^{nt}$ on obtient

$$\begin{aligned} A\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4\cdot t} &= 2A; \quad \textit{d'où en simplifiant par } A \textit{ on obtient} \\ (1 + 0.0125)^{4\cdot t} &= 2 \\ (1.0125)^{4\cdot t} &= 2. \end{aligned}$$

Pour resoudre t on prent $\ln$ des deux côtés dans la dernière équation:

$$\begin{aligned} \ln\left((1.0125)^{4\cdot t}\right) &= \ln 2, \\ (4\cdot t)\ln 1.0125 &= \ln 2, \\ t &= \frac{\ln 2}{4\ln 1.0125} \approx 13.949 \end{aligned}$$

Solution du problème [2.3.16]
Solution de d)
Ici $n = 20$, $r = 0.02$. Il est donné aussi que $C(10) = 10000$, alors que A est inconnue. En remplaçant dans $C(t) = A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ on obtient $C(10) = A\left(1 + \frac{0.02}{20}\right)^{20\cdot 10}$. En égalisant les deux valeurs de $C(10)$ on obtient

$$A\left(1 + \frac{0.02}{20}\right)^{20\cdot 10} = 10000; \quad \textit{d'où}$$

$$\begin{aligned}
A &= 10000\left(1+\frac{0.02}{20}\right)^{-20\cdot 10}\\
&= 10000(1+0.001)^{-200} = 10000(1.001)^{-200}\\
&\approx 8188.12
\end{aligned}$$

6.3 Solutions des problèmes choisis du chapitre 3

Solution du problème [3.1.1]

On applique la définition de la dérivée $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Solution de c)

Here, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R},\ 4x-1 \neq 0\} = \{x \neq \frac{1}{4}\}$. Puisque f est une fonction rationnelle, alors f est continue dans $Dom(f)$. Pour $x \in Dom(f)$ on obtient

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4(x+h)-1} - \frac{1}{4x-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{4(x+h)-1} - \frac{1}{4x-1}\right)\\
&= = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(4x-1)-(4(x+h)-1)}{(4(x+h)-1)(4x-1)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{4x-1-4x-4h+1}{(4(x+h)-1)(4x-1)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{-4h}{(4(x+h)-1)(4x-1)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-4}{(4(x+h)-1)(4x-1)}\\
&= -\frac{4}{(4x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Donc, $f'(x) = -\frac{4}{(4x-1)^2}$ pour tout $x \in Dom(f)$.

Solution de d)

Here $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R},\ x+1 \geq 0\} = \{x \geq -1\}$. Puisque f est une fonction algèbrique elle est continue dans $Dom(f)$. Pour $x \in Dom(f)$ on obtient

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)+1} - \sqrt{x+1}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)+1} - \sqrt{x+1}}{h} \frac{\sqrt{(x+h)+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+h)+1} + \sqrt{x+1}}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{((x+h)+1)-(x+1)}{\sqrt{(x+h)+1} + \sqrt{x+1}}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{(x+h)+1} + \sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}, & x>-1, \\ \textit{n'existe pas}, & x=-1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ pour $x > -1$.

Solution du problème [3.1.2]
Solution de b)
On vérifie d'abord si f est continue au $c = 0$ ou non. Pour ceci on trouve les limites à côtés:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2+1} = 3, \\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0}(3+x) = 3, \\
f(0) = 3.
\end{aligned}
$$

Donc, f est continue au $c = 0$ parce que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Maintenant on regarde si $f'(0)$ existe. Puisque

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h},$$

et f est donnée par deux lois différentes autour de $x = 0$, alors on trouve cette limite pour $h \to 0^-$ et $h \to 0^+$ (les limites à côtés). Or

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \left(\frac{3}{x^2+1}\right)'\Big|_{x=0} = -3\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\Big|_{x=0} = -3\frac{2x}{(x^2+1)^2}\Big|_{x=0} = 0, \\
\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= (3+x)'\Big|_{x=0} = 1.
\end{aligned}
$$

Puisque ces deux limites sont différentes alors $f'(0)$ n'existe pas.
Solution de d)
On vérifie d'abord si f est continue au $c = 0$. Pour ceci on trouve les limites à côtés:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0}(1-x) = 1, \\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1, \\
f(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Donc, f est continue au $c = 0$ parce que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

Maintenant on regarde si $f'(0)$ existe. Puisque

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h},$$

et f est donnée par deux lois différentes autour de $x = 0$, alors on trouve cette limite pour $h \to 0^-$ et $h \to 0^+$. Or

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= (1-x)'\Big|_{x=0} = -1, \\ \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \left(\frac{1}{1+x}\right)'\Big|_{x=0} = -\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{x=0} = -1. \end{aligned}$$

Puisque ces deux limites sont égales alors $f'(0)$ existe et $f'(0) = -1$.

Solution du problème [3.1.3]
Solution de d)
On a

$$\begin{aligned} (xe^{-x})' &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x}, \\ (xe^{-x})'' &= ((1-x)e^{-x})' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x}, \\ &= (-2+x)e^{-x}, \\ (xe^{-x})''' &= ((-2+x)e^{-x})' = e^{-x} - (-2+x)e^{-x} \\ &= (3-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Solution de e)
A noter que $f(x) = (x+1)^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)(x+1)^{-2}(x+1)' \\ &= -(x+1)^{-2}, \\ f''(x) &= (-(x+1)^{-2})' = (-1)(-2)(x+1)^{-3}(x+1)' \\ &= 2(x+1)^{-3}, \\ f'''(x) &= (2(x+1)^{-3})' = 2(-3)(x+1)^{-4}(x+1)' \\ &= -6(x+1)^{-4}. \end{aligned}$$

