MAT 2771
Examen Final

le décembre, 2010 **Professeur M. Alvo**
Temps: 3 heures

Numéro d'**étudiant:**____________________ Nom de famille**:** ____________

Prénom**:** _____________________________ _________________________

Cet examen est à livre ouvert**. Les calculettes sont permises.** Répondez à toutes les questions. **Écrivez vos réponses pour la partie A dans le tableau à la page 2. Pour la partie B,** inscrivez vos réponses directement sur le questionnaire.

Partie A		
Partie B	1	
	2	
	3	
	4	
TOTAL		

PARTIE A: Questions à choix multiples. Vous recevrez 4 points pour chaque bonne réponse.

Placer la lettre qui correspond à votre réponse dans l'espace prévu ci dessous.

Question	1	2	3	4	5	6	7	8
Réponse								
Question	9	10	11	12	13	14	15	Total
Réponse								

1. On lance trois dés équilibrés une fois chaque. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6?
(A) $3/6^3$ (B) $4/6^3$ (C) $7/6^3$ (D) $10/6^3$ (E) $13/6^3$

2. Les étudiants en deuxième année doivent choisir au moins un cours parmi les trois cours d'analyse, algèbre et de probabilité. Parmi 100 étudiants en deuxième année, 30 suivent le cours d'analyse seulement, 8 suivent le cours d'algèbre seulement et 20 suivent le cours de probabilité seulement. Si 12 étudiants suivent tous les trois cours, combien d'étudiants suivent exactement deux parmi les trois cours d'analyse, algèbre et de probabilité?

(A) 42 (B) 30 (C) 58 (D) 70 (E) 46

3. La chance que Pierre qui a présentement 35 ans vive jusqu'à 65 ans est 7/16. La chance que Paul qui a présentement 45 ans vive jusqu'à 75 ans est 2/5. Si ces événements sont indépendants l'un de l'autre, quelle est la probabilité qu'au moins un sera vivant dans 30 ans?
(A) 66/80 (B) 53/80 (C) 14/80 (D)27/80 (E) 15/80

4. Un centre de messagerie reçoit des appels selon un processus de Poisson avec en moyenne un appel à toutes les 5 minutes. Une opératrice débute son poste à 9:00 am. Quelle est la probabilité qu'elle reçoive son $10^{ième}$ appel avant 10:00 a.m.?
(A) 0.758 (B) 0.201 (C) 0.799 (D) 0.542 (E) 0.242

5. On revient à la question #4. Si le $10^{ième}$ appel est reçu avant 10:00 a.m., quelle est la probabilité que l'opératrice reçoive moins de 10 appels entre 10:00 a.m. et 11:00 a.m.?

(A) 0.758 (B) 0.201 (C) 0.799 (D) 0.542 (E) 0.242

6. La fonction génératrice d'une variable aléatoire continue est donnée par

$$M\left(t\right) = \frac{1}{\left(1-3t\right)^2}, t < 1/3 \tag{1}$$

Quelle est l'espérance et la variance de cette variable?

(A) $\mu = 6,\, \sigma^2 = 18$ (B) $\mu = 1,\, \sigma^2 = 6$ (C) $\mu = 0,\, \sigma^2 = 1$

(D) $\mu = 6,\, \sigma^2 = 54$ (E) $\mu = 6,\, \sigma^2 = 48$

7. Le revenu moyen d'une population de 500 familles est connu et égale à \$60,000 avec écart-type \$3,500. Quelle est la probabilité qu'un échantillon de 50 familles aura une moyenne qui diffère de \$60,000 par plus de \$1,000?

   (A)0.0217 (B) 0.9783 (C) 0.0434 (D)0.8566 (E)0.4892

8. Dans le problème précédent calculez une borne supérieure pour cette probabilité.

   (A)0.9951 (B) 0.0049 (C) 0.070 (D) 0.245 (E) 0.755

9. A, B et C sont trois variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon un densité $U(0,1)$. Quelle est l'espérance de $B^2 - 4AC$?

   (A) 0 (B) -2/3 (C) -3/4 (D) -11/12 (E) 2/3

10. La résistance d'un circuit est la somme de deux résistances, mesurées en ohms. Les résistances suivent des distributions normales avec respectivement des moyennes 5 et 10 et variances égales à 1 et 1.25. Quelle est la probabilité (à 4 décimales près) que la résistance totale du circuit soit supérieure à 13.5 ohms?

    (A) 0.7476 (B)0.1587 (C)0.9332 (D)0.6680 (E)0.8413

11. La fonction de masse de la variable aléatoire X est donnée par

$$P(X = x) = \frac{1}{5}, pour\ x = \text{-2,-1,0,1,2} \tag{2}$$

Calculer la fonction génératrice de $Y = |X|$.

