Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 315–323

Une formule d'interpolation en deux variables

par Damien ROY

Résumé. On démontre une formule d'interpolation pour une fonction $F(z, w)$ de deux variables complexes qui tient compte des valeurs de cette fonction ainsi que de ses dérivées partielles par rapport à w en des points d'un sous-groupe de $\mathbf{C}^2$ de rang 2. On explique préalablement comment, dans les grandes lignes, une telle formule permet de ramener la conjecture de Schanuel à un énoncé dont la forme est celle d'un critère d'indépendance algébrique.

Abstract. We prove an interpolation formula for a function $F(z, w)$ of two complex variables which takes into account the values of this function as well as those of its partial derivatives with respect to w on a subgroup of $\mathbf{C}^2$ of rank 2. We also outline how such a formula reduces Schanuel's conjecture to a statement of the form of a criterion of algebraic independence.

1. Introduction

Une formule d'interpolation vise à contrôler la croissance d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ en termes des valeurs de cette fonction ou de certaines de ses dérivées en les points d'un sous-ensemble fini S de cet ouvert. Un critère dû à M. Waldschmidt et J.-C. Moreau, dont on rappelle l'énoncé au paragraphe 3 ci-dessous pour $n = 2$, réduit le problème au cas des polynômes. En conséquence, on possède des formules satisfaisantes lorsque S est un produit cartésien ou qu'il vérifie certaines hypothèses de bonne répartition (pour le second cas, voir le théorème 7.4.13 de [5] déduit du théorème A de [2] et la proposition 2.6 de [3] déduite du théorème 2.1 de [3]). Ce type de résultat est utile en théorie des nombres transcendants, mais il reste des problèmes ouverts, autour de la conjecture 7.1.10 de M. Waldschmidt dans [5], qui pourraient jouer un rôle important.

Dans le cadre de l'exposé, nous avons présenté une nouvelle formule d'interpolation qui s'accorde, dans l'esprit, à la conjecture de M. Waldschmidt mentionnée ci-dessus. On trouvera son énoncé au paragraphe

Manuscrit reçu le 1er novembre 1999.
Recherche partiellement subventionnée par le CRSNG et le CICMA.

suivant. Grâce à cette formule, nous avons montré qu'une autre conjecture, due à S. Schanuel celle-là, est équivalente à un énoncé arithmétique dont la forme est celle d'un critère d'indépendance algébrique. Cette conjecture de Schanuel prédit que, si $y_1, \dots, y_\ell$ sont des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, alors le corps $\mathbf{Q}(y_1, \dots, y_\ell, e^{y_1}, \dots, e^{y_\ell})$ est de degré de transcendance au moins ℓ sur $\mathbf{Q}$ (voir les notes historiques du chapitre III de [1]). Elle demeure essentiellement ouverte. Nous avons montré qu'elle est équivalente à l'énoncé suivant, où $\mathcal{D}$ désigne la dérivation $\partial/\partial X_0 + X_1\big(\partial/\partial X_1\big)$ dans $\mathbf{C}[X_0, X_1]$:

Conjecture. *Soient ℓ un entier strictement positif, $y_1, \dots, y_\ell$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ des nombres complexes non nuls. De plus, soient s_0, s_1, t_0, t_1, u des nombres réels strictement positifs vérifiant*

$$\begin{aligned} &\max\{1, t_0, 2t_1\} < \min\{s_0, 2s_1\} \quad \text{et} \\ &\max\{s_0, s_1 + t_1\} < u < \frac{1}{2}(1 + t_0 + t_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Supposons que, pour tout entier $N \geq 1$ assez grand, il existe un polynôme non nul $P_N \in \mathbf{Z}[X_0, X_1]$, de degré partiel en X_j majoré par N^{t_j} pour $j = 0, 1$, à coefficients entiers en valeur absolue majorés par e^N, qui vérifie

$$\left| \big(\mathcal{D}^k P_N\big)\Big(\sum_{j=1}^{\ell} m_j y_j, \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{m_j}\Big) \right| \leq \exp(-N^u),$$

pour tout choix d'entiers k, m_1, $\dots$, $m_\ell \geq 0$ avec $k \leq N^{s_0}$ et $\max\{m_1, \dots, m_\ell\} \leq N^{s_1}$. Alors, le corps $\mathbf{Q}(y_1, \dots, y_\ell, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ est de degré de transcendance au moins ℓ sur $\mathbf{Q}$.

