Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

Arian Novruzi
Department of Mathematics and Statistics
University of Ottawa
email:novruzi@uottawa.ca

Méthodes Mathématiques I
MAT1700
Automne 2018
Examen de mi-session#2

+ Sol. (a)

NOM de famille______________________ Prénom:___________________
Numéro d'étudiant:____________________

Instructions:

- La durée de l'examen est de 80 minutes.
- L'utilisation de manuel, notes de cours, calculatrice ou tout autre appareil électronique de calcul est interdite.
- Pour les problèmes à **choix multiple**: écrivez la reponse (lettre de 'A' à 'E') dans le tableau ci-dessous
- Pour les problèmes à **solution longue**: écrivez clairement la solution dans l'espace qui suit la question. Vous pouvez utiliser le verso des pages si nécessaire (veuillez clairement l'indiquer dans ce cas).
- Vous trouverez une feuille de brouillon à la fin du questionnaire.
- Ne détachez pas le questionnaire.
- **NB**
  Les téléphones cellulaires, les appareils électroniques non autorisés ou les notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen livre ouvert) ne sont pas autoriss pendant cet examen. Les téléphones et les appareils doivent être éteints et rangés dans votre sac. Ne les gardez pas en votre possession, par exemple dans vos poches. Si vous êtes pris avec un tel appareil ou document, des allégations de fraude scolaire seront déposes, ce qui pourrait entrainer l'obtention d'un 0 (zéro) pour l'examen.
  En apposant votre signature ci-dessous, vous reconnaissez avoir lu et vous assurer de respecter l'énoncé ci-dessus.

  Signature:________________

Réponses

	1	2	3	4	5	6	7	Total
Problème	à choix multiple (votre reponse: une lettre A-E)				à solution longue (n'écrivez rien ici)			
Votre résultat	A	E	D	B				

Problèmes à choix multiple (5 points chacun)

Problème 1 *Dans quelle intervalle la fonction* $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ *est croîssante?*

$\boxed{\textbf{A) } (-1,1)}$ **B)** $(-\infty,-1)$ **C)** $(1,+\infty)$ **D)** $(-2,2)$ **E)** $(-\infty,1)$

Sol

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \qquad f'(x)=0 \iff 1-x^2=0, \quad x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Problème 2 *La fonction profit d'un produit est donnée par* $P(x) = xe^{-x}$. *Que vaut son maximum dans* $(0,+\infty)$*?*

A) e **B)** e^2 **C)** 2 **D)** 1 $\boxed{\textbf{E) } e^{-1}}$

Sol

$$P'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x),$$

$$P'(x)=0, \quad 1-x=0, \quad x=1$$

x	0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$\nearrow$	max loc global max	$\searrow$	

$$\underline{P(1) = 1e^{-1}}$$

Problème 3 *Le taûx de change de la balance d'un compte bancaire pendant une période de cinques années est donné par le graphe dans la figure. Quelle est l'acummulation d'argent dans le compte pendant cette période.*

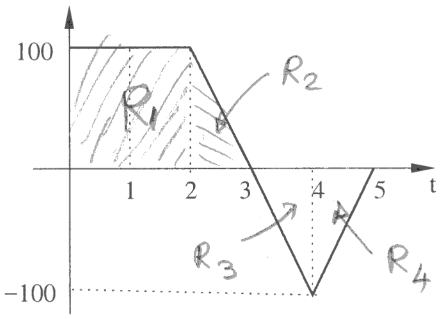
A) 50

B) 25

C) 75

D) 150

E) 100



Solution

$$\int_0^5 f(t)\,dt = A(R_1) + A(R_2) - A(R_3) - A(R_4)$$

$$= 2\cdot 100 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 100 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 100 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 100$$

$$= 200 + 50 - 50 - 50$$

$$= 150$$

Problème 4 *La fonction demande d'un produit est* $p(x) = 2 - x$ *alors que sa fonction offre est* $s(x) = x$. *Que vaut le surplus des producteurs?*

A) 1 B) 1/2 C) 4 D) 8 E) 2

Solution

$p(x) - s(x) = 0, \quad 2 - x - x = 0, \quad x_0 = 1$

$p_0 = 1$

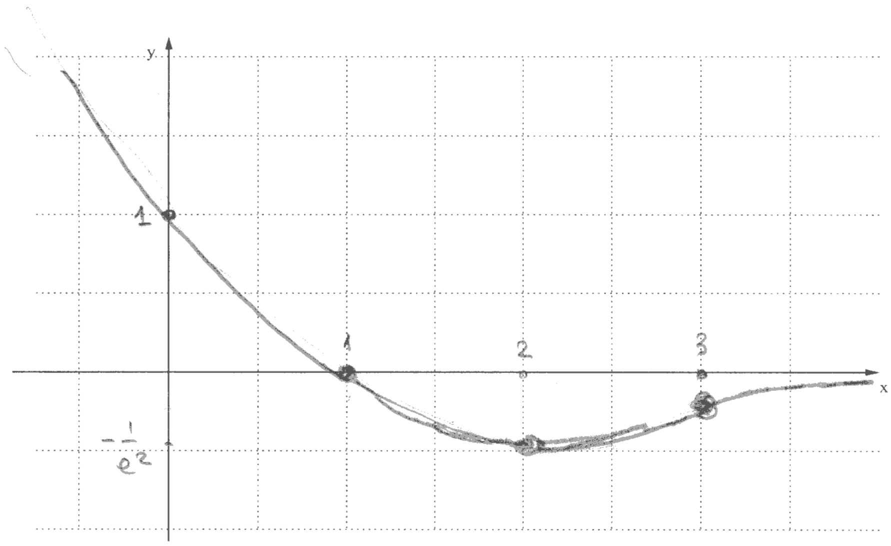
$$S.P = \int_0^1 (1 - x)\,dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