(A) $M_Y(t) = .4 + .4e^t + .4e^{2t}$ (B) $M_Y(t) = .2\left[e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + .e^{2t}\right]$

(C) $.5e^t + .5e^{2t}$ (D) $M_Y(t) = .04\left[e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + .e^{2t}\right]^2$

(E) $M_Y(t) = .2 + .4e^t + .4e^{2t}$

12. Dans un certain cours, la note à l'examen final X suit une loi normale avec écart-type égale à 12. On sait que P$(X > 85) = 0.14$. Calculez le 20^{ieme} pourcentile, c'est à dire la valeur de la constante c (à une decimale près) telle que P$(X < c) = 0.20$.

    (A)72.0 (B)73.5 (C)61.9 (D) 78.3 (E)62.6

13. Calculer la moyenne d'une variable aléatoire X ayant la fonction de répartition suivante:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -5 \\ .3 & \text{si } -5 \leq x < -2 \\ .4 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ .8 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ .9 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 1.0 & \text{si } 6 \leq x \end{cases}$$

    (A) 8.1 (B) -0.3 (C) 0.3 (D) 3.1 (E) 0

14. Si X et Y sont indépendants et suivent des distributions de χ^2 avec 6 et 9 degrés de liberté respectivement, quelle est la probabilité que X+Y soit supérieur à 25?
    (A)0.10 (B)0.20 (C)*0.05 (D) 0.60 (E)0.40

15. Les Senateurs d'Ottawa ont une probabilité de 0.3 de gagner une partie de hockey. En espérant que l'équipe participe au dernier tournoi pour la coupe Stanley, quelle est la probabilité que l'équipe gagne la quatrième partie au septième jeu?
    (A)$(0.3)^4$ (B)35$(0.3)^7(0.7)^4$ (C)20$(0.3)^3(0.7)^4$ (D) 20$(0.3)^4(0.7)^3$
    (E)35$(0.3)^4(0.7)^3$

Partie B: Questions à réponses. Chaque question vaut 10 points. Inscrivez vos réponses directement sur le questionnaire. Définissez clairement votre notation et montrez tous vos calculs.

1. Soient deux variables aléatoires indépendantes X,Y qui ont des densités uniformes sur l'intervalle (0,1).

(a) Quelle est la densité de V= maximum (X,Y)?

(b) Calculer P$(0 < V < 0.5)$?

c Calculer $\mathsf{E}[V]$ à partir de a) ci dessus.

d Calculez la fonction génératrice de V.

.

2. Air Canada en général vent plus de billets pour un vol en comparaison avec le nombre de sièges disponibles car certain passagers ne réclament pas leur siège à la dernière minute. En autres mots, s' il y a K sièges disponibles sur le vol, Air Canada vendera n billets où $n > K$. Soit p la probabilité qu'un passager ne réclame pas son siège. On suppose que les passagers agissent tous indépendament l'un de l'autre. Calculez pour les différentes valeurs de K,p,n ci dessous (approximativement si nécessaire) la probabilité que tous les passagers qui arrivent au terminal seront siégés. (Aide: Si X dénote le nombre de passagers qui ne réclament pas leur siège parmi les n, n-X sera le nombre de passagers qui réclament leur vol. Quel doit être la valeur minimal de X?)

(a) $K = 20$ sièges sur le vol, $p = .10$ et $n = 25$ passagers ont acheté des billets.

(b) $K = 395$ sièges sur le vol, $p = .01$ et $n = 400$ passagers ont acheté des billets.

(c) $K = 370$ sièges sur le vol, $p = .10$ et $n = 400$ passagers ont acheté des billets.

3. Soit X une variable aléatoire ayant une distribution de khi deux χ^2 avec 25 degrés de liberté.

(a) Démontrez que

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x-25}{\sqrt{50}}\right).$$

Justifiez cette approximation et citez clairement tout théorème utilisé.

(b) Utilisez le résultat dans (a) pour approximer $P(X \leq 16.47)$.

(c) Trouvez la valeur exacte de $P(X \leq 16.47)$.

4. La densité d'une variable aléatoire X est donnée par le polynôme suivant

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} kx(1-x), 0 < x < 1 \\ 0 \; autrement \end{array} \right\} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

(a) Calculez la valeur de la constante k

(b) Calculez la fonction de répartition de X c Calculez $\mathsf{P}[X > 0.75 | X > 0.5]$.

d Calculez directement $\mathsf{E}[X]$