Université d'Ottawa · University of Ottawa
Faculté des sciences Mathématiques et de statistique · Faculty of Science Mathematics and Statistics

MAT 2771
Solutions au test de mi-session

le 23 octobre, 2014 **Professeur M. Alvo**

Temps: 80 minutes
Numéro d'**étudiant:**____________________
Prénom**:** ____________________
Nom de famille**:**____________________

Ce test est à livre ouvert**. Les calculettes sont permises.** Répondez à toutes les questions. **Ecrivez vos réponses dans la table suivante. NOTE: A remettre seulement cette page à la fin de l'examen. Vous pouvez garder le questionnaire.**

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	D	E	A	C	C	B	B	C	C	D	E	A

1. A and B sont deux événements tels que $P(A \cap B) = .3$ et $P(A \cup B) = .7$. Quelle est la probabilité qu' exactement un des deux événements se réalise? (Aide: Tracez un diagrame de Venn.)

   (A) $.3$ (B) $.7$ (C) $.5$ (D) $.4$ (E) pas suffisament d'information donnée

   $P(\{A \cap B'\} \cup \{A' \cap B\}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = .7 - .3 = .4$

2. Deux prix différents (meilleur performance académique et meilleur leadership) seront accordés aux étudiants d'une classe de 20 étudiants. Dans combien de façons serait-il possible d'accorder les prix si: (i) un étudiant peut recevoir les deux prix; (ii) un étudiant ne peut pas recevoir les deux prix?

   (A) $\begin{array}{ll} (i) & 300 \\ (ii) & 200 \end{array}$ (B) $\begin{array}{ll} (i) & 400 \\ (ii) & 200 \end{array}$ (C) $\begin{array}{ll} (i) & 380 \\ (ii) & 200 \end{array}$ (D) $\begin{array}{ll} (i) & 200 \\ (ii) & 190 \end{array}$

   (E) $\begin{array}{ll} (i) & 400 \\ (ii) & 380 \end{array}$

   (i) Puisque la meme personne peut recevoir les deux prix,le nombre de facons est egale a $20 \times 20 = 400$.
   (ii) Puisque la meme personne ne peut pas recevoir les deux prix,le nombre de facons est egale a is $20 \times 19 = 380$.

3. Lupus est difficile à diagnostiquer. Un certain test indique que 30 % des patients n'ont pas cette maladie quand en realité ils l'ont. Si 2% de la population ont le lupus, quelle est la probabilité qu'un individu choisit au hasard a le lupus et que le test est positive (c'est à dire le test indique qu'il a le lupus) ?

   (A) 0.014 (B) 0.006 (C) 0.3 (D) 0.7 (E) 0.32
   Soit L l'evennement que la personne a le lupus et A que le test est positive.
   $P(L \cap A) = P(A \mid L)P(L) = .7 \times .02 = .014$

4. (suivit de la question #3) Le même test indique que 20% des patients en bonne santé seront diagnostiquer comme ayant le lupus. Si pour une personne choisie au hasard le test est positive, quelle est la probabilité qu'en effet cette personne a le lupus?

(A) 0.02 (B) 0.0297 (C) 0.0667 (D) 0.8 (E) 0.196

$P(L \mid A) = \frac{P(A|L)P(L)}{P(A|L)P(L)+P(A|L')P(L')} = \frac{.7\times.02}{(.7\times.02)+(.2\times.98)} = .0667.$

5. J'ai 5 clés qui se ressemblent dont une seule ouvre la porte de mon bureau. Tous les matins j'essaie une clé après l'autre jusqu'à ce que je trouve la bonne clé pour entrer dans mon bureau. Quelle est la probabilité que la bonne clé soit la troisième clé choisie?

   (A) $\frac{16}{125}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{16}{25}$ (E) $\frac{12}{125}$

   Par le principe de multiplication, la probabilite d'avoir la bonne cle au 3^e est donnee par le produit $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.