La preuve de l'équivalence entre les deux conjectures est établie en détails dans [4]. Nous en rappelons les grandes lignes ci-dessous. Auparavant, mentionnons que, pour tout couple (t_0, t_1) à l'intérieur du triangle de sommets $(1/2, 1/2)$, $(1, 0)$ et $(2, 1)$, il existe des nombres réels s_0, s_1 et u qui vérifient les conditions (1). En particulier, pour tout choix de nombres réels s et u avec $1 < s < u < 5/4$, ces conditions sont remplies avec $s_0 = 2s_1 = s$ et $t_0 = 2t_1 = 1$. Donc la conjecture ci-dessus n'est pas un énoncé vide.

Pour montrer qu'elle implique celle de Schanuel, on choisit des nombres $y_1, \dots, y_\ell \in \mathbf{C}$ linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, et on pose $\alpha_j = e^{y_j}$ pour $j = 1, \dots, \ell$. On choisit aussi des nombres réels s_0, s_1, t_0, t_1 et u qui vérifient (1). Une construction générale de fonction auxiliaire de M. Waldschmidt (théorème 3.1 de [6]) fournit alors, pour chaque entier N suffisamment grand, un polynôme non nul $P_N \in \mathbf{Z}[X_0, X_1]$ qui remplit les hypothèses de la conjecture. Donc, si celle-ci est vraie, le corps $\mathbf{Q}(y_1, \dots, y_\ell, e^{y_1}, \dots, e^{y_\ell})$ est de degré de transcendance au moins ℓ sur $\mathbf{Q}$. Réciproquement, si les hypothèses de la conjecture sont vérifiées, on trouve que $\alpha_j e^{-y_j}$ est une racine de l'unité pour $j = 1, \ldots, \ell$ et, en supposant vraie la conjecture de Schanuel, on en déduit que le corps $\mathbf{Q}(y_1, \ldots, y_\ell, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ est de degré de transcendance au moins ℓ sur $\mathbf{Q}$.

Pour établir que, sous les hypothèses de la conjecture, les nombres $\alpha_j e^{-y_j}$ sont des racines de l'unité, on emploie une formule d'interpolation qu'on applique aux fonctions $F_N(z,w) = P_N(z, e^w)$. Plus précisément, pour un indice j fixé, on pose $y = y_j$ et $\alpha = \alpha_j$. On choisit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $e^\lambda = \alpha$, et on observe que

$$\big(\mathcal{D}^k P_N\big)(my, \alpha^m) = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w}\right)^k F_N(my, m\lambda + n2\pi i)$$

pour tout choix d'entiers $k, m, n \geq 0$. La formule d'interpolation en question utilise la petitesse de ces nombres pour $k \leq N^{s_0}$ et $m, n \leq N^{s_1}$ pour contrôler la croissance de F_N. Si le rapport $(y - \lambda)/(2\pi i)$ est irrationnel, on obtient, pour une infinité d'entiers N,

$$\sup\{\, |F_N(z,w)|\,;\, |z| \leq N, |w| \leq N \,\} < 1.$$

Cela fournit la contradiction souhaitée car, en supposant $N \geq e^\pi$, on en déduit

$$\sup\{\, |P_N(z,w)|\,;\, |z| = |w| = 1 \,\} < 1,$$

ce qui, en vertu des inégalités de Cauchy, est impossible pour un polynôme non nul à coefficients entiers.

Pour les calculs, on effectue en pratique un changement de variables qui permet de remplacer la dérivation $\partial/\partial z + \partial/\partial w$ par $\partial/\partial w$. La formule d'interpolation énoncée au paragraphe suivant est adaptée à cette situation. Elle est aussi plus précise que la proposition 1 de [4]. Le reste de cet article sera consacré à sa démonstration.

2. Une formule d'interpolation

On fixe un point $(a,b) \in \mathbf{C}^2$ et un entier $N \geq 1$ tels que

$$\min\Big\{ |m + na|\,;\, m, n \in \mathbf{Z},\ 0 < \max\{|m|, |n|\} < N \Big\} \geq 2^{-N}.$$

On considère le sous-ensemble E de $\mathbf{C}^2$ de cardinalité $L := N^2$ donné par

$$E = \big\{ (m + na, nb)\,;\, m, n \in \mathbf{Z},\ 0 \leq m, n < N \big\},$$

et on le munit d'un ordre total en posant

$$(m + na, nb) < (m' + n'a, n'b) \Longleftrightarrow n < n' \text{ ou } (n = n' \text{ et } m < m').$$

Pour tout entier $k = 0, \ldots, L$, on désigne par $E(k)$ le sous-ensemble de E constitué de ses $L - k$ premiers éléments. Ainsi, on a en particulier $E(0) = E$ et $E(L) = \emptyset$.