Solution du problème [3.1.4]
On applique la formule

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Solution de a)
On a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x,\\
g'(x) &= -(1+x)^{-2},\\
(f\circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) = 2g(x)g'(x) = (-2)(1+x)^{-3},
\end{aligned}$$

et

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = -2x(1+x^2)^{-2}.$$

Solution du problème [3.1.5]
Notons qu'ici $y = y(x)$. On différencie par rapport à x les deux côtés de l'équation $E(x,y) = 0$ et on trouve $y' = f'(x)$. Ensuite on remplace x et y pour trouver f' au point spécifié. Notons aussi que l'équation de la droite tangente au $(c, f(c))$ est donnée par

$$y = f'(c)(x-c) + f(c) = \underbrace{f'(c)}_{=k}x + \underbrace{(f(c) - cf'(c))}_{=b}$$

Solution de b)
On differencie les deux côtés de l'équation (n'oublions pas que $y = y(x)$):

$$\begin{aligned}
(7x+y^5)' &= (15)'\\
7+5y^4y' &= 0; \quad \text{on remplace } x=2,\ y=1, \text{ et on trouve } y' = f'(2)\\
7+5\cdot 1^4y' &= 0,\\
y' = f'(2) &= -\frac{7}{5}.
\end{aligned}$$

Alors, l'équation de la droite tangente est

$$\begin{aligned}
y &= f'(c)(x-c) + f(c),\\
y &= -\frac{7}{5}(x-2) + 1 = -\frac{7}{5}x + 1 + 2\frac{7}{5},\\
y &= -\frac{7}{5}x + \frac{19}{5}.
\end{aligned}$$

Solution de d)
On differencie les deux côtés de l'équation:

$$\begin{aligned}
\left(x^2y^2 + \frac{x^3}{1-y}\right)' &= 1',\\
2xy^2 + x^2 2yy' + \frac{3x^2(1-y) - x^3(-y')}{(1-y)^2} &= 0; \quad \text{on remplace } x=1,\ y=0 \text{ et}\\
& \quad \text{on trouve } y' = f'(1):
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2\cdot 1\cdot 0^2+1^2\cdot 2\cdot 0\cdot y'+\frac{3\cdot 1^2(1-0)-1^3(-y')}{(1-0)^2} &= 0,\\
3+y' &= 0,\\
y'=f'(1) &= -3.
\end{aligned}
$$

Il en suit que l'équation de la droite tangente est

$$
\begin{aligned}
y &= f'(c)(x-c)+f(c),\\
y &= -3(x-1)+0\\
y &= -3x+3.
\end{aligned}
$$

Solution du problème [3.1.6]
Solution de a)
Ici $c=3$, $f(c)=5$. Evaluons $f'(3)$. Pour ceci on différentie l'équation qui définit $y=y(x)=f(x)$ et ensuite on remplace $x=c$ et $y=f(c)$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (\sqrt{x^2+16})'=((x^2+16)^{1/2})'=\frac{1}{2}(x^2+16)^{\frac{1}{2}-1}(x^2+16)'\\
&= (x^2+16)^{-\frac{1}{2}}x,\\
f'(3) &= (3^2+16)^{-\frac{1}{2}}3=3(5^2)^{-1/2}\\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}
$$

Alors, l'équation de la droite tangente

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{3}{5}(x-3)+5=\frac{3}{5}x+5-\frac{9}{5},\\
y &= \frac{3}{5}x+\frac{16}{5}.
\end{aligned}
$$

Solution de c)
Ici $c=2$, $f(c)=4$. Pour trouver $f'(2)$ on différentie l'équation qui définit $y=y(x)=f(x)$ et ensuite on remplace $x=c$ et $y=f(c)$:

$$
\begin{aligned}
((3x-2)^2+(y(x)-1)^2)' &= (5^2)'\\
2(3x-2)(3x-2)'+2(y(x)-1)(y(x)-1)' &= 0,\\
2(3x-2)3+2(y(x)-1)y'(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Ici, on prend $x=2$ et $y(x)=4$, et on trouve $y'(2)$:

$$
\begin{aligned}
2(3\cdot 2-2)3+2(4-1)y'(2) &= 0,\\
24+6f'(2) &= 0,\\
y'(2) &= -\frac{24}{6}=-4.
\end{aligned}
$$

Alors, l'équation de la droite tangente est

$$y = (-4)(x-2)+4 = -4x+12.$$

Solution du problème [3.2.1]
i) Quand l'object commence à retourner à sa position initiale on a $h'(t)=0$, c.à.d. un tel temps est point critique pour h. On resout donc $h'(t)=0$:

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \frac{t^2+25-2t^2}{(t^2+25)^2} = \frac{25-t^2}{(t^2+25)^2}, \\
h'(t) &= 0, \\
25-t^2 &= 0, \\
t &= 5 \quad \textit{(et } t=-5\textit{, mais qui est exclu parce que } t \geq 0\textit{)}.
\end{aligned}$$

On étudie aussi le signe de $h'(t)$:

t	$-\infty$		-5		0		5		∞
$h'(t)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$h(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{10}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{10}$	$\searrow$	0

Donc, pour $t \in [0,5)$ on a $h'(t) > 0$, ce qui signifie que h croît et l'object monte. Pour $t \in (5,\infty)$ on a $h'(t) < 0$, ce qui signifie que h decroît et l'object tombe.

Il en suit qu'à $t=5$, l'object commence à retourner à sa position initiale.
ii) On a

$$\begin{aligned}
h(5) &= \frac{5}{5^2+25} = \frac{1}{10}, \\
h''(t) &= (h'(t))' \\
&= \left(\frac{25-t^2}{(t^2+25)^2}\right)' = \frac{-2t(t^2+25)^2-(25-t^2)2(t^2+25)2t}{(t^2+25)^4} \\
&= \frac{-2t(t^2+25)-(25-t^2)\cdot 2\cdot 2t}{(t^2+25)^3} \\
&= \frac{2t^3-150t}{(t^2+25)^3}, \\
h''(5) &= \frac{2\cdot 5^3-150\cdot 5}{(5^2+25)^3} = -0.004.
\end{aligned}$$

Solution du problème [3.2.3]
Solution de b)
On a

$$\begin{aligned}
R'(x) &= (3+7x^2)' = 14x,\\
C'(x) &= \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2},\\
P'(x) &= R'(x) - C'(x) = 14x - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{14x(1+x)^2-1}{(1+x)^2}.
\end{aligned}$$

