MAT 2771 - Automne 2014
Devoir 7 : Solutionnaire

5.3-18 (2 points)
Soit X_i la durée de vie de la i^{ieme} partie, $i = 1, 2, 3$. $X_i \sim$ gamma avec $\alpha = \theta = 2$. Alors, $E[X_i] = \alpha\,\theta = 4$ et $\sigma^2_{X_i} = \alpha\,\theta^2 = 8$. La durée de vie totale est $T = X_1 + X_2 + X_3$. Par l' indépendance des X_i's, la moyenne et variance de T sont respectivement,

$$E[T] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 3\,(4) = 12$$

et

$$\sigma^2_T = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2} + \sigma^2_{X_3} = 3\,(8) = 24.$$

5.4-6 (2 points)
(a) Puisque $X_i \sim$ géométrique, $p = 1/3$, la fonction génératrice de chaque X_i est

$$M_X(t) = \frac{\frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{2}{3}e^t}, t < -\ln\frac{2}{3} = \ln 3 - \ln 2.$$

Par l' indépendance, la fonction génératrice de $Y = X_1 + ... + X_5$ est

$$M_Y(t) = (M_X(t))^5 = \left[\frac{\frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{2}{3}e^t}\right]^5, t < \ln 3 - \ln 2.$$

(b) On reconnait $Y \sim$ binomiale négative, $r = 5, p = 1/3$.

5.4-8 (2 points)
(a) Puisque chaque X_i a comme fonction génératrice.

$$M_X(t) = (1 - \theta t)^{-1},\ t < 1/\theta,$$

celle de $Y = X_1 + ... + X_h$ est donnée par

$$M_Y(t) = (M_X(t))^h = (1 - \theta t)^{-h},\ t < 1/\theta.$$

(b) M_Y est la fonction génératrice d'une gamma avec paramètres h et θ et alors la moyenne est $\mu = h\theta$.

5.4-10 (8 points)
(a) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{4}(1 + e^t + e^{2t} + e^{3t})$.
(b) $M_Y(t) = E[e^{tY}] = \frac{1}{4}(1 + e^{4t} + e^{8t} + e^{12t})$.
(c) Par l' indépendance de X et Y ,

$$\begin{aligned} M_W(t) &= M_{X+Y}(t) = E[e^{tX}e^{tY}] = M_X(t)M_Y(t) \\ &= \frac{1}{4}(1 + e^t + e^{2t} + e^{3t}) \times \frac{1}{4}(1 + e^{4t} + e^{8t} + e^{12t}) \\ &= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{15} e^{kt}. \end{aligned}$$

(d) A partir de la fonction génératrice on voit que $f_W(k) = P(W = k)$ est le coefficient de e^{kt}. Donc

$$f_W(k) = \frac{1}{16}, \;\; k = 0, 1, ..., 15.$$

5.5-4 (4 points)
(a) Puisque $X \sim N(6.05, 0004)$, à partir de la Table Va

$$P(X < 6.0171) = \Phi\left(\frac{6.0171 - 6.05}{.02}\right) = \Phi(-1.645) = .05.$$

(b) Si Y represente le nombre de boites qui pèsent moins de 6.0171 livres, $Y \sim b(9, .05)$. A partir de la Table II,

$$P(Y \leq 2) = 0.9916.$$

(c) $\overline{X} \sim N(6.05, .0004/9)$. Par la Table Va,

$$P(\overline{X} \leq 6.035) = \Phi\left(\frac{6.035 - 6.05}{.02/3}\right) = \Phi(-2.25) = 0.0122.$$

5.5-8 (2 points)
Puisque X et Y sont indépendant et suivent des distributions normales, $X-Y$ aussi suit une distribution normale avec moyenne $\mu = 184.09-171.93 = 12.16$ et variance $\sigma^2 = 39.37 + 50.88 = 90.25$. Donc,

$$P(X > Y) = P(X - Y > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 12.16}{\sqrt{90.25}}\right) = \Phi(1.28) = 0.8997.$$

Total = 20 points