Quiz 3 (28 mars)

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A - xI) = (x+2)^2$$

$\therefore$ une seule valeur propre $(\lambda = -2)$.

Évidemment, A n'est pas diagonalisable, car si elle l'était, on aurait $A = P\begin{bmatrix} -2 & \\ & -2 \end{bmatrix}P^{-1} = -2PP^{-1} = -2I$.

Base de V_{-2} : $\left[A+2I \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$

$x - 3y = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} r \,\middle|\, r \in \mathbb{C} \right\}$

$\hookrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Puis on cherche une chaîne ; ici il suffit de résoudre

$$(A+2I)(w) = v.$$

$$\left[\begin{matrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow \text{sol'n} : \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}$$

$\Rightarrow \quad w = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (par exemple) est une solution.

Par rapport à la base $\{v, w\}$ on a $Av = -2v$, $Aw = -2w + v$

or : $\quad A = PJP^{-1}$ avec $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

vérification : $\quad AP = PJ$.

NB Puisque $(A+2I)^2 = 0$ par Cayley-Hamilton, il suit que pour presque tout choix de $w \in \mathbb{C}^2$ (en fait : $\forall w \in \mathbb{C}^2 \setminus V_{-2}$) on aura que $(A+2I)w \in V_{-2} \setminus \{0\}$, ce qui donne une chaîne.

(mais ce n'est pas le cas général !)