Solution de d)
Ici on note que pour $b > 0$ on a $b^{u(x)} = e^{\ln(b^{u(x)})} = e^{u(x)\ln b}$. Donc,

$$(b^{u(x)})' = (e^{u(x)\ln b})' = e^{u(x)\ln b}u'(x)\ln b = b^{u(x)}u'(x)\ln b.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
R'(x) &= (3^{1+x^2})' = 3^{1+x^2}(1+x^2)'(\ln 3) = (2\ln 3)x3^{1+x^2} = (\ln 9)x3^{1+x^2},\\
C'(x) &= (\ln(1+x^2))' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}\\
P'(x) &= R'(x) - C'(x) = (\ln 9)x3^{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Solution de e)
On a

$$\begin{aligned}
R'(x) &= ((x^2-1)^4)' = 4(x^2-1)^3 2x = 8x(x^2-1)^3,\\
C'(x) &= ((\ln(1+x))^2)' = 2\ln(1+x)(\ln(1+x))' = 2\frac{\ln(1+x)}{1+x},\\
P'(x) &= R'(x) - C'(x) = 8x(x^2-1)^3 - 2\frac{\ln(1+x)}{1+x}.
\end{aligned}$$

Solution du problème [3.2.4]
Solution de a)
On a

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= \frac{p(x)}{xp'(x)} = \frac{100-4x}{x(-4)} = -\frac{100-4x}{4x},\\
|\eta(50)| &= \left|\frac{100-4\cdot 50}{4\cdot 50}\right| = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc, la demande est inélastique. $\square$
Solution de f)
On a

$$\eta(x) = \frac{3x+\ln(1+x)}{x\left(3+\frac{1}{1+x}\right)} = \frac{3x+\ln(1+x)}{x\frac{3(1+x)+1}{1+x}} = \frac{(3x+\ln(1+x))(1+x)}{x(3(1+x)+1)},$$

$$
\begin{aligned}
|\eta(2)| &= \left|\frac{(3\cdot 2+\ln(1+2))(1+2)}{2(3(1+2)+1)}\right| = \frac{(6+\ln 3)3}{2\cdot 10} = \frac{18+3\ln 3}{20} \\
&\approx 1.0647.
\end{aligned}
$$

Donc, la demande est élastique. □

Solution du problème [3.2.5]
Solution de b)
On calcule d'abord $\eta(x)$:

$$
\eta(x) = \frac{4+x^2}{x\cdot 2x} = \frac{4+x^2}{2x^2}.
$$

On cherche $x \geq 0$ tels que

$$
|\eta(x)| = \frac{4+x^2}{2x^2} > 1.
$$

Alors, on resout cette inégalité comme suit:

$$
\begin{aligned}
4+x^2 &> 2x^2, \\
4-x^2 &> 0, \\
(2-x)(2+x) &> 0.
\end{aligned}
$$

On étudie le signe de $(2-x)(2+x)$. Les racines de $(x-1)(x+1)=0$ sont $x=\pm 2$. Le tableau de son signe est

x	$-\infty$		-2		2		∞
$2-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$2+x$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2-x)(2+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Puisque on cherche $x \geq 0$ tels que $(2-x)(2+x) > 0$ on déduit que la solution est $x \in [0,2)$. □
Solution de c)
On calcule $\eta(x)$:

$$
\begin{aligned}
\eta(x) &= \frac{15-\sqrt{x}}{x\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = -2\frac{15-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \\
|\eta(x)| &= 2\frac{15-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad \text{parce que pour } x \in [0,225],\ 0 \leq \sqrt{x} \leq 15.
\end{aligned}
$$

Maintenant on cherche $x \in [0, 225]$ solution de

$$\begin{array}{rcl} |\eta(x)| & > & 1; \quad \text{d'où} \\ 2\dfrac{15-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & > & 1, \\ 30 - 2\sqrt{x} & > & \sqrt{x}, \\ 30 & > & 3\sqrt{x}, \\ 10 & > & \sqrt{x}, \\ 100 & > & x. \end{array}$$

Donc, la solution est $x \in [0, 100]$. □

Solution du problème [3.2.7]
Soit $t \geq 0$ le temps, R le rayon du cercle de la nappe du petrôle et A l'aire du cercle de la nappe. Notons que R et A sont des fonctions de t, donc $R = R(t)$ et $A = A(t)$. Notons aussi que

$$A = \pi R^2, \quad ou \quad A(t) = \pi R(t)^2.$$

Alors, en dérivant cette égalité on obtient

$$A'(t) \ = \ (\pi R(t)^2)' = \pi 2R(t)R'(t).$$

Il est donné que $R(t) = 50$ et $R'(t) = 3$. On remplace et on obtient

$$A' \ = \ \pi 2 \cdot 50 \cdot 3 = 300\pi.$$

Donc, quand $R = 50$ l'aire de la nappe du petrôle s'augmente avec une vitesse de $300\pi \approx 942.45$ m/min.

Solution du problème [3.2.8]
Soit xOy un système de coordonnées, avec l'axe des x dans la direction horizontale et l'axe des y dans la direction verticale dirigé vers le haut, et $t \geq 0$ soit le temps.

Soit A l'extremité verticale de l'echelle et B l'extremité horizontale. Quand le temps évolue, A reste dans l'axe des y et B dans l'axe des x. Donc, $A = (0, y(t))$ et $B = (x(t), 0)$. De plus, en appliquant le théorème de Pythagore on a

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = 10^2,$$

parce que la longueur de l'echelle est 10 m. En dérivant cette équation on obtient

$$2xx' + 2yy' = 0,$$

d'où

$$y' = -\frac{x}{y}x'.$$

On sait qu'au moment qu'on s'intéresse on a $x' = 3$, $x = 8$. Pour y de ce moment on utilise $x^2 + y^2 = 10^2$, donc $y = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$. Alors, on remplace et on obtient

$$y' = -\frac{x}{y}x' = -\frac{8}{6}3 = -4.$$

Donc, l'extremité verticale se déplace à une vitesse -4 m/sec quand l'extremité horizontale se trouve 8m loin de l'origine, c.à.d. l'extremité verticale s'approche à l'origine à une vitesse 4 m/sec.

