MAT 2771 - Automne 2009
Test - Solutionnaire

1. La 11e édition de la Coupe Capitale Bell aura lieu du 30 décembre 2009 au 3 janvier 2010 dans notre belle capital national. C'est décrit comme le plus grand tournoi de hockey au monde et donc tous les hôtels locaux seront très occupé. Mes parents vont venir me visiter à Ottawa durant les fêtes au mois de décembre et ils souhaitent rester soit au Lord Elgin ou à la Place Cartier. Admettons que la probabilité qu'il n'y aura aucune chambre libre au Lord Elgin ni à la Place Cartier est 98%. La probabilité qu'il y aura une chambre libre au Lord Elgin est 1% et la probabilité qu'il y aura une chambre libre aux deux hôtels est 0.1%. Quelle est la probabilité qu'il y aura une chambre libre à la Place Cartier mais pas au Lord Elgin?

   (A) 0.9% (B) 1% (C) 2% (D) 0.1% (E) 1.9%

   Solution: Soient A="chambre libre au Lord Elgin" et B="chambre libre à la Place Cartier". On a $P(A' \cap B') = 0.98$, $P(A) = 0.01$ et $P(A \cap B) = 0.001$. On veut

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(A \cup B) - P(A) \\ &= [1 - P(A' \cap B')] - P(A) \\ &= (1 - 0.98) - 0.01 = 0.01. \end{aligned}$$

2. Considérons les conducteurs qu'on soupçonne de conduire sous l'influence de l'alcool. Les polices utilisent deux techniques pour vérifier le niveau d'alcool : une éthylométrie ou un analyse de sang. On utilise une éthylométrie pour 90% des cas, une analyse de sang pour 10% des cas, et on utilise les deux techniques pour 9% des cas. Considérons les événements "utiliser l'éthylométrie" et "utiliser une analyse de sang". Est-ce que ces événements sont indépendants?

   (A) oui (B) non (C) les informations données sont insuffisantes

Solution: Soient A="utiliser l'éthylométrie" et B="utiliser une analyse de sang". On a $P(A) = 0.9$, $P(B) = 0.10$ et $P(A \cap B) = 0.09$. Puisque $P(A)\,P(B) = 0.09 = P(A \cap B)$, alors A et B sont indépendants.

3. Considérons deux voies de transmission. Dans la plus fiable, un paquet sera reçu sans erreur avec une probabilité de 0.99. Toutefois, si nous utilisons la voie la moins fiable, cette probabilité est seulement 0.7. Supposons que 75% des paquets sont transmis par la voie la plus fiable. Calculer la probabilité qu'un paquet sera reçu sans erreur et qu'il fut transmis par la voie la **moins** fiable.

   (A) 0.175 (B) 0.7 (C) 0.25 (D) 0.2475 (E) 0.7425

   Solution: Soient C="sans erreur" et A="voie la plus fiable". On a $P(C|A) = 0.99$, $P(C|A') = 0.7$ et $P(A) = 0.75$. On veut

   $$P(C \cap A') = P(C|A')P(A') = (0.7)\,(0.25) = 0.175$$

4. Considérons la Question 3. On a reçu un paquet sans erreur. Quelle est la probabilité qu'il fut transmis par la voie la **plus** fiable?

   (A) 0.75 (B) 0.1907 (C) 0.2475 (D) 0.7425 (E) 0.8093

   Solution: on veut

   $$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A) + P(C|A')P(A')} = 0.8093$$

5. Il existe 20 cours différents de premier cycle en probabilité et statistique offerts par le département de mathématiques et de statistique. À chaque année, on me demande d'enseigner trois cours choisis au hasard. Quelle est la probabilité que je vais enseigner le même cours plus d'une fois au cours des 3 prochaines années? (Les trois cours que j'enseigne dans une même année sont tous différents.)

   (A) $\frac{17\times16\times15\times14\times13\times12}{(20\times19\times18)^2}$ (B) $1 - \frac{17\times16\times15\times14\times13\times12\times11\times10\times9}{(20\times19\times18)^3}$

   (C) $1 - \frac{17\times16\times15\times14\times13\times12}{20^6}$ (D) $1 - \frac{17\times16\times15\times14\times13\times12}{(20\times19\times18)^2}$

(E) $\frac{17\times16\times15\times14\times13\times12}{20^6}$

Solution: Par le principe de multiplication, le nombre de différentes façon qu'on puisse m'assigner trois cours choisis parmi 20 à chaque année pendant trois ans est

$$N(S) = \binom{20}{3}\binom{20}{3}\binom{20}{3} = \left[\frac{20!}{17!\,3!}\right]^3.$$

Si A est l'événement que je n'enseignerai pas le même cours, alors,

$$N(A) = \binom{20}{3}\binom{17}{3}\binom{14}{3} = \frac{20!}{17!\,3!}\cdot\frac{17!}{14!\,3!}\cdot\frac{14!}{11!\,3!} = \left[\frac{1}{3!}\right]^3\frac{20!}{11!}.$$

On veut

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{20!}{11!}\left(\frac{17!}{20!}\right)^3 = 1 - \frac{17\times16\times15\times14\times13\times12}{(20\times19\times18)^2}$$

6. Le taux d'échec à l'examen final d'un cours de calcul de première année est 20%. Quelle est la probabilité que le deuxième échec est le dixième examen corrigé par le professeur?

