MAT 2771 - Automne 2014
Devoir 1 : Solutionnaire

1.1-4 (4 points)
(a) Soit $H=$ pile et $T=$ face. L'espace échantillonnel est:
$S=\{HHHH, HHHT, HHTH.HTHH, THHH, HHTT, HTHT, THHT,$
$HTTH, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT\}$.
(b) Les événements sont:
$A=\{HHHH, HHHT, HHTH.HTHH, THHH\}$
$B=\{HHTT, HTHT, THHT, HTTH, THTH, TTHH, HTTT, THTT,$
$TTHT, TTTH, TTTT\}$
$C=\{HHHH, HHHT, HTHH, THHH, HTHT, THHT, TTHH, TTHT\}$
$D=\{HTTT, THTT, TTHT, TTTH\}$
La probabilité d'un événement arbitraire E est $P(E)=\frac{N(E)}{N(S)}$.
(i) $P(A)=N(A)/N(S)=5/16$,
(ii) Puisque $A\cap B=\emptyset$, $P(A\cap B)=0$,
(iii) $P(B)=N(B)/N(S)=11/16$,
(iv) Puisque $A\cap C=\{HHHH, HHHT, HTHH, THHH\}$,
$P(A\cap C)=N(A\cap C)/N(S)=4/16=1/4$,
(v) $P(D)=N(D)/N(S)=4/16=1/4$,
(vi) $P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)=\frac{5+8-4}{16}=\frac{9}{16}$.
(On aurait aussi pu compter les éléments dans $A\cup C$.)
(vii) Puisque $B\cap D=D$, $P(B\cap D)=P(D)=N(D)/N(S)=4/16=1/4$.

1.1-6 (3 points)
(a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=.4+.5-.3=.6$
(b) $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')\Rightarrow P(A\cap B')=.4-.3=.1$
(c) $P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-.3=.7$

1.1-12 (4 points)
Intuitivement, la probabilité de choisir le point x à partir d'un sous-intervalle I de $[0,1]$ serait le rapport

$$\frac{\textit{Longueur}\text{ de } I}{\textit{Longueur}\text{ de } [0,1]} \tag{1}$$

i.e.

$$P(x\in I)=\mid I\mid / \mid [0,1]\mid = \mid I\mid \tag{2}$$

Donc,
(a)$P(\{x : 0 \leq x \leq 1/3\}) = 1/3$.
(b) $P(\{x : 1/3 \leq x \leq 1\}) = 2/3$.
(c) $P(\{x : x = 1/3\}) = 0$.
(d) Puisque x doit être un chiffre inférieur ou égale à 1,
$P(\{x : 1/2 < x < 5\}) = P(\{x : 1/2 < x < 1\}) = 1/2$

1.1-14 (2 points)
Soit x un chiffre choisit au hasard à partir de l'intervalle $[-r, r]$. Par le théorème de Pythagore, la distance perpendiculaire d de x au demi-cercle doit satisfaire $d^2 = r^2 - x^2$. Donc, $d < r/2$ si et seulement si $x^2 > r^2 - r^2/4 = 3r^2/4$. On déduit que x se trouve soit dans l'intervalle $[-r, -\sqrt{3}r/2]$ soit dans l'intervalle $[\sqrt{3}r/2, r]$. Par le même raisonment que dans le problème précédent, on note que $|\ [-r, r]\ | = 2r$,

$$\begin{aligned} P(d < r/2) &= P(x \in [-r, -\sqrt{3}r/2]) + P(x \in [\sqrt{3}r/2, r]) \\ &= 2 \times \frac{r - \sqrt{3}r/2}{2r} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

1.2-2 (2 points)
(a) Par le principe de multiplication, le nombre d'expériences est $4\times5\times2 = 40$
(b) Il y a 2 choix seulement pour chaque facteur et alors le nombre d'expériences est $2 \times 2 \times 2 = 8$.

1.2-8 (2 points)
Il y a 3 grandeurs, 3 types de croûtes et 2^{12} façons de choisir des garnitures (puisqu'il y a un choix de 2 pour chacune des 12 garnitures_ soit avec ou sans). Donc le nombre total de variétes est $3 \times 3 \times 2^{12} = 36,864$.

1.2-16 (2 points)
Le nombre de combinaisons de $r = 9$ coeurs choisient à partir de $N = 52$ sans replacement est

$$\begin{pmatrix} N \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit N_1 et r_1 le nombre total de coeurs blancs et le nombre de coeurs blancs choisit respectivement. Le nombre de combinaisons de $r_1 = 3$ coeurs blancs choisit parmi $N_1 = 19$ est

$$\binom{N_1}{r_1} = \binom{19}{3}.$$

Les autres $r - r_1 = 6$ coeurs sont choisient parmi les $N - N_1 = 33$ coeurs qui restent. Le nombre de combinaisons possibles est

$$\binom{N - N_1}{r - r_1} = \binom{33}{6}.$$

Par le principe de multiplication , la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs blancs est

$$\frac{\binom{19}{3}\binom{33}{6}}{\binom{52}{9}} \approx 0.2917.$$

(b) En utilisant le même raisonment que dans (a), la probabilité d'obtenir 3 coeurs blancs, 2 coeurs marrons, 1 coeur rose , 1 coeur jaune et 2 coeurs verts est

$$\frac{\binom{19}{3}\binom{10}{2}\binom{7}{1}\binom{5}{1}\binom{6}{2}}{\binom{52}{9}} \approx 0.0062.$$

Total= 20 points