Solution du problème [3.2.10]
Soit $t \geq 0$ le temps, R le rayon du ballon et V son volume. Clairement, R et V sont des fonctions du temps, donc $R = R(t)$ et $V = V(t)$. Il est donné que $V'(t) = 3$.

Notons que $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Alors, en différentiant cette égalité on obtient

$$\begin{aligned} V' &= \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = 4\pi R^2 R'; \quad \textit{d'où} \\ R' &= \frac{V'}{4\pi R^2}. \end{aligned}$$

On remplace $V' = 3$, $R = 7$ et on obtient

$$R' = \frac{3}{4\pi 7^2} = \frac{3}{196\pi} \approx 0.00487.$$

Donc, le rayon s'augmente avec une vitesse de ≈ 0.00487 m/heure quand son rayon est 7 m.

Solution du problème [3.2.13]
Soit l la longueur d'un côté du cube, V sont volume et A son aire. Clairement l, V et A sont des fonctions du temps t, donc $l = l(t)$, $V = V(t)$ et $A = A(t)$. Il est donné que que $V'(t) = 5$.

Notons que $V = l^3$, $A = 6l^2$. En différentiant le dernier on obtient

$$A' = 6 \cdot 2ll' = 12ll'.$$

Quand $l = 9$ on a

$$A' = 12 \cdot 9l' = 108l'.$$

Que vaut l' quand $l = 9$? On retourne à l'équation $V = l^3$. En le différentiant on obtient

$$V' = 3l^2 l'; \quad \text{d'où} \quad l' = \frac{V'}{3l^2}.$$

Pour $l = 9$ et $V' = 5$ on obtient

$$l' = \frac{5}{3 \cdot 9^2} = \frac{5}{241}.$$

Alors, en remplaçant on obtient

$$A' = 108 \cdot \frac{5}{241} \approx 2.2406,$$

est le taûx de l'augmentation de l'aire du cube quand la longueur de son côté est $9m$.

Solution du problème [3.3.1]
Solution de a)
D'abord, on note que $Dom(f) = \mathbb{R}$. Ensuite, puisque f est une fonction rationnelle avec le dénominateur différent de zéro, $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4 - x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4 - 2x^2}{(x^2+4)^2}.$$

Alors $f'(x) = 0$ ssi $4 - 2x^2 = 2(2 - x^2) = 0$, d'où $x = \pm\sqrt{2}$ sont les PCs de f.

On fait le tableau du signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $x = -\sqrt{2}$ est minimum local, $x = \sqrt{2}$ est maximum local. $\square$

Solution de b)
Ici, $Dom(f) = \mathbb{R}$. On sait que $f'(x)$ existe pour tout $x \neq 7$ et que $f(7)$ existe. Donc, $x = 7$ est le seul point critique de f.

Puisque

$$f'(x) = \begin{cases} (-(x-7))' = -7 < 0, & pour \;\; x < 7, \\ (x-7))' = 7 > 0, & pour \;\; x > 7 \end{cases}$$

on conclut que $x = 7$ est minimum local. $\square$

Solution de c)
Ici encore $Dom(f) = \mathbb{R}$. Notons que $f'(2)$ n'existe pas mais $f(2)$ existe. Donc $x = 2$ est un point critique.

La dérivée $f'(x)$ existe pour tout $x \neq 2$. Est-ce-que il y a d'autres points critiques? Pour ceci il faut resoudre $f'(x) = 0$. Notons qu'on a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & si \; x \geq 2, \\ x^2 + x - 2, & si \; x < 2. \end{cases}$$

Il en suit que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & si \; x > 2, \\ 2x + 1, & si \; x < 2 \end{cases}$$

Alors, $f'(x) = 0$ conduit à

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0, & si\ x > 2, \\ 2x + 1 = 0, & si\ x < 2, \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}, & si\ x > 2, \text{ qui est impossible,} \\ x = -\frac{1}{2}, & si\ x < 2. \end{cases}$$

Le point critique quand $x > 2$ est impossible, et quand $x < 2$ on a $x = -\frac{1}{2}$. Donc, $x = 2$ et $x = -\frac{1}{2}$ sont les points critiques de f.

Pour conclure avec la classification, on étudie le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Donc, $x = -\frac{1}{2}$ est une minimum local, alors que $x = 2$ n'est ni minimum local, ni maximum local.
□

Solution de e)
D'abord, on note que $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \neq \pm 1\}$. Ensuite, puisque f est une fonction rationnelle, alors $f'(x)$ existe pour tout $x \in Dom(f)$. Calculons $f'(x)$:

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Alors on cherche les solution de $f'(x) = 0$, ce qui est équivalent à $1 + x^2 = 0$. Or, cette équation n'a pas de solution, donc f n'a pas de points critiques. □

Solution du problème [3.3.2]
Pour trouver les intervalles de monotonie de f on procède comme suit.

1. *D'abord on trouve tous les PCs de f*

2. *On fait un tableau avec trois lignes.*
   a) *Dans la première ligne on mets les PCs, ordonnés à l'ordre croîssant.*
   b) *Dans la deuxième ligne on met le signe de $f'(x)$ dans toute intervalle formée par les PCs. Pour ceci, il suffit d'évaluer $f'(x)$ dans un point x appartenant à l'intervalle en question. Le signe de f' à ce point est le signe de f' dans toute l'intervalle.*
   c) *Dans la troisième ligne on détermine la monotonie de f dans chaque intervalle: f est croîssante si $f' > 0$ et f est decroîssante si $f' < 0$.*

Solution de a)
Ici, f est une fonction rationnelle, avec le déterminant toujours différent de zéro. Donc, $f'(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Evaluons $f'(x)$:

$$f'(x) \quad = \quad \frac{x^2 + 2 - (x - 1)2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2 + 2x - x^2}{(x^2 + 2)^2} = -\frac{x^2 - 2x - 2}{(x^2 + 2)^2}.$$

Il en suit $f'(x) = 0$ est équivalent à

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad \textit{ce qui donne} \quad x = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{12}) = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{2^2 \cdot 3}) = 1 \pm \sqrt{3},$$

sont les PCs de f.

