MAT 2771
Examen Final

Décembre 2009 **Professeur G. Lamothe**
Durée: 3 heures

 # d'étudiant: ____________________ ____________________________

Nom : __________________________ ___________________________

- **C'est un examen à livre ouvert. Seules les calculatrices non-graphiques et non-programmables sont permises.**
- **L'examen a 2 parties: A (choix multiples) et B (questions à réponses). Pour la partie A, inscrire votre réponse à chaque question dans le tableau fourni sur la page suivante. Pour la partie B, écrire vos réponses dans les espaces prévus sur le questionnaire.**

****

Pour le professeur seulement:

Partie A		
Partie B	1	
	2	
	3	
	4	
TOTAL		

PARTIE A: Choix multiples. 4 points par question.

Mettre la lettre correspondant à la bonne réponse dans l'espace prévu dans le tableau ci-dessous.

Question	1	2	3	4	5	6	7	8
Réponse								
Question	9	10	11	12	13	14	15	Total
Réponse								

1. Un étudiant en sciences a 10 livres qu'il va mettre sur son étagère. Parmi ces livres, 4 sont des livres de mathématiques, 3 sont des manuels de chimie, 2 sont des ouvrages de physique, et 1 est un livre de biologie. L'étudiant veut arranger les livres de telle façon que tous les livres traitant du même sujet apparaissent ensemble sur l'étagére. Combien d'arrangements différents sont possibles?

   (A) $10!$ (B) $\frac{10!}{4!\,3!\,2!\,1!}$ (C) $(4!\,3!\,2!\,1!)$ (D)* $(4!\,4!\,3!\,2!\,1!)$ (E) $4!$

2. Des données sur l'emploi d'une grande entreprise révèlent que 74% des travailleurs sont mariés, que 44% des travailleurs sont des diplômés, ainsi que la moitié des diplômés sont mariés. Quelle est la probabilité qu'un travailleur choisi au hasard est marié mais n'est *pas* un diplômé?

   (A) 0.52* (B) 0.50 (C) 0.22 (D) 0.48 (E) 0.38

3. Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité avec la fonction densité de probabilité

   $$f(x) = 2x,\ 0 < x < 1.$$

   Si $Y = \max(X_1, X_2, X_3)$, calculer $P(Y \leq \frac{1}{2})$.

   (A) 1 (B) 1/2 (C) 3 (D) 1/4 (E)* 1/64

4. La plupart des opérations financière auprès d'une banque sont gérées numériquement. Toutefois, toutes les transactions de grande envergure impliquant plus que 50000$ doivent être approuvées par le directeur de la banque. Un nouveau directeur commence à travailler aujourd'hui. Si 0.001 des transactions à la banque sont plus que 50000$, quel est le nombre espéré de transactions qui auront eu lieu lorsque le gestionnaire approuve sa troisième grande transaction? Supposons que les transactions sont indépendantes.

   (A) 6×10^3 (B) 3 (C) 3×10^{-3} (D) 10^3 (E)* 3×10^3

5. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité avec la fonction génératrice des moments:

$$M(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}.$$

   Déterminer $P(X_1 + X_2) = 2$.

   (A) 1/12 (B)* 5/18 (C) 1/9 (D) 7/36 (E) 7/18

6. La Voie Lactée est une galaxie avec une densité de 1 étoile par 16 années-lumière cube. Si on utilise la loi Poisson comme un modèle pour le nombre d'étoiles pour un certain volume d'espace, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 étoiles en 32 années lumière cube.

   (A) 0.406 (B) 0.677 (C) 0.594 (D) 0.920 (E) 0.264

7. Soit X une variable aléatoire continue avec la fonction densité de probabilité

$$f(x) = 2x,\ 0 < x < 1.$$

   Calculer $P(X > 1/3 \mid X < 1/2)$.

   (A) 1/3 (B) 2/3 (C) 4/5 (D) 4/9 (E)* 5/9

8. Considérons une variable aléatoire X muni de la fonction génératrice des moments

$$M(t) = \frac{1}{(1-2\,t)^5}, \quad t < \frac{1}{2}.$$

Calculer la probabilité que $P(3.247 < X < 20.48)$.

(A) 0.95* (B) 0.90 (C) 0.975 (D) 0.05 (E) 0.025

9. J'ai deux routes que je peux prendre pour me rendre à la maison de l'université. Le temps (en minutes) pour me rendre à la maison par la route A est une variable aléatoire normale de moyenne 20 minutes et d'écart-type 4 minutes. Le temps pour me rendre à la maison par la route B est une variable aléatoire normale de moyenne 22 et d'écart-type 3 minutes. En supposant l'indépendance, quelle est la probabilité qu'aujourd'hui le temps pour la route B sera plus grand que le temps pour la route A?
(A) 0.5000 (B) 0.7764 (C) 0.6026 (D)* 0.6554 (E) 0.3446

10. Supposons que la loi de probabilité $N(522, 16)$ est un bon modèle pour la masse (en kg) d'un taureau Angus d'un an. Déterminer $\pi_{0.05}$, le 5e centile de la masse des taureaux Angus âgés d'un an.

(A) 514.16 kg (B) 548.32 kg (C) 495.68 kg (D)* 515.42 kg (E) 528.58 kg

11. Soit X une variable aléatoire continue avec la fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - 1/x^2, & x \geq 1. \end{cases} .$$

Soit $Y = 1/X$. Déterminer la fonction densité de probabilité de Y.

