(2) Soit U un ~~espace~~ sous-espace de $\mathbb{C}^n$. base $\{v_1 \dots v_k\}$

Avec G-S, on peut trouver une base orthogonale de U. $\{u_1 \dots u_k\}$

étendre cette base à une base de $\mathbb{C}^n$. $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$.

Puis faits G-S de nouveau. $\{u_1 \dots u_k, u_{k+1} \dots u_n\}$

~~Alors span$\{u_{k+1}, \dots, u_n\} \perp U$.~~ $\forall v \in \mathbb{C}^n$,

$$v = \sum_i \frac{\langle u_i, v\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i$$

~~Si $v \in \mathbb{C}^n$ et~~

~~Lemme~~ def: $U^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, u\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$ complé orthogonale

lemme: $U^\perp = \text{span}\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$.

Dem: ~~thm~~ $\supseteq$ ✓

si $v \in U^\perp$, alors $\langle v, u_i\rangle = 0 \ \forall i \in \{1 \dots k\}$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\langle u_i, v_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i \in \text{span}\{u_{k+1}, \dots, u_n\} \ \square$$

eg $U = \text{span}\{(1,0,1), (0,1,0)\}$ $\quad U^\perp = \text{span}\{(1,0,-1)\}$.

---

(1) Soit U un sous-espace de $\mathbb{C}^n$, base $\{v_1 \dots v_k\}$. $A = [v_1 \dots v_k]$ $U = \text{Col}(A)$

Alors $U^\perp = \{w \in \mathbb{C}^n \mid$ ~~$\langle v, u\rangle = 0$~~ $\langle u, w\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$ complé orth.

$= \{w \in \mathbb{C}^n \mid \bar{u}^T w = 0 \ \forall u \in U\}$

~~Soit A une mat ass:~~

$= \{w \in \mathbb{C}^n \mid \bar{A}^T w = 0\}$

$= \text{Noy}(\bar{A}^T)$

deux façons de compr $U^\perp$.

3741

~~Rappel:~~
~~Un petit sommaire par rapport à la projection orthogonale et la décomp QR.~~ (cf devoir 3 et Q3 de l'examen)

~~def~~ Lemme:
(3) ~~Défn~~ Soit $\mathcal{U}$ un sousespace de $\mathbb{C}^n$.
La projection orthogonale de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathcal{U}$ est la transformation linéaire P qui satisfait à une des conditions équivalentes suivantes.

① $\forall v \in \mathbb{C}^n$ $Pv \in \mathcal{U}$, et $Pv - v \in \mathcal{U}^\perp = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \langle w, v\rangle = 0 \ \forall v \in \mathcal{U}\}$.

② $\forall v \in \mathcal{U}$, $Pv = v$; $\forall v \in \mathcal{U}^\perp$, $Pv = 0$.

③ $\forall v \in \mathbb{C}^n$, ~~$Pv \in \mathcal{U}$ et~~ $\|Pv - v\| = \min\{\|u - v\| \mid u \in \mathcal{U}\}$.
"Pv est l'élément de $\mathcal{U}$ le plus proche à v".

Dem d'équivalence

① ⇒ ③ Supposons que $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $Pv \in \mathcal{U}$ et $Pv - v \in \mathcal{U}^\perp$.
Soit $u \in \mathcal{U}$. Alors ~~$\|u - v$~~

~~$\|u - v\| = \|\underbrace{Pv - u}_{\in \mathcal{U}} + u - v\|$~~

$$\|u - v\|^2 = \|\underbrace{u - Pv}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{Pv - v}_{\in \mathcal{U}^\perp}\|^2$$
$$= \|u - Pv\|^2 + \|Pv - v\|^2$$

$\therefore \|Pv - v\| \le \|u - v\| \quad \forall u \in \mathcal{U}$. ✓

③ ⇒ ② Supposons que $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $\|Pv - v\| = \min\{\|u - v\| : u \in \mathcal{U}\}$
Soit $v \in \mathcal{U}$. Alors $\|v - v\| = 0$ et $v \in \mathcal{U}$ $\therefore$ $Pv = v$. par minimalité.
Soit $v \in \mathcal{U}^\perp$. Alors $\forall u \in \mathcal{U}$, $\|\underset{\mathcal{U}}{u} - \underset{\mathcal{U}^\perp}{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, qui est minimal ssi $u = 0$.
$Pv = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit P tq $\forall v \in \mathcal{U}$ $Pv = v$ et $\forall v \in \mathcal{U}^\perp$, $Pv = 0$. 4

~~il faut démontrer~~

Soit $v \in \mathbb{C}^n$. Alors on peut décomposer

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$$

donc chaque élément $v \in \mathbb{C}^n$ est une somme $v = u + u'$

avec $u \in \mathcal{U}$ et $u' \in \mathcal{U}^\perp$.