Maintenant, en tenant compte que

$$\begin{aligned} f(\pm\infty) &= 0, \\ f(1-\sqrt{3}) &= \frac{1-\sqrt{3}-1}{(1-\sqrt{3})^2+2} \approx -0.68, \\ f(1+\sqrt{3}) &= \frac{1+\sqrt{3}-1}{(1+\sqrt{3})^2+2} \approx +0.18, \end{aligned}$$

on fait le tableau

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-0.68	$\nearrow$	0.18	$\searrow$	0

Donc, f est decroissante dans $(-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$ et f est croissante dans $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. □

Solution du problème [3.3.3]
Définition:

a) *Un point c est appellé "point d'infléxion (PI)" si f change la concavité en c (et f est continue à c). Notons que si c est un PI et $f''(c)$ existe alors $f''(c) = 0$.*

b) *f est dite "concave vers le haut (CvH)" dans l'intervalle (a, b) (et on le note par $\smile$) si $f''(x) \geq 0$ pour $x \in (a, b)$.*

c) *f est dite "concave vers le bas (CvB)" dans l'intervalle (a, b) (et on le note $\frown$) si $f''(x) \leq 0$ pour $x \in (a, b)$.* □

Solution de a)
Ici

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 11, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 3, \quad f''(x) = 6x - 4.$$

D'où $f''(x) = 0$ *donne* $6x - 4 = 0$, $x = \frac{2}{3}$.

Est-ce-que $x = \dfrac{2}{3}$ *est un PI? Pour repondre à la question on étudie le signe de* f''. *On fait un tableau*

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	*PI*	$\smile$	

Donc, $x = \dfrac{1}{2}$ *est un PI. La fonction* f *est CvB dans* $(-\infty, \frac{2}{3}]$ *et CvH dans* $[\frac{2}{3}, +\infty)$. $\square$

Solution de b)

Ici $Dom(f) = \mathbb{R}$ *et* f *admet des dérivées de toute ordre dans* $\mathbb{R}$. *Calculons* f'':

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \\ f''(x) &= -2\frac{(1+x^2)^2 - x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = -2\frac{(1+x^2) - x \cdot 2 \cdot 2x}{(1+x^2)^3} \\ &= -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

On resout $f''(x) = 0$, *donc* $3x^2 - 1 = 0$, *et alors* $x = \pm 3^{-1/2}$.

Est-ce-que $x = \pm 3^{-1/2}$ *sont des PIs? Pour le savoir il faut étudier le signe de* f''. *On a le tableau suivant*

x	$-\infty$		$-3^{-1/2}$		$3^{-1/2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\smile$	*PI*	$\frown$	*PI*	$\smile$	

Il en suit que $x = \pm 3^{-1/2}$ *sont des PIs, que* f *est CvH dans* $(-\infty, -3^{-1/2}] \cup [3^{-1/2}, +\infty)$ *et CvB dans* $[-3^{-1/2}, 3^{-1/2}]$. $\square$

Solution du problème [3.3.4]

Rappelons Théorème 3.9: une fonction f *continue dans une intervalle fermée* $[a, b]$ *atteint toujours* *son minimum et maximum. De plus, son minimum, resp. maximum, est la plus petite, resp. grande, valeur des valeurs de f aux PCs dans $[a, b]$ et aux extrémités a et b.*

Solution de a)

Ici, f est un polynome, donc continue. Alors, f atteints son minimum et maximum dans $[-3, 3]$.

Puisque $f'(x) = 3x^2 - 4$ et $f'(x) = 0$ implique $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, il suit que $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ sont les PCs de f dans $[-3, 3]$.

Finallemnt, puisque

$$f(-3) = -14, \quad f(-2/\sqrt{3}) = 4.0792..., \quad f(2/\sqrt{3}) = -2.0792..., \quad f(3) = 16,$$

il suit que

$$\min_{x\in[-3,3]} f = -14, \quad \max_{x\in[-3,3]} f = 16. \qquad \square$$

Solution de c)

Ici, f est une fonction rationnelle, avec le dénominateur qui devient nul pour $x = 0$. Donc, la fonction est continue dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, en particlulier dans $[1, 2]$. Alors, f atteint son minimum et maximum dans $[1, 2]$.

Puisque $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ alors $f'(x) = 0$ n'a pas de solution et donc f n'a pas de PCs. Finallement, puisque

$$f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2},$$

il suit que

$$\min_{x\in[1,2]} f = \frac{1}{2}, \quad \max_{x\in[1,2]} f = 1. \qquad \square$$

Solution de d)

Ici, f est une fonction rationnelle, avec le dénominateur qui devient nul pour $x^2 - 2x = 0$, donc $x = 0$ et $x = 2$. Puisque $x = 2 \in [1, 3]$ alors f n'est pas continue dans $[1, 3]$.

Le théorème de la valeur minimale/maximale ne conclut pas. Une analyse un peu plus détaillée montre que f n'admet pas de valeur minimale/maximale dans $[1, 3]$. Pour ceci il suffit de voir les limites à côté à $x = 2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2\cdot 0^-} = -\infty, \\
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2\cdot 0^+} = +\infty. \qquad \square
\end{aligned}$$

Solution de e)

Ici, f est continue comme produit de deux fonctions continues. Donc, f atteint la valeur minimale et maximale dans $[0, 2]$.

