MAT 2771 - Automne 2014
Devoir 2 : Solutionnaire

1.3-2 (3 points)

a) $P(A_1) = \frac{1041}{1456} = 0.715$

b) $P(A_1|S_1) = \frac{P(A_1 \cap S_1)}{P(S_1)} = \frac{392}{633} = 0.619$

c) $P(A_1|S_2) = \frac{P(A_1 \cap S_2)}{P(S_2)} = \frac{649}{823} = 0.789$

d) Dans les parties b) et c) on calcule respectivement la proportion des hommes et des femmes en faveur de la loi pour porter des armes.

1.3-8 (4 points)

1	2	3	…	i	…	20
□	□	□	...	□	...	□

L'argument général est que la troisième boule gagnante est choisit au ieme prélèvement si exactement 2 boules gagnantes ont été choisi au premier $(i-1)$ choix précedents (soit l'événement A_i) et la dernière boule gagnante est choisie au $i^{ème}$ prélèvement (soit l'événement B$_i$). Donc, la probabilité requise est donnée par

$$P(A_i \cap B_i) = P(A_i)P(B_i|A_i). \qquad \#$$

On note que

$$P(A_i) = \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{i-3}}{\binom{20}{i-1}}, \ i = 3, \ldots, 20.$$

Il reste exactement une boule gagnante ainsi que $17 - (i-3) = 20 - i$ perdantes. En total alors il reste $(21-i)$ dont une est gagnante.

$$P(B_i|A_i) = \frac{1}{21-i}, \ i = 3, \ldots, 20.$$

Par le principe de multiplication,

$$P(A_i \cap B_i) = P(A_i)P(B_i|A_i) = \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{i-3}}{\binom{20}{i-1}} \cdot \frac{1}{21-i}, \ i = 3, \ldots, 20.$$

(a) Si je choisi en premier, la probabilité que je gagne au second prélèvement est l'événement $A_3 \cap B_3$.

$$P(A_3 \cap B_3) = \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{0}}{\binom{20}{2}} \cdot \frac{1}{18} = .0009$$

(b) L'événement que c'est mon adversaire qui gagne à son second prélèvement est l'événement $A_4 \cap B_4$.

$$P(A_4 \cap B_4) = \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{1}}{\binom{20}{3}} \cdot \frac{1}{17} = .0026$$

Un autre façon de calculer cette probabilité est de compter le nombre de facons de remplir 4 boites de sorte qu'il y a une boule gagnante dans la $4^{ième}$ boite et 2 boules gagnantes et une perdante dans les trois boites precedentes. Tout en tenant compte des arrangements possibles, ce nombre est égale a

$$\binom{3}{2}(3)(2)(17) \qquad \#$$

D'autre part, le numérateur compte le nombre de facons de remplir 4 boites avec 20 boule si l'echantillonage est sans replacement. Ceci est égale à

$$(20)(19)(18)(17) \qquad \#$$

Alors la probabilité est le rapport

$$\frac{\binom{3}{2}(3)(2)(17)}{(20)(19)(18)(17)} \qquad \#$$

(c) L'événement que je gagne au $k^{ième}$ prélèvement est l'événement $A_{2k-1} \cap B_{2k-1}$, $k = 2, 3, \ldots, 10$. Si c'est moi qui choisit en premier,

$$\begin{aligned} P() &= P(\dot{\cup}_{k=3}^{10} (A_{2k-1} \cap B_{2k-1})) \\ &= \sum_{k=2}^{10} \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{2k-4}}{\binom{20}{2k-2}} \cdot \frac{1}{22-2k} \\ &= .46053 \end{aligned}$$

d) Il est mieux d'être le second à choisir car la probabilité de gagner sera

$$1 - \frac{35}{76} = 0.539\,47 \qquad \#$$

1.3-16 (2 points) Soit A l'événement que le jeton rouge soit choisit du bol A et B qu'il soit choisit du bol B. Par le principe de multiplication,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A') \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') \\ &= \left(\frac{5}{8}\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{8}\frac{2}{5}\right) = \frac{23}{40} \end{aligned}$$

1.4-2 (2 points) a) Quand A, B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Donc,

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &= P(A)+P(B)-P(A)P(B) \\ &= 0.3+0.6-(0.3)(0.6) \\ &= 0.72 \end{aligned}$$

Quand A, B sont mutuellement exclusifs, $P(A\cap B) = 0$

Donc, dans ce dernier cas

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &= 0.3+0.6-0 \\ &= 0.90 \end{aligned}$$

b)Pour calculer $P(A|B)$, on note que

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad \#$$

$$= 0 \qquad \#$$

1.4-8 (2 points) Soit A l'événement que le dé A tombe rouge; Soit B l'événement que le dé B tombe rouge;Soit C l'événement que le dé C tombe rouge. La probabilité qu'exactement deux dés tombent rouges est donnée par

$$\begin{aligned} & P(A)P(B)P(C')+P(A)P(B')P(C)+P(A')P(B)P(C) \\ &= \frac{1}{6}\frac{2}{6}\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\frac{4}{6}\frac{3}{6}+\frac{5}{6}\frac{2}{6}\frac{3}{6} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

1.4-10 (2 points)

(a) Par l'indépendance, $P(A) = P\left(\{3 \text{ sur le dé } 1\} \cap \{2 \text{ sur le dé } 2\}\right) = \frac{3}{4}\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

(b)

$P(B) = P\left(\{2 \text{ sur le dé } 2\} \cap \{1 \text{ sur le dé } 3\}\right) + P\left(\{5 \text{ sur le dé } 2\} \cap \{1 \text{ou } 4 \text{ sur le dé } 3\}\right) = \left(\frac{3}{4}\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$

(c) $P(C) = P\left(\{1 \text{ sur le dé } 3\} \cap \{0 \text{ sur le dé } 1\}\right) + P\left(\{4 \text{ ou } 6 \text{ sur le dé } 3\}\right) = \left(\frac{2}{4}\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{4} = \frac{5}{8}$

1.5-6 (3 points)

Soit A, B, C les événements que les polices d'assurrance soient standard, preferée et ultrapreferée respectivement. Soit D l'événement qu'un signataire est décedé. On nous donne que

$$P(A) = 0.60, P(B) = 0.30, P(C) = 0.10, \qquad \#$$

$$P(D|A) = 0.01, P(D|B) = 0.008, P(D|C) = 0.007. \qquad \#$$

On veut calculer

$$P(A|D), P(B|D), P(C|D) \qquad \#$$

Par le théorème de Bayes

$$
\begin{aligned}
P(A|D) &= \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} \\
&= \frac{(0.01)(0.60)}{P(D)} \\
&= \frac{(0.006)}{P(D)} && \#
\end{aligned}
$$

De la même façon,

$$
P(B|D) = \frac{(0.0024)}{P(D)}, P(C|D) = \frac{(0.0007)}{P(D)} \qquad \#
$$

.

Aussi,

$$
\begin{aligned}
P(D) &= 0.006 + 0.0024 + 0.0007 && \# \\
&= 0.0091 && \#
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
P(A|D) &= \frac{(0.006)}{0.0091} = 0.65934, && \# \\
P(B|D) &= \frac{(0.0024)}{0.0091} = 0.26374, && \# \\
P(C|D) &= \frac{(0.0007)}{0.0091} = 0.076923 && \#
\end{aligned}
$$