(A) $f_Y(y) = \begin{cases} 1-y^2, & 0 < y < 1 \\ 0, & y \leq 0 \text{ ou } y \geq 1 \end{cases}$ (B) $f_Y(y) = \begin{cases} y^2, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$

(C)* $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & y \leq 0 \text{ ou } y \geq 1 \end{cases}$ (D)$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$

(E) $f_Y(y) = \begin{cases} y^2, & 0 < y < 1 \\ 0, & y \leq 0 \text{ ou } y \geq 1 \end{cases}$

12. Il est estimé que 4% des enfants ont un gène qui peut être lié avec le diabète juvénile. Les chercheurs qui espèrent suivre 10 de ces enfants pendant plusieurs années vérifient 120 nouveau-nés pour la présence de ce gène. Approximer la probabilité qu'ils trouvent suffisamment de sujets pour leur étude?

(A) 0.990 (B) 0.975 (C)* 0.025 (D) 0.0001 (E) 4.8

13. Soit $X_1, \ldots, X_{16}$ un échantillon aléatoire d'une loi normale de moyenne $\mu = 10$ et variance $\sigma^2 = 5$. Soit

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i}{16} \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i - \overline{X})^2}{15}.$$

Si c est une constante tel que $(S^2 > c) = 0.10$, alors $c =$

(A) 22.31 (B)* 7.437 (C) 8.547 (D) 25.641 (E) 70.62

14. Une serveuse croit que la loi de probabilité pour ces pourboires a une moyenne de $\mu = 9.60\$$ et un écart type de $\sigma = 5.40\$$. Approximer la probabilité que ces 25 prochains pourboires seront en moyenne moins que 8$. (La valeur d'un pourboire peut être considéré comme une variable aléatoire continue.)

(A) 0.6179 (B)* 0.0694 (C) 0.1515 (D) 0.3821 (E) 0.9306

15. Le nombre d'étudiants qui s'inscrivent à un cours de première année en psychologie est une variable aléatoire Poisson de moyenne 100. Si le nombre d'étudiants inscrits est de 120 ou plus, le professeur aura à enseigner le cours en deux sections distinctes, et si moins de 120 étudiants s'inscrivent alors le cours sera enseigné en une seule section. Approximer la probabilité que le professeur aura à enseigner deux sections.

(A)* 0.0256 (B) 0.0228 (C) 0.0202 (D) 0.9744 (E) 0.9772

Partie B: Questions à réponses 10 points par questions

Inscrivez vos réponses directement sur le questionnaire. Définissez clairement vos notations et montrer tous vos calculs.

1. Robert va rentrer chez lui à Thunder Bay pour les vacances de Noël. Il doit voler d'Ottawa à Sudbury, puis il prendra un vol de correspondance de Sudbury à Thunder Bay. La probabilité que son premier vol part à temps est 15%. Si le vol est à l'heure, la probabilité que les bagages vont se rendre au vol de correspondance à Sudbury est de 95%, mais si le premier vol est retardé, la probabilité que les bagages vont se rendre est 65%.

   (a) Quelle est la probabilité que ses bagages se rendre à Thunder Bay avec lui?

   (b) En sachant que ses bagages se rendre à Thunder Bay avec lui, quelle est la probabilité conditionelle que son premier vol fut retardé?

2. On lance un dé à 6 côtés. Soit X la face du dé.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de X?

   (b) Donner sa moyenne μ_X, sa variance σ_X^2 et son 2ième moment $E[X^2]$.

   (c) Définir $Y = X^2 - X$. Calculer $E[Y]$.

(d) Déterminer la fonction masse de probabilité de $Y = X^2 - X$.

(e) En utilisant la fonction masse de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2 - X$, calculer l'espérance de Y.

3. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ des variables aléatoires qui suivent la même loi de probabilité **discrète à valeurs entières**, chacun de moyenne $\mu = 0.4$ et de variance $\sigma^2 = 0.24$. Soit $Y = \sum_{i=1}^{25} X_i$.

   (a) Déterminer un minorant pour $P(6 < Y < 14)$.

   (b) Calculer $P(6 < Y < 14)$ approximativement.

(c) MAT 4999 est un cours très difficile. Le taux d'échec pour ce cours est de 40%. Présentement, il y a 25 étudiants inscrits au cours MAT 4999. Soit $X_i = 1$ si le $i$ème étudiant échoue le cours et $X_i = 0$ sinon, pour $i = 1, \ldots, 25$. Si $Y = \sum_{i=1}^{25} X_i$, alors Y est le nombre total d'échec. Calculer la valeur **exacte** de la probabilité qu'il y ait plus que 6 mais moins que 14 échecs en MAT 4999.

4. Dans cette question, nous élaborerons une approximation normale pour la loi gamma (n, θ). Considérons un processus Poisson de taux $\rho = 1/\theta$. Soit X_1 le temps d'attente pour le premier changement et pour $1 < i \leq n$, soit X_i le temps d'attente entre le $(i-1)$ème changement et le $i$ème changement. Par la définition d'un processus de Poisson $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité. Soit $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et notons que Y_n est le temps du $n$ième changement.

   (a) Par la méthode de la fonction génératrice des moments, démontrer que $Y \sim$ gamma avec $\alpha = n$ et θ.

   (b) En utilisant la partie (a), démontrer: pour $x \geq 0$, lorsque $n \to \infty$

$$P(Y_n \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - n\theta}{\sqrt{n}\theta}\right).$$

(c) Pour une promotion à un café local, le 25e client de la journée reçoit un prix d'un café gratuit par jour pour une semaine. Le café ouvre à 8h et les clients arrivent selon un processus de Poisson avec un taux de $\rho = 2$ clients par minute. Utiliser (b) pour approximer la probabilité que le prix sera gagné par 8h15.

(d) Nous pouvons utiliser une autre approche pour répondre à (c). Soit V le nombre de clients qui arrivent entre 8h et 8h15. Le prix sera gagné si $V \geq 25$. Approximer cette probabilité et comparer votre approximation avec votre réponse en (c).