Trouvons les PCs de f. On a que

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Alors, $f'(x) = 0$ est équivalent à $1 - x = 0$, donc $x = 1$ est le PC de f dans $[0, 2]$.
Puisque

$$f(0) = 0, \quad f(1) = e^{-1} \approx 0.3678, \quad f(2) = 2e^{-2} \approx 0.2706,$$

il suit que

$$\min_{x\in[0,2]} f = 0, \quad \max_{x\in[1,2]} f = 0.3678. \qquad \square$$

6.4 Solutions des problèmes choisis du chapitre 4

Solution du problème [4.2.1]
Solution de a)

$$\int (-1)dx = -x + C.$$

$\square$

Solution de c)

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{3}{x} + 5x^2 - 9\sqrt{x} - x^{7/2}\right) dx &= 3\int \frac{1}{x}dx + 5\int x^2 dx - 9\int \sqrt{x} - \int x^{7/2}dx \\
&= 3\ln|x| + 5\frac{x^3}{3} - 9\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^{7/2+1}}{7/2+1} + C \\
&= 3\ln|x| + \frac{5}{3}x^3 - 6x^{3/2} - \frac{2}{9}x^{9/2} + C.
\end{aligned}$$

$\square$

Solution de e)

$$\begin{aligned}
\int (3-2x)^2 dx &= \int (9 - 12x + 4x^2)dx \\
&= 9\int dx - 12\int xdx + 4\int x^2 dx \\
&= 9x - 12\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3} + C \\
&= 9x - 6x^2 + \frac{4}{3}x^3 + C.
\end{aligned}$$

$\square$

Solution du problème [4.2.2]
Dans ce problème on rappelle que

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \quad \text{ou bien} \quad f(x) = \int f'(x)dx + C.$$

La constante C est définie par la valeur $f(a)$.
Solution de a)
On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(4x^{-3/2} - 3x^{-1}\right) dx + C \\ &= 4\frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1} - 3\ln|x| + C \\ &= 4\frac{x^{-1/2}}{-1/2} - 3\ln|x| + C \\ &= -8x^{-1/2} - 3\ln|x| + C. \end{aligned}$$

En utilisant $f(1) = 2$ (donc, on remplace $x = 1$ et $f(x) = 2$) on obtient

$$\begin{aligned} -8 \cdot 1^{-1/2} - 3\ln|1| + C &= 2, \\ -8 + C &= 2, \\ C = 10. \end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) = -8x^{-1/2} - 3\ln|x| + 10.$$

Maintenant on évalue $f(4)$:

$$f(4) = -8 \cdot 4^{-1/2} - 3\ln|4| + 10 = 6 - 3\ln 4.$$

$\square$

Solution de c)
On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - 5x + 3\right) dx + C \\ &= 3\int x^{-1/2}dx - 5\int xdx + 3\int x + C \\ &= 3\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} - 5\frac{x^2}{2} + 3x + C \\ &= 6x^{1/2} - \frac{5}{2}x^2 + 3x + C. \end{aligned}$$

En utilisant $f(1) = 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
6 \cdot 1^{1/2} - \frac{5}{2}1^2 + 3 \cdot 1 + C &= 0, \\
9 - \frac{5}{2} + C &= 0, \\
C &= -\left(9 - \frac{5}{2}\right) = -\frac{14}{2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= 6x^{1/2} - \frac{5}{2}x^2 + 3x - \frac{14}{2} \quad \text{et} \\
f(4) &= 6 \cdot 4^{1/2} - \frac{5}{2}4^2 + 3 \cdot 4 - \frac{14}{2} = -26 - \frac{14}{2} \\
&= -33.
\end{aligned}$$

$\square$

Solution du problème [4.2.3]
Solution de a)

$\int xe^{x^2}dx$	On pose $u = x^2$. Alors:
$\Vert$	$du = u'dx = 2xdx$ et $xdx = \frac{1}{2}du$.
$\Vert$	On substitue.
$\int e^u \frac{1}{2}du$	On intègre.
$\Vert$	
$\frac{1}{2}e^u + C$	On revient à x en remplaçant $u = x^2$
$\Vert$	
$\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$	

$\square$

Solution de d)

$\int e^{9-5x}dx$	On pose $u = 9 - 5x$. Alors:
$\Vert$	$du = u'dx = -5dx$ et $dx = -\frac{1}{5}du$.
$\Vert$	On substitue.

$\int e^u \left(-\frac{1}{5}du\right)$ | On intègre.

$\|$

$-\frac{1}{5}e^u + C$ | On revient à x en remplaçant $u = 9 - x$

$\|$

$-\frac{1}{5}e^{9-5x} + C.$

$\square$

Solution de e)

$\int \frac{x}{5-x}dx$ | On pose $u = 5 - x$. Alors:

$\|$ | $du = u'dx = -dx$, $dx = -du$ et $x = 5 - u$.

$\|$ | On substitue.

$\int \frac{5-u}{u}(-du)$ | On intègre.

$\|$

$\int \left(-\frac{5}{u} + 1\right) du$

$\|$

$-5\ln|u| + u + C$ | On revient à x en remplaçant $u = 5 - x$

$\|$

$-5\ln|5-x| + (5-x) + C.$

$\square$

Solution de g)

$\int x\sqrt{9-x^2}dx$ | On pose $u = 9 - x^2$. Alors

$\|$ | $du = u'dx = -2xdx$ et $xdx = -\frac{1}{2}du$.

$\|$ | On substitue.

$\int \sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}du\right)$ | On intègre.

$\|$

$-\frac{1}{2}\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C$ | On revient à x en remplaçant $u = 9 - x^2$

$$\|$$

$$-\frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2}+C.$$

□

Solution du problème [4.2.4]
Solution de b)

$$\int xe^{-3x}dx$$ On pose $u=x$, $v'=e^{-3x}$.

$$\|$$ Alors:m $u'=1$, $v=\int v'dx=\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}$.

$$\int uv'dx$$ On applique la formule (29)

$$\|$$

$$uv-\int u'vdx$$ On remplace.

$$\|$$

$$x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx$$

$$\|$$

$$-\frac{1}{3}xe^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}dx$$ On intègre

$$\|$$

$$-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C.$$

□

Solution de d)

$$\int x^{-3}\ln x dx$$ On pose $u=\ln x$, $v'=x^{-3}$.

$$\|$$ Alors: $u'=x^{-1}$, $v=\int v'dx=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}$.

$$\int uv'dx$$ On applique la formule (29)

$$\|$$

$$uv-\int u'vdx$$ On remplace.

$$\|$$

$$\ln x\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)-\int x^{-1}\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)dx$$

$$\|$$

$$-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x+\frac{1}{2}\int x^{-3}dx$$ | On intègre.

