MAT 2771 - Automne 2014
Devoir 3 : Solutionnaire

2.1-6 (3 points)
(a) Soit f la fonction de masse de X. En supposant que tous les 36 résultats possibles (i, j) sont equiprobables, on a que

$$f(x) = N(A_x)/36, x = 2, 3, ..., 12 \tag{1}$$

où $A_x = \{(i.j) : i + j = x\}$.

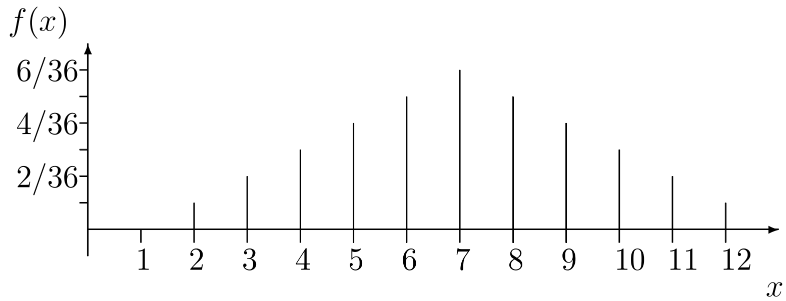
On a $A_2 = \{(1, 1)\}, A_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}, A_4 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$, et ainsi de suite. On voit que

$$f(2) = f(12) = 1/36,\ f(3) = f(11) = 2/36,\ f(4) = f(10) = 3/36,$$

$$f(5) = f(9) = 4/36,\ f(6) = f(8) = 5/36,\ f(7) = 6/36$$

(b)

Barre graphe de f



2.1-8 (2 points)
(a) L'espace de W est $S_W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Soit f_X, f_Y, et f_W les fonctions de masse de X, Y et W, respectivement. Alors

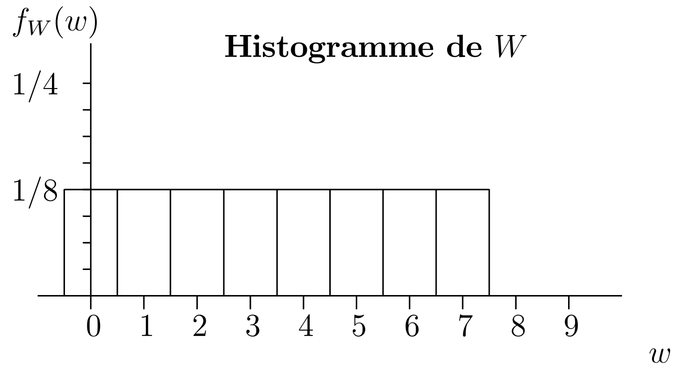
$$f_X(0) = f_X(2) = 1/2, \quad f_Y(y) = 1/4 \text{ for } y = 0, 1, 4, 5$$

Etant donné que les résultats des deux dés sont indépendants, on a que

$$P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x)P(Y = y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Donc,
$f_W(0) = f_X(0)f_Y(0) = 1/8, \;\; f_W(1) = f_X(0)f_Y(1) = 1/8$
$f_W(2) = f_X(2)f_Y(0) = 1/8, \;\; f_W(3) = f_X(2)f_Y(1) = 1/8$
$f_W(4) = f_X(0)f_Y(4) = 1/8, \;\; f_W(5) = f_X(0)f_Y(5) = 1/8$
$f_W(6) = f_X(2)f_Y(4) = 1/8, \;\; f_W(7) = f_X(2)f_Y(5) = 1/8$

(b)



2.1-14 (2 points) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$

$$1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}} = 1 - \frac{94}{228} = \frac{137}{228} = 0.60$$

2.2-2 (2 points)
$f(1) = f(-1) = 4/9, f(0) = 1/9$. Alors,
$E(X) = \left(-1 \cdot \frac{4}{9}\right) + 0 + \left(1 \cdot \frac{4}{9}\right) = 0$
$E(X^2) = \left(1 \cdot \frac{4}{9}\right) + 0 + \left(1 \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{8}{9}$
Par le Théorème 2.2-1,
$E(3X^2 - 2X + 4) = 3E(X^2) - 2E(X) + 4 = \frac{24}{9} - 0 + 4 = \frac{20}{3}$

2.2-6 (2 points)
$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{6}{\pi^2 x^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}$. Puisque cette series harmonique diverge, $E[X]$ n'existe pas dans ce cas.
(Pour demontrer que $f(x)$ est une fonction de masse, on doit utiliser le resultats suivant: $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Alors $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{6}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = 1$.)

2.2-12 (3 points)
(a) grandeur moyenne $= \frac{1000}{20} = 50$
(b) $f(25) = \frac{16 \times 25}{1000} = .4, f(100) = \frac{3 \times 100}{1000} = .3,\ f(300) = \frac{300}{1000} = .3$
(c) $E(X) = (25 \times .4) + (100 \times .3) + (300 \times .3) = 130$

2.3-4 (2 points)
Par les propriétés linéaires de l'espérance,
$E[(X - \mu)/\sigma] = (E[X] - \mu)/\sigma = (\mu - \mu)/\sigma = 0$ et $E\{[(X - \mu)/\sigma]^2\} = E[(X - \mu)^2]/\sigma^2 = \sigma^2/\sigma^2 = 1$.

2.3-16 (4 points)
Soit X le nombre de lancers d'une piece equilibrée nécessaire pour obtenir le meme côté deux fois de suite.

(a) $f(2) = P(\{2 \text{ piles}\} \text{ ou } \{2 \text{ faces}\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$f(3) = P(\{pile, face, face\} \text{ ou } \{face, pile, pile\}) \, \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$f(4) = P(\{face, pile, face, face\} \text{ ou } \{pile, face, pile, pile\}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

En général, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, x = 2, 3, 4, ...$

(b) $M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=2}^{\infty} e^{tx} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

$= 2\sum_{x=2}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^x = \frac{2\left(e^t/2\right)}{1-e^t/2} = \frac{e^{2t}}{2-e^t}, e^t < 2$

(c) $M'(t) = \frac{4e^{2t}-e^{3t}}{(2-e^t)^2}$

$\mu = M'(0) = 3$

$M''(t) = \frac{\left(2-e^t\right)^2\left(8e^{2t}-3e^{3t}\right)-\left(4e^{2t}-e^{3t}\right)2\left(2-e^t\right)\left(-e^t\right)}{(2-e^t)^4}$

$\sigma^2 = M''(0) - [M'(0)]^2$

$= 11 - 9 = 2$

(d)$i)$ $P(X \leq 3) = 3/4; ii) P(X \geq 5) = 1/8$

$iii) P(X = 3) = 1/4$

Total = 20 points