3741 Examen ~~de~~ mi-session : solutions

1)a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ $\qquad \|A\|_1 = \max\{6, 7, 10\} = 10$

4

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -25 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -1 & -4 \end{array}\right] \qquad \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -25 & -3 & -10 \\ 7 & 1 & 3 \\ -10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$AA^{-1} = I$ ✓

$\therefore \|A^{-1}\|_1 = \max\{42, 5, 17\} = 42.$

$\therefore K(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 42 \times 10 = 420$

b) $\|B\| = \max\left\{ \dfrac{\|Bx\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\}$ $\qquad$ Soit v un vec propre $v \neq 0$, $Bv = \lambda v$.

3

$\geq \dfrac{\|Bv\|}{\|v\|}$ $\qquad$ pour ce choix de v

$= \dfrac{\|\lambda v\|}{\|v\|} = \dfrac{|\lambda| \|v\|}{\|v\|}$ $\qquad$ propriété de la norme

$= |\lambda|.$

1 c) $\alpha = \|C\| < 1$

4

$D = I + C$

$\therefore$ Par le lemme de Banach, D est inversible.

De plus : $\|D^{-1}\| = \|(I+C)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\alpha}$

Par l'inégalité Δlaire (devoir), $\|I+C\| \leq \|I\| + \|C\|$.

Puisque $\|I\| = \max\left\{\dfrac{\|Ix\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} = 1$, nous avons

$$K(D) = \|D\|\,\|D^{-1}\| \leq (\|I\| + \|C\|)\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha}.$$

2a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

4

option ⓐ

$$\underset{\sim}{\tfrac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2R1+R2 \\ -5R_1+R3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \underset{R2 \leftrightarrow R3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \frac{1}{2}R2 \\ -R3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ (des opérations)

$\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $P_1^{-1}E_1^{-1}P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $L = (P_1^{-1}E_1^{-1}P_1)E_2^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et $PA = LU$.

option ② : on prévoit la nécessité de $P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$

$$PA = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 6 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}R1 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ -5R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} \\ \frac{1}{2}R3 \\ -1R4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U \qquad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(lu des opérations faites)

2b) Par le thm du cours, B aura une décomposition LU inversible ssi $\det B_1 \neq 0$, $\det B_2 \neq 0$ et $\det B \neq 0$.

3

$B_1 = [a]$ donc ① $a \neq 0$

$B_2 = \begin{bmatrix} a & -5 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ donc ② $ab + 5 \neq 0 \Rightarrow b \neq \frac{-5}{a}$

$B = \begin{bmatrix} a & -5 & 5 \\ 1 & b & -4 \\ -5 & 3 & c \end{bmatrix}$ $\det B = a(bc+12) + 5(c-20) + 5(3+5b)$

$= abc + 12a + 5c + 25b - 85$

$= c(ab+5) + 12a + 25b - 85$

Donc les conditions nécessaires et suffisantes sont.

$a \neq 0$

$b \neq -5/a$

$c \neq \dfrac{85 - 12a - 25b}{ab+5}$

3a) $\langle u, v\rangle = 2i \qquad \|u\| = 1 \qquad \|v\| = 3$

4

$$\|(1+i)u - 2v\|^2 = \langle (1+i)u - 2v, (1+i)u - 2v\rangle \quad \text{par déf.}$$

$$= \langle (1+i)u, (1+i)u\rangle + \langle (1+i)u, -2v\rangle + \langle -2v, (1+i)u\rangle + \langle -2v, -2v\rangle \quad \text{par linéarité}$$

$$= \|(1+i)u\|^2 + \langle (1+i)u, -2v\rangle + \overline{\langle (1+i)u, -2v\rangle} + \|2v\|^2$$

$$= |1+i|^2\|u\|^2 + (-2)(1-i)\langle u,v\rangle + (-2)(1+i)\overline{\langle u,v\rangle} + 4\|v\|^2$$

$$= 2 + (2i-2)(2i) + (-2-2i)(-2i) + 4(9)$$

$$= 2 - 4 - 4i + 4i - 4 + 36$$

$$= 30$$

$$\therefore \|(1+i)u - 2v\| = \sqrt{30}$$

3b) $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & i \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

5

Gram-Schmidt: $u_1 = (i, -i, 1)$

$$\alpha_{12} = \frac{\langle u_1, v_2\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = \frac{\langle (i,-i,1), (1,i,-2)\rangle}{1^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$= \frac{-i-1-2}{3} = -\frac{i}{3} - 1$$

$$u_2 = v_2 - \alpha_{12}u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{bmatrix} + \left(\frac{i}{3}+1\right)\begin{bmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{3} + i \\ i + \frac{1}{3} - i \\ -2 + i/3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 + i \\ 1/3 \\ -1 + i/3 \end{bmatrix}$$

vér: $\begin{bmatrix} -i & i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 + i \\ 1/3 \\ -1 + i/3 \end{bmatrix} = -\frac{2}{3}i + 1 + i/3 - 1 + i/3 = 0$ ✓

$$Q = \begin{bmatrix} i & 2/3 + i \\ -i & 1/3 \\ 1 & -1 + i/3 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & -i/3 - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = QR$ décomp. non normalisé

3c) $\|(i, -i, 1)\| = \sqrt{3}$

3

$$\left\|\left(\frac{2}{3}+i, \frac{1}{3}, -1+\frac{i}{3}\right)\right\| = \sqrt{\frac{4}{9}+1+\frac{1}{9}+1+\frac{1}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore\ Q' = Q \begin{bmatrix} \sqrt{3}^{-1} & \\ & \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Les colonnes de Q' sont une base orthonormée de Col(A). $\therefore$ $P = Q'\overline{Q'}^T$ est la matrice de la projection orthogonale sur Col(A).

$$P = \begin{bmatrix} i & \frac{2}{3}+i \\ -i & 1/3 \\ 1 & -1+i/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i & 1 \\ \frac{2}{3}-i & 1/3 & -1-i/3 \end{bmatrix}$$

* Cette question n'était pas bien réussi; finalement l'examen était compté sur 28 (donc cette question / 1).