$$\|$$

$$-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x-\frac{1}{4}x^{-2}+C.$$

□

Solution de j)

$$\int(3x^2-2x)e^x dx$$ | On pose $u=3x^2-2x$, $v'=e^x$.

$$\|$$ | Alors: $u'=6x-2$, $v=e^x$.

$$\int uv'dx$$ | On applique la formule (29)

$$\|$$

$$uv-\int u'vdx=$$ | On remplace.

$$\|$$

$$(3x^2-2x)e^x-\int(6x-2)e^x dx$$ | On re-intègre par parties. On pose

$$\|$$ | $u=6x-2$, $v'=e^x$. Alors

$$\|$$ | $u'=6$, $v=e^x$.

$$(3x^2-2x)e^x-\left((6x-2)e^x-\int 6e^x dx\right)$$ | On intègre.

$$\|$$

$$(3x^2-2x)e^x-(6x-2)e^x+6e^x$$

$$\|$$

$$(3x^2-8x+8)e^x+C.$$

□

Solution du problème [4.3.1]
Solution de a)

$$\int_1^1(3e^{x^2+7\sqrt{x}}+\ln(1+x^2))dx=0.$$ | parce que $\int_a^a f(x)dx=0$

□

Solution de c)

$\displaystyle\int_0^1 (x^2 + x^{1/2})dx$	On intègre utilisant les régles d'intégration (puissance)
$\|$	
$\displaystyle\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$	
$\|$	
$\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{1}{3/2}$	
$\|$	
$1.$	

$\square$

Solution de d)

$\displaystyle\int_2^3 (x+1)\sqrt{x-2}dx$	On pose $u = x - 2$.
$\|$	Alors $x = u + 2$, $dx = du$.
$\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} (u+3)u^{1/2}du$	On substitue.
$\|$	
$\displaystyle\int_{x=2}^{x=3} (u^{3/2} + 3u^{1/2})du$	On intègre par rapport à u (on garde les bornes de x).
$\|$	
$\displaystyle\left[\frac{u^{5/2}}{5/2} + 3\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{x=2}^{x=3}$	On revient à x en replaçant $u = x - 2]$
$\|$	On évalue
$\displaystyle\left[\frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + 2(x-2)^{3/2}\right]_{x=2}^{x=3}$	
$\|$	
$\displaystyle\frac{2}{5} + 2$	
$\|$	
$\displaystyle\frac{12}{5}.$	

$\square$

Solution de o)

$$\int_0^2 |x^2-1|dx = \qquad \Bigg|\text{Notez que } |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & |x| \geq 1, \\ -(x^2-1), & |x|<1 \end{cases}$$

$$\| \qquad \Big|\text{On sépare l'intègrale en deux morceaux,}$$

$$\int_0^1 |x^2-1|dx + \int_1^2 |x^2-1|dx$$

$$\| \qquad \Big|\text{et on remplace}$$

$$\int_0^1 (-(x^2-1))dx + \int_1^2 (x^2-1_dx$$

$$\| \qquad \Big|\text{On sépare l'intègrale en deux morceaux.}$$

$$\int_0^1 (-(x^2-1))dx + \int_1^2 (x^2-1)dx \qquad \Big|\text{On intègre chaque intègral}$$

$$\|$$

$$\Big[-\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big]_0^1 + \Big[\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big]_1^2 \qquad \Big|\text{On évalue}$$

$$\|$$

$$-\left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{3}2^3-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$\|$$

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

$$\|$$

$$2.$$

□

6.5 Solutions des problèmes choisis du chapitre 5

Solution du problème [5.3.1]
Solution de a)
Ici, la fonction f est une fonction rationnelle en x et y. Son dénominateur est différent de zéro. Donc, $Dom(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour l'image, on montre que $Im(f) = \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{R}$. On cherche (x, y) tel que $f(x, y) = z$, c.à.d. $4x - 5y - \dfrac{3x}{x^2+7y^2} = z$. On peut considérer $(0, y)$, donc $-5y = z$. On déduit que $y = -\dfrac{z}{5}$. Donc, $f(0, -\frac{z}{5}) = z$. Puisque z était arbitraire dans $\mathbb{R}$ ceci signifie que $Im(f) = \mathbb{R}$. □
Solution de b)

Ici,

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y \neq 0\} = \left\{(x,y),\ y \neq \frac{2}{3}x\right\}.$$

Quant à l'image, on a $Im(f) = \mathbb{R}$. En effet, $0 \in Im(f)$ parce que $f(0,1) = 0$. Maintenant, soit $z \neq 0$. On cherche $(x,y) \in Dom(f)$ tel que $f(x,y) = z$. On prend $(x,y) = (1,y) \in Dom(f)$. Alors

$$f(1,y) = \frac{1}{2-3y} = z, \text{ d'où } y = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{z}\right).$$

Donc, $f\left(1, \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{z}\right)\right) = z$, ce qui montre $Im(f) = \mathbb{R}$. □

Solution de c)
Ici

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 7y \geq 0\} = \left\{(x,y),\ y \leq \frac{2}{7}x\right\}.$$

Quant à l'image, on a $Im(f) = [0, \infty)$. Clairement $f(x,y) \geq 0$. Maintenant, soit $z \geq 0$. On cherche $(x,y) \in Dom(f)$ tel que $f(x,y) = z$. On prend $(x,y) = (x,0) \in Dom(f)$. Alors

$$f(x,0) = \sqrt{2x} = z, \text{ d'où } x = \frac{1}{2}z^2.$$

Donc, $f\left(\frac{1}{2}z^2, 0\right) = z$, ce qui montre $Im(f) = [0, \infty)$. □

Solution du problème [5.4.1]
Solution de a)

$$f_x(x,y) = 2, \qquad f_y(x,y) = -13.$$

Solution de b)

$$f_x(x,y) = y - 6xy + 4y^2 - 2xy^2, \qquad f_y(x,y) = x - 3x^2 + 8xy - 2x^2y.$$

Solution de e)

$$f_x(x,y) = e^{xy}y, \qquad f_y(x,y) = e^{xy}x.$$

Solution du problème [5.4.2]
Solution de a)

$$f_x(x,y) = y, \qquad f_y(x,y) = x,$$

$$
\begin{aligned}
&f_{xx}(x,y) = 0, && f_{yx}(x,y) = 1,\\
&f_{xy}(x,y) = 1, && f_{yy}(x,y) = 0.
\end{aligned}
$$

