**MAT 2771 - Automne 2014**
**Devoir 5 : Solutionnaire**

3.1-8 (6 points)
Les graphiques ne sont pas requis**.**
(a) (i) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^c x^3/4dx = \frac{x^4}{16} \mid_0^c = \frac{c^4}{16} \Rightarrow c = 2.$

(ii) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x y^3/4dy = \frac{x^4}{16} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$

(b) (i) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-c}^{c} \frac{3}{16}x^2dx = \frac{x^3}{16} \mid_{-c}^{c} = \frac{c^3}{8} \Rightarrow c = 2.$

(ii) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \int_{-2}^x \frac{3}{16}y^2dy = \frac{x^3}{16} + \frac{1}{2} & -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$

(c) (i) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 c/\sqrt{x}\,dx = 2c\sqrt{x} \mid_0^1 = 2c \Rightarrow c = 1/2.$
On note que la densité n'a pas de borne quand $x \to 0$.

(ii) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x 1/(2\sqrt{y})dy = \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

3.1.-20 (4 points) (a) $\int_0^1 xdx + \int_1^{\infty} \frac{c}{x^3}dx = 1$

$\left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[ \frac{c}{2x^2} \right]_1^{\infty} = 1$

$\frac{1}{2} + \frac{c}{2} = 1; donc\ c = 1$

(b) $\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x^2dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{4}{3}$

(c) La variance n'existe pas

(d) $P(1/2 \leq X \leq 2) = \int_{1/2}^1 xdx + \int_1^2 \frac{1}{x^3}dx = \frac{3}{4}$

3.2-8 (2 points) $F(x) = P(X \leq x) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k(e^{-\lambda x})}{k!}$

Donc pour $\lambda = 1/\theta = 1/4$ et $\alpha = 2$
$P(X < 5) = 1 - e^{-5/4} - \left(\frac{5}{4}\right)e^{-5/4} = 0.35536$

3.2-10 (2 points) La fonction génératrice est donnée par

$$M(t) = (1 - \theta t)^{-\alpha}, t < 1/\theta$$

Donc, $M'(t) = \alpha\theta(1 - \theta t)^{-\alpha-1}, M''(t) = \alpha(\alpha + 1)\theta^2(1 - \theta t)^{-\alpha-2}$.
Par conséquent, $\mu = M'(0) = \alpha\theta,$ et $\sigma^2 = M''(0) - \mu^2 = \alpha\theta^2$

3.2-16 (2 points) Le nombre moyen d'arrivées par minute est $\lambda = 5/10 = 1/2$.

La densité du temps d'attente avant la $8^e$ voiture est celle d'une Gamma avec $\theta = 2$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(8)} x^{8-1} e^{-x/2}, x > 0$$

Ceci est la densité d'une chi carrée avec $r = 16$. Par la Table IV

$$P(X > 26.30) = 0.05$$

3.2-20 (3 points)

$$\begin{aligned}
E[v(T)] &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t) f(t) dt = \int_0^3 100(2^{3-t} - 1) \frac{1}{5} e^{-t/5} dt \\
&= 20\left[ 8 \int_0^3 e^{-(\ln 2 + .2)t} dt - \int_0^3 e^{-t/5} dt \right] \\
&= \left( -160 \cdot \frac{e^{-(\ln 2 + .2)t}}{\ln 2 + .2} \Big|_0^3 \right) - (-100 \cdot e^{-t/5} \Big|_0^3) \\
&= \frac{160}{\ln 2 + .2} \left( 1 - \frac{e^{-.6}}{8} \right) - 100(1 - e^{-.6}) \\
&= 166.85 - 45.12 \\
&= 121.73
\end{aligned}$$

3.2-24 (1 point) Par la propriété du manque de mémoire de l'exponentielle,

$$P(X > 100 \mid X > 50) = P(X > 50) = 1 - P(X < 50) = 1 - 0.25 = 0.75.$$