   (A) 1 (B) 0.6778 (C) 0.3020 (D) 0.3758 (E) 0.0604

   Solution: X le nombre d'examen corrigé afin d'observer 2 échec. X suit une loi binomiale négative avec $r = 2$ et $p = 0.2$. On veut

$$P(X = 10) = \binom{9}{1}(0.2)^2(0.8)^8 = 0.0604$$

7. Considérons la situation de la Question 6. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 2 échecs parmi les 10 premiers examens corrigés par le professeur?

   (A) 1 (B) 0.6778 (C) 0.3020 (D) 0.3758 (E) 0.0604

Solution: X le nombre d'échec en 10 examens. X suit une loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0.2$. Avec la Table II, on obtient

$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = 0.6778 - 0.3758 = 0.3020.$$

Solution Alternative: Avec la fonction masse de probabilité, on obtient

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} (0.2)^2(0.8)^8 = 0.3020.$$

8. Les clients arrivent à une banque selon un processus de Poisson avec un taux d'un client par 2 minutes. La banque ouvre à 9h. Quelle est la probabilité que le cinquième client arrive avant 9h10?

   (A) 0.560 (B) 0.616 (C) 0.176 (D) 0.500 (E) 1

   Solution: Soit X le nombre d'arrivée en 10 minutes. X suit une loi Poisson avec $\lambda = 5$ clients en moyenne en 10 minutes. Puisque $\{X \geq 5\}$="le 5e client arrive avant 9h10", alors on veut

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.440 = 0.560.$$

9. Considérons une variable aléatoire X avec la fonction génératrice des moments :

$$M_X(t) = ce^{-t} + 0.10 + ce^t + 0.15e^{2t} + ce^{3t},$$

   où c est une constante. Déterminer $P(X \leq 1)$.

   (A) 0.50 (B) 0.60 (C) 0.35 (D) 0.40 (E) information insuffisante

   solution: la fonction masse de probabilité pour X est

x	-1	0	1	2	3
$f_X(x)$	c	0.10	c	0.15	c

   $1 = \sum f_X(x) = 3\,c + 0.25 \quad \Rightarrow \quad c = 0.25$. Donc,

$$P(X \leq 1) = f_X(-1) + f_X(0) + f_X(1) = 0.25 + 0.10 + 0.25 = 0.60.$$

10. Soit X une variable aléatoire avec la loi (fonction masse de probabilité) suivante :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{30}, x = 0, 1, 2, 3$$

Déterminer μ_X et σ_X^2, la moyenne et la variance de X, respectivement.

(A) $\mu_X = \frac{10}{3}, \sigma_X^2 = \frac{62}{90}$ (B) $\mu_X = \frac{10}{3}, \sigma_X^2 = \frac{354}{30}$ (C) $\mu_X = \frac{7}{3}, \sigma_X^2 = \frac{114}{90}$

(D) $\mu_X = \frac{7}{3}, \sigma_X^2 = \frac{184}{30}$ (E) $\mu_X = \frac{7}{3}, \sigma_X^2 = \frac{62}{90}$

solution: Le premier et deuxième moment sont :

$$\sum x\, f_X(x) = 0\,(1/30) + 1\,(4/30) + 2\,(9/30) + 3\,(16/30) = 7/3$$

et

$$\sum x^2\, f_X(x) = 0^2\,(1/30) + 1^2\,(4/30) + 2^2\,(9/30) + 3^2\,(16/30) = 184/30.$$

Alors, $\mu_X = E[X] = 7/3$ et $\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = 62/90$.

11. Soit X une variable aléatoire muni de la fonction répartition suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/10, & 0 \le x < 1 \\ 1/4, & 1 \le x < 3 \\ 3/4, & 3 \le x < 5 \\ 5/6, & 5 \le x < 6 \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$

En sachant que X sera au plus 3, quelle est la probabilité conditionnelle que X sera au plus 1?

(A) $1/4$ (B) $1/3$ (C) $3/4$ (D) $2/3$ (E) $1/2$

solution: on veut

$$\begin{aligned} P(X \le 1 | X \le 3) &= \frac{P(\{X \le 1\} \cap \{X \le 3\})}{P(X \le 3)} \\ &= \frac{P(X \le 1)}{P(X \le 3)} \\ &= \frac{F(1)}{F(3)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

12. Mon ami et moi jouons le jeu suivant : Je lance un dé successivement et mon ami me verse deux dollars pour chaque lancé ne résultant pas d'un 6. Lorsque je roule un 6 pour la première fois, je dois payer mon ami dix dollars, et le jeu s'arrête. Soit W mon gain net lorsque le jeu s'arrête, où W est négatif si j'ai perdu de l'argent. Déterminer μ_W et σ_W^2, la moyenne et la variance de W. (Notez que W est le montant total payé à moi par mon ami moins dix dollars. Soit X le nombre total de lancé requis pour observer le premier 6 et exprimer W en fonction de X.)

    (A) $\mu_W = 0, \sigma_W^2 = 120$ (B) $\mu_W = 6, \sigma_W^2 = 30$ (C) $\mu_W = -10, \sigma_W^2 = 120$

    (D) $\mu_W = 2, \sigma_W^2 = 60$ (E) $\mu_W = 0, \sigma_W^2 = 60$

    Solution: X suit une loi géométrique avec $p = 1/6$ et $W = 2\,(X-1) - 10 = 2\,X - 8$. $\mu_X = E[W] = 2\,E[X] - 12 = 2\,(1/p) - 12 = 0$ et

    $$\sigma_W^2 = 2^2\,\sigma_X = 4\,(1-p)/p^2 = 120.$$