MAT 2771 - Automne 2014
Devoir 4 : Solutionnaire

2.4-2 (2 points) $f(-1) = \frac{11}{18}, f(1) = \frac{7}{18}$
$\mu = (-1)\frac{11}{18} + (1)\frac{7}{18} = -\frac{4}{18}$
$\sigma^2 = \left(-1 + \frac{4}{18}\right)^2 \frac{11}{18} + \left(1 + \frac{4}{18}\right)^2 \frac{7}{18} = \frac{77}{81}$
2.4-10 (2 points) Soit $X$ le nombre de mentes qui pèsent plus de 20.7 gm.
a) On note que $X$ suit une loi binomiale avec paramètres $p = 0.90, n = 8$.
b) $(i)$ $P(X = 8) = (0.9)^8 = 0.430\,47$
$(ii)$ On note que $n - X$ suit une loi binomiale avec paramètres $p = 0.10, n = 8$.

$$\begin{aligned} P(X &\leq 6) = P(n - X \geq 2) && (1) \\ &= 1 - P(n - X \leq 1) && (2) \\ &= 1 - 0.8131 = 0.186\,9 && (3) \end{aligned}$$

$(iii)$ $P(X \geq 6) = P(n - X \leq 2) = 0.9619$

2.4-18 (2 points) Soit $X$ le nombre de personnes qui ont une certaine maladie. Si $X = 0$, ca prendra un seul test. D'autre part si au moins une personne a la maladie, ça prendra $n + 1$ tests. Puisque $X$ suit une binomiale avec paramètres $n, p = 0.05$,

Le nombre de tests requis en moyenne sera

$$1P(X = 0) + (n + 1)P(X \geq 0) \quad (4)$$

Avec $n = 5$, ceci sera égale à

$$\begin{aligned} &P(X = 0) + (n + 1)P(X \geq 0) && (5) \\ = \; &0.95^5 + 6\left(1 - 0.95^5\right) = 2.131\,1 && (6) \end{aligned}$$

2.5-2 (2 points) $\binom{10-1}{5-1}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{126}{1024} = \frac{63}{512}$

2.5-6 (4 points) (a) $R(t) = \ln(1 - p + pe^t)$
$R'(t) = \left[\frac{pe^t}{1-p+pe^t}\right]_{t=0} = p$
$R''(t) = \left[\frac{(1-p+pe^t)pe^t - (pe^t)(pe^t)}{(1-p+pe^t)^2}\right]_{t=0} = p(1-p)$
(b) $R(t) = n\ln(1 - p + pe^t)$
$R'(t) = \left[\frac{npe^t}{1-p+pe^t}\right]_{t=0} = np$
$R''(t) = n\left[\frac{(1-p+pe^t)pe^t - (pe^t)(pe^t)}{(1-p+pe^t)^2}\right]_{t=0} = np(1-p)$
(c) $R(t) = \ln p + t - \ln(1 - (1-p)e^t)$

$R'(t) = \left[\frac{1}{pe^t - e^t + 1}\right]_{t=0} = \frac{1}{p}$
$R''(t) = \left[\frac{e^t - pe^t}{2pe^t - 2e^t + e^{2t} - 2pe^{2t} + p^2 e^{2t} + 1}\right]_{t=0} = \frac{1-p}{p^2}$
(d) $R(t) = r\left[\ln p + t - \ln\left(1 - (1-p)e^t\right)\right]$

$R'(t) = \left[\frac{r}{pe^t - e^t + 1}\right] = \frac{r}{p}$
$R''(t) = \left[\frac{re^t - pre^t}{2pe^t - 2e^t + e^{2t} - 2pe^{2t} + p^2 e^{2t} + 1}\right]_{t=0} = \frac{r(1-p)}{p^2}$
2.6-4 (2 points) Si $X$ suit une loi Poisson avec paramètre $\lambda$, on sait que

$$3e^{-\lambda}\lambda = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2} \tag{7}$$

Donc,

$$\lambda = 6 \tag{8}$$

On veut calculer

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{4!} = e^{-6}\frac{6^4}{4!} = 0.133\,85 \tag{9}$$

2.6-8 (2 points) *Soit* $n = 1000, p = 0.005$.
On pose $\lambda = np = 1000\,(0.005) = 5.0$

En utilisant l'approximation d'une binomiale par la loi Poisson, on calcule
a) $P(X \leq 1) = 0.04$
b)

$$\begin{aligned} P(X = 4, 5, 6) &= P(X \leq 6) - P(X \leq 3) && (10) \\ &= 0.762 - 0.265 = 0.497 && (11) \end{aligned}$$

2.6-10 (2 points) Pour cette loi Poisson, $\mu = 9, \sigma = \sqrt{\mu} = 3$

$$\begin{aligned} & P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) && (12) \\ = \; & P(9 - 6 < X < 9 + 6) && (13) \\ = \; & P(3 < X < 15) && (14) \\ = \; & P(X \leq 14) - P(X \leq 3) && (15) \\ = \; & 0.959 - 0.021 = 0.938 && (16) \end{aligned}$$

2.6-12 (2 point) Puisque $E(X) = 0.2$, la perte en moyenne sera $(0.2)\,(100,000)$ $= \$20,000$
Total= 20 points