Problèmes à solution longue

Problème 5 (10 points)[1] *Tracez le graphe de la fonction* $f(x) = (1-x)e^{-x}$ *en suivant les étapes suivantes.*

1. Trouvez Dom(f).
2. Trouvez les AV et AH (s'il en y a).
3. Trouvez les racines de $f(x) = 0$ *et tracez les intersections du graphe de f avec l'axe des x.*
4. Trouvez $f(0)$ *et tracez l'intersection du graphe de f avec l'axe des y.*
5. Calculez $f'(x)$ *et resoudre* $f'(x) = 0$.
6. Calulez $f''(x)$ *et resoudre* $f''(x) = 0$.
7. Faites un tableau avec $f'(x)$, $f''(x)$ *et identifiez les intervalles de croîssance/décroîssance, les PCs, les intervalles de concavité vers le haut/bas et les PIs.*
8. Identifiez les extrema (globales et/ou locales).
9. Tracez le graphe de f.



1) $Dom(f) = \mathbb{R}$

2) AV : aucune, parce que $f \in C^0(\mathbb{R})$
AH: $y=0$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1-x)e^{-x} = 0$

3) $f(x)=0$, $(1-x)e^{-x}=0$, $x=1$.

4) $f(0) = e^{-0} = 1$

[1]donnez tous les détails de la solution

Problème 5, continuation

5) $f'(x) = -e^{-x} + (1-x)e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x}(1+1-x) = e^{-x}\cdot(x-2)$

$f'(x) = 0, \quad x-2=0, \quad x=2.$

6) $f''(x) = -e^{-x}\cdot(x-2) + e^{-x} = e^{-x}\cdot(-(x-2)+1) = e^{-x}(-x+3)$

$f''(x)=0, \quad x=3.$

7).

x	$-\infty$		0		1		2		3	
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↘		↘		↘		↗		↗

8).

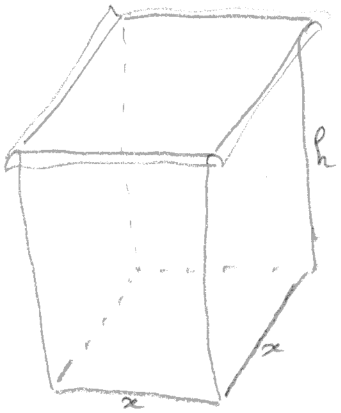
min loc @ 2

$f(2) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2} \approx -\frac{1}{8}$

Problème 6 (10 points)[2] *On fait des boîtes rectangulaires de base carrée et face de haut ouverte, et de volume 125 cm^3. Le coût de la base est de \$20 par cm^2, alors que le coût de chaque face lattérale est de \$10 par cm^2. Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent le coût?*

Solution

→ Soit x la dimension de la base et h l'hauteur.



→ alors $x^2 \cdot h = V = 125$

→ le coût C est

$$C = \underbrace{x^2 \cdot 20}_{\text{le cout de la base.}} + \underbrace{4 \cdot x h \cdot 10}_{\text{le coût de quatre faces latterales; chacune } x \cdot h \cdot 10\ \$.}$$

On élimine h; de $x^2 \cdot h = V$, $h = \frac{V}{x^2}$; d'où

$$C = 20x^2 + 40x \cdot \frac{V}{x^2} = 20x^2 + \frac{40V}{x}.$$

→ on minimise C pour $x \in I = (0, +\infty)$

$$C' = 40x - \frac{40V}{x^2} = 40\,\frac{x^3 - V}{x^2} = 0 \iff x^3 = V, \text{ d'où}$$

$$x = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{125} = 5$$

→ classification:

x	0		5		$+\infty$
C'		$-$	0	$+$	
C		$\searrow$		$\nearrow$	

Donc $C(5)$ est minimum local; puisque $x = 5$ est le seul P.C. dans I, $C(5)$ est min global.

Donc, $x = 5$, $h = \frac{V}{x^2} = \frac{125}{25} = 5$ minimisent le coût.

---

[2]donnez tous les détails de la solution

Problème 7 (10 points)[3] *Calculez les integrales suivantes.*

$$\int xe^{-x^2}dx = \int e^{-x^2} x\,dx = \int e^{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}dt\right)$$

$t = -x^2$

$dt = -2x\,dx$

$x\,dx = -\frac{1}{2}dt$

$$= -\frac{1}{2} e^{t} + C$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

$$\int x \ln x dx =$$

$f(x) = \ln x \quad \Big| \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = x \quad \Big| \quad g(x) = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \frac{1}{2} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

[3]donnez tous les détails de la solution