6. Un système électronique contient 4 composantes en parallèle. Le système fonctionne quand au moins une composante fonctionne. La probabilité que la i^e composante ne fonctionne pas est denotée par p_i, $i = 1, 2, 3, 4$, où $p_1 = .1, p_2 = .2, p_3 = .1, p_4 = .25$. Si les composantes fonctionnent indépendamment l'une de l'autre, quelle est la probabilité que le système fonctionne?

   A) 0.0005 (B) 0.9995 (C) 0.4860 (D) 0.6500 (E) 0.3500

   Le système fonctionne si au moins une composant fonctionne. Donc la probabilite est egale a 1-P(aucune composante fonctionne) $= 1 - .1 \times .2 \times .1 \times .25 = 0.9995$

7. Un jeu consiste à lancer deux dés équilibrés ensemble autant de fois que nécessaire pour obtenir pour la première fois une somme égale soit à 7 ou à 11. A chaque fois, on parie \$1 mais on gagne \$10 si on obtient une somme égale à 7 ou à 11. Les lancers sont effectués dans des conditions indépendantes et identiques. Calculez le gain moyen en \$ pour ce jeu.

   (A) $\frac{8}{36}$ (B) $\frac{44}{8}$ (C) 10 (D) 1 (E) $\frac{7}{11}$

La probabilite d'obtenir un 7 ou un 11 est $\frac{8}{36}$. Soit X le nombre de lancers necessaire pour obtenir soit un 7 ou un 11. X suit une distribution geometrique avec p=$\frac{8}{36}$ Mon gain moyen est egale a

$$E[10 - X] = 10 - E[X] = 10 - \frac{1}{p} = 10 - \frac{36}{8} = \frac{44}{8}.$$

8. La fonction génératrice d'une variable aléatoire X est donnée par

$$M_X(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{t}, t > 0$$

Calculez la variance σ^2 de X.

(A) $\frac{1}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0 (E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

A partir de la fonction generatrice de X on voit que $f(-1) = \frac{1}{4}$, $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{4}$. Donc , $\mu = \frac{-1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 0$ et $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

9. Un professeur reçoit en moyenne 5 courriels par jour. Si le nombre de courriels reçu suit une loi de Poisson, quelle est la probabilité qu'il reçoive au plus 20 courriels dans 3 jours?

(A) $\frac{5}{20}$ (B) 1 (C) 0.917 (D) 0.083 (E) $\frac{3}{5}$

Si X represente le nombre de courriels recus en 3 jours, $X \sim$ Poisson, $\lambda = 3 \times 5 = 15$. A partir de la Table III, $P(X \leq 20) = 0.917$

10.Soit une variable aléatoire X ayant la fonction de répartition suivante:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{20} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{20} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{10}{20} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{20} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \end{cases}$$

Calculez la probabilité conditionnelle que X soit strictement plus grand ou égale à 3 étant donné que X est strictement plus grand que 1.

(A) $\frac{1}{20}$ (B) $\frac{5}{20}$ (C) $\frac{10}{20}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{15}{20}$

$P(X \geq 3 | X > 1) = \frac{P(\{X \geq 3\} \cap \{X > 1\})}{P(X > 1)} = \frac{P(X \geq 3)}{P(X > 1)} = \frac{1 - F(2)}{1 - F(1)} = \frac{10/20}{15/20} = 2/3$

11.La densité d'une variable aléatoire discrète est

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

Calculez la variance σ^2 de X.

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{2}{10}$ (C) $\frac{4}{10}$ (D) 0 (E) $\frac{9}{20}$

$\mu = -\frac{2}{10} - \frac{1}{20} + 0 + \frac{1}{20} + \frac{2}{10} = 0 \Rightarrow \sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] = \frac{2}{10} + \frac{1}{40} + 0 + \frac{1}{40} + \frac{2}{10} = \frac{9}{20}$

12. Une urne contient 5 boules dont une seule est rouge. Il y a 10 urnes semblables. On pige une boule au hasard de chaque urne. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 3 boules rouges?

(A) 0.8791 (B) 0.1000 (C) 0.2000 (D) 0.3333 (E) 0.8570

Soit X le nombre de boules rouges choisie. $X \sim b(10, .2)$ et donc a partir de la Table II, $P(X \leq 3) = 0.8791$