MAT 2771 - Automne 2014
Devoir 6 : Solutionnaire

3.3-2 (8 points) $Z\tilde{}N(0,1)$
a) $P(0 \leq Z \leq 0.87) = 0.3078$
b) $P(-2.64 \leq Z \leq 0) = 0.4959$
c)$P(-2.13 \leq Z \leq -0.56) = 0.2711$
Pour les prochains on note que $P(|Z| < z) = 2\Phi(z) - 1$
d)$P(|Z| > 1.39) = 2[1 - \Phi(1.39)] = 2(0.0823) = 0.1646$
e) $P(Z < -1.62) = 0.0526$
f) $P(|Z| > 1) = 1 - P(|Z| < 1) = 1 - 0.68260 = 0.3174$
g) $P(|Z| > 2) = 1 - P(|Z| < 2) = 1 - 0.9544 = 0.0456$
h) $P(|Z| < 3) = 1 - P(|Z| < 3) = 1 - 0.9974 = 0.0026$
3.3-7 (3 points) Soit $X\tilde{}N(650, 625)$
a)

$$\begin{aligned} P(600 &\leq X < 660) && (1)\\ &= P(\frac{600-650}{25} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{660-650}{25}) && (2)\\ &= P(-2 \leq Z < 0.4) = 0.6326 && (3) \end{aligned}$$

b) $P(|X - 650| \leq c) = 0.9544$. Donc

$$P(\left|\frac{X-650}{\sigma}\right| \leq \frac{c}{25}) = 0.9544 \quad (4)$$

implique $\frac{c}{25} = 2$. Alors $c = 50$

5.1-8 (3 points) Si X suit une loi exponentielle avec moyenne 1 et $Y = 5X^{0.7}$,

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P\left(5X^{0.7} \leq y\right) && (5)\\ &= P\left(X \leq (y/5)^{1/0.7}\right) && (6)\\ &= 1 - \exp\left(-(y/5)^{1/0.7}\right), 0 \leq y < \infty && (7) \end{aligned}$$

La densité est donnée par

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[1 - \exp\left(-(y/5)^{1/0.7}\right)\right] && (8)\\ = &\frac{10}{7(5)^{1/0.7}} y^{\frac{3}{7}} \exp\left(-(y/5)^{1/0.7}\right) && (9) \end{aligned}$$

5.1-10 (2 points) On note que

$$\begin{aligned} P\left(X^2 \leq y\right) &= P(|X| \leq \sqrt{y}) && (10)\\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) && (11) \end{aligned}$$

Si X suit une loi uniforme $U(-1,3)$, la probabilité ci-dessus dépendera sur la valeur de y par rapport à l'intervalle $(-1,3)$. Donc

$$P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) = \begin{array}{ll} \sqrt{y}/2 & 0 < \sqrt{y} < 1 \\ \frac{1+\sqrt{y}}{4} & 1 < \sqrt{y} \leq 3 \\ 1 & 3 < \sqrt{3} \end{array} \tag{12}$$

La densité est donnée par la derivée

$$f(y) = \begin{array}{ll} \frac{1}{4\sqrt{y}} & 0 < \sqrt{y} < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}} & 1 < \sqrt{y} \leq 3 \\ 0 & autrement \end{array} \tag{13}$$

5.3-2 (2 points)

a) $\mathrm{P}(X_1 = 2, X_2 = 4) = \left(\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{5!}{4!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 5.8594 \times 10^{-2}$

b) Pour que la somme soit egale a 7, il faut que soit $(X_1 = 3, X_2 = 4)$ *ou* $(X_1 = 2, X_2 = 4)$.

La somme des probabilites suivantes donne
$\left(\frac{3!}{3!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0\right)\left(\frac{5!}{4!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\right)+\left(\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{5!}{5!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0\right) = 0.03125$

5.3-16 (2 points)

$G(y) = (P(X_1 \leq y))^8 = \left(y^{10}\right)^8 = y^{80}, 0 < y < 1$

$g(y) = G'(y) = 80y^{79}, 0 < y < 1$

$P(0.9999 < Y < 1) = G(1) - G0.9999) = 1 - 0.9999^{80} = 7.9685 \times 10^{-3}$

Total 20