$\Rightarrow$ $Pv = Pu + Pu' = Pu \in \mathcal{U}$.

et $Pv - v = u - v = u' \in \mathcal{U}^\perp$.

$\square$

Comment calculer la projection?

Soit $\{u_1, \dots u_k, u_{k+1} \dots u_n\}$ une base orthg de $\mathbb{C}^n$

tq $\mathcal{U} = \mathrm{span}\{u_1, \dots u_k\}$.

Alors $$Pv = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u_i, v\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i \in \mathcal{U}$$ et $$Pv - v = -\sum_{i=k+1}^{n} \frac{\langle u_i, v\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i \in \mathcal{U}^\perp.$$

~~Si $\{u_1 \dots u_k\}$ est une base orthonormée~~

Donc ~~$Pv =$~~ Puisqu $\langle u_i, v\rangle = \overline{u_i}^T v$, et $\langle u_i, v\rangle u_i = u_i \cdot \langle u_i, v\rangle$

$$Pv = \underbrace{\sum \frac{1}{\|u_i\|^2} u_i \overline{u_i}^T}_{\left(\frac{1}{\|u_1\|} u_1\right)\left(\frac{1}{\|u_1\|}\overline{u_1}^T\right) + \dots + \left(\frac{1}{\|u_k\|} u_k\right)\left(\frac{1}{\|u_k\|}\overline{u_k}^T\right)} v$$

~~Alors~~ Que sont ces vecteurs $\frac{1}{\|u_i\|} u_i$? La normalisation de $\{u_i\}$

Donc si $\{\overline{w}_1', \ldots, w_k'\}$ est une base orthonormée (5)
de U, nous avons

$$P = w_1 \overline{w}_1^T + \cdots + w_k \overline{w}_k^T$$
$$= Q \overline{Q}^T$$

où $Q = [w_1 \ldots w_k]$ est la matrice ayant colonnes $\{w_1, \ldots w_k\}$.

Quand on calcule la décomposition QR, ~~non na~~ nous obtenons

$$\underset{n \times m}{A} = Q_0 R_0$$

Q_0 : colonnes orthogonales $n \times k$
R_0 : ~~[illegible]~~ échelonnée, taille $k \times m$.

rang $A = k$ ~~rang Q~~

$Col(Q_0) = Col(A)$ par Gram-Schmidt.
$Row(R_0) = Row(A)$ par rang

~~Donc~~ Soient $\|u_1\| \ldots \|u_k\|$ les normes des colonnes de Q_0

Alors avec $D_0 = \begin{bmatrix} \|u_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|u_k\| \end{bmatrix}$

nous obtenons

$$Q_1 = \underbrace{Q_0 D_0^{-1}}_{\text{colonnes orthonormées.}} \qquad R_1 = D_0 R_0$$

Donc la projection orthogonale sur $Col(A)$ est donné par

$$Q_1 \overline{Q}_1^T \quad \text{ou} \quad Q_0 \underbrace{D_0^{-1} \overline{D}_0^{-1T}}_{\begin{bmatrix} \|u_1\|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|u_k\|^2 \end{bmatrix}^{-1}} \overline{Q}_0^T$$

De l'autre sens, si on calcule

$$\underset{k\times n}{\overline{Q_k}^T}\ \underset{n\times k}{Q_k}$$

ligne $i = \overline{w_i}^T$ colonne $j = w_j$

$\therefore$ l'élém (i,j) est $\overline{w_i}^T w_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

car $\{w_1 \ldots w_k\}$ est une base orthonormée.

$\therefore$ $\overline{Q_k}^T Q_k = I_{k\times k}$.

* Devoir 3: utiliser $A = Q_k R_k$ afin de démontrer des autres formules pour la projection et pour la pseudoinverse de A.

Remarque: $Ax = 0$

$\iff$ $\forall i$ ligne i de $A \cdot x = 0$

$\iff$ $\forall i$ colonne i de $\overline{A}^T$

$\overline{A}^T x = 0 \iff \forall i$ ligne i de $\overline{A}^T \cdot x = 0$

$\iff (\forall i$ colonne i de $A)\ x = 0$

$\iff x \in Col(A)^{\perp}$.

$\therefore$ $Noy(\overline{A}^T) = Col(A)^{\perp}$.