Solution de b)

$$
\begin{aligned}
&f_x(x,y) = 10x^9y^{-10}, && f_y(x,y) = -10x^{10}y^{-11},\\
&f_{xx}(x,y) = 10\cdot 9x^8y^{-10}, && f_{yx}(x,y) = -10\cdot 10x^9y^{-11},\\
&f_{xy}(x,y) = -10\cdot 10x^9y^{-11}, && f_{yy}(x,y) = (-10)(-11)x^{10}y^{-12}.
\end{aligned}
$$

Solution de g)

$$
\begin{aligned}
&f_x(x,y) = 2 - y + 3x^2y - 2xy^6, && f_y(x,y) = -x + x^3 - 6x^2y^5,\\
&f_{xx} = 6xy - 2y^6, && f_{yx} = -1 + 3x^2 - 12xy^5,\\
&f_{xy}(x,y) = -1 + 3x^2 - 12xy^5, && f_{yy}(x,y) = -30x^2y^4.
\end{aligned}
$$

Solution de h)

$$
\begin{aligned}
&f_x(x,y) = (1-y)^{-1}, && f_y(x,y) = x(1-y)^{-2},\\
&f_{xx}(x,y) = 0, && f_{yx} = (1-y)^{-2},\\
&f_{xy} = (1-y)^{-2} && f_{yy}(x,y) = 2x(1-y)^{-3}.
\end{aligned}
$$

Solution du problème [5.5.1]
A noter que l'équation du plan tangent au graphe de $z = f(x,y)$ au point (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$ est donnée par

$$z = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + z_0.$$

Solution de a)

Ici $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = f(1,2) = 3$,

$$
\begin{aligned}
&f_x(x,y) = 2xy + y^2, && f_y(x,y) = x^2 + 2(x-1)y,\\
&f_x(1,2) = 4 + 4 = 8, && f_y(1,2) = 1 + 0 = 1,\\
&z = 8(x-1) + 1(y-2) + 3, &&\\
&z = 8x + y - 7. &&
\end{aligned}
$$

Solution de d)

Ici $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = f(1,2) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$,

$$
\begin{aligned}
&f_x(x,y) = y^2 - \frac{1}{y}, && f_y(x,y) = 2xy + \frac{x}{y^2},\\
&f_x(1,2) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, && f_y(1,2) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4},
\end{aligned}
$$

$$z = \frac{7}{2}(x-1) + \frac{17}{4}(y-2) + \frac{7}{2},$$
$$z = \frac{7}{2}x + \frac{17}{4}y - \frac{17}{2}.$$

Solution du problème [5.6.1]
Ici, on va utiliser Théorème 5.12.
Solution de a)

i) On trouve les PCs.

1) Pour ceci, d'abord on calcule f_x, f_y:

$$f_x(x,y) = \frac{2}{3}x - y - 3, \quad f_y(x,y) = -x + 2y.$$

2) On resout le système

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \frac{2}{3}x - y - 3 = 0, & [1] \\ f_y(x,y) = -x + 2y = 0. & [2] \end{cases}$$

De [2] on a $x = 2y$. On le remplace dans [1]:

$$\frac{2}{3}(2y) - y - 3 = 0, \quad y = 9.$$

De [2] on obtient $x = 2 \cdot 9 = 18$. Donc $(18, 9)$ est le PC de f.

ii) Classification.

1) On calcule les dérivées secondes et D:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{2}{3}, \quad f_{xy}(x,y) = -1, \quad f_{yy} = 2, \\ D(x,y) &= \frac{4}{3} - (-1)^2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2) Classifions les PCs:

$$(18,9) \quad : \quad D(18,9) = \frac{1}{3} > 0, \ f_{xx}(18,9) = \frac{2}{3} > 0;$$
donc $(18, 9)$ est un minimum local.

Solution de d)

i) On trouve les PCs.

1) Pour ceci, d'abord on calcule f_x, f_y:

$$f_x(x,y) = 2x + 2xy, \quad f_y(x,y) = 2y + x^2.$$

2) On resout le système

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x + 2xy = 0, & [1] \\ f_y(x,y) = 2y + x^2 = 0. & [2] \end{cases}$$

De [2] on a $y = -\dfrac{1}{2}x^2$. On le remplace dans [1]

$$\begin{aligned} 2x + 2x\left(-\frac{1}{2}x^2\right) &= 0, \\ 2x\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) &= 0, \quad \text{donc} \\ x &= 0 \text{ ou } 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0; \text{ ou bien} \\ x &= 0,\ x = -\sqrt{2},\ x = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Remplaçant x dans [2] on trouve y:

$$y = 0,\ y = -1,\ y = -1.$$

Donc, les PCs sont

$$(0,0),\ (-\sqrt{2},-1),\ (\sqrt{2},-1).$$

ii) Classification.

1) On calcule les dérivées secondes et $D(x,y)$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 + 2y, \quad f_{xy}(x,y) = 2x, \quad f_{yy} = 2, \\ D(x,y) &= 2(2+2y) - (2x)^2 = 4(1+y) - 4x^2. \end{aligned}$$

2) Classifions les PCs

$$\begin{aligned} (0,0) &: D(0,0) = 4 > 0,\ f_{xx}(0,0) = 2 > 0, \\ & \quad \text{donc } (0,0) \text{ est un minimum local,} \\ (-\sqrt{2},-1) &: D(-\sqrt{2},-1) = -8 < 0, \\ & \quad \text{donc } (-\sqrt{2},-1) \text{ est un PS,} \\ (\sqrt{2},,-1) &: D(\sqrt{2},-1) = -8 < 0;, \\ & \quad \text{donc } (\sqrt{2},-1) \text{ est un PS.} \end{aligned}$$