Par ailleurs, pour chaque nombre réel $R > 0$, on pose

$$B(0,R) = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \,;\, |z| \leq R, |w| \leq R\},$$

et on note $\mathcal{H}_R$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions continues $F\colon B(0,R) \to \mathbf{C}$ qui sont holomorphes à l'intérieur de $B(0,R)$. On munit cet espace de la norme du supremum

$$|F|_R = \sup\{|F(z,w)| \,;\, (z,w) \in B(0,R)\}.$$

Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. *Soit $r_0 = \max\{2+|a|, 1+|b|\}N$, soient r et R des nombres réels avec $R \geq r \geq r_0$, et soit $F\colon B(0,R) \to \mathbf{C}$ un élément de $\mathcal{H}_R$. Alors, on a*

$$|F|_r \leq \left(\frac{cr}{r_0}\right)^L \max\left\{\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^k F}{\partial w^k}(p)\right| N^k \;;\; 0 \leq k < L \text{ et } p \in E(k)\right\} + \left(\frac{ecr}{R}\right)^L |F|_R$$

avec $c = e^{17}\max\{2+|a|, 1+|b|\}^2$.

La différence essentielle entre ce résultat et la proposition 1 de [4] vient du fait que la majoration de $|F|_r$ ci-dessus tient compte seulement des dérivées partielles $\big(\partial^k F/\partial w^k\big)(p)$ avec $p \in E(k)$, tandis que la proposition 1 de [4] fait intervenir toutes les dérivées partielles de ce type avec $0 \leq k < L$ et $p \in E$, c'est-à-dire un ensemble de valeurs de cardinalité près du double. Cette amélioration pourrait être utile dans la pratique en conduisant à des résultats quantitatifs plus précis. On verra, par les remarques qui terminent le paragraphe suivant, qu'elle est sous-jacente à un lemme de zéros optimal.

3. Critère de Waldschmidt-Moreau

Dans [3], J.-C. Moreau propose une méthode générale pour obtenir des lemmes d'approximation. Celle-ci formalise un argument de M. Waldschmidt, implicite dans les preuves des théorèmes 7.3.4 et 7.4.13 de [5]. En poussant un peu plus loin la démarche de Moreau, on obtient le critère suivant pour les fonctions de deux variables complexes :

Proposition. *Soient γ et r_0 des nombres réels strictement positifs, L un entier strictement positif et S un ensemble de fonctionnelles linéaires de norme ≤ 1 sur $\mathcal{H}_{r_0}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[z,w]$ de degré $< L$ on a*

$$|P|_{r_0} \leq \gamma \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)| \;;$$

(ii) *pour toute paire de nombres réels r et R avec $R \geq r \geq r_0$, et toute fonction $F \in \mathcal{H}_R$, on a*

$$|F|_r \leq \gamma \left(\frac{r}{r_0}\right)^{L-1} \sup_{\varphi \in S} |\varphi(F)| + \left(1 + \gamma \frac{r_0}{r}\right) \left(\frac{er}{R}\right)^L |F|_R.$$

Preuve. Le fait que (ii) implique (i) est immédiat. Si $P \in \mathbf{C}[z,w]$ est un polynôme de degré $< L$, on lui applique l'inégalité de (ii) avec $r = r_0$. En passant à la limite pour des valeurs de R qui tendent vers l'infini, on obtient l'inégalité de (i).

Réciproquement, pour montrer que (i) implique (ii), on reprend la preuve de la proposition 1.6 de [3]. Tout d'abord on écrit $F = P + G$ où P est un polynôme de degré $< L$ et G un élément de $\mathcal{H}_R$ qui admet un zéro d'ordre $\geq L$ à l'origine. On combine ensuite les inégalités suivantes. D'abord, on a $|F|_r \leq |P|_r + |G|_r$ et le lemme 1.5 de [3] livre $|P|_r \leq (r/r_0)^{L-1}|P|_{r_0}$ (par le principe du maximum appliqué au polynôme homogène $t^{L-1}P(z/t, w/t) \in \mathbf{C}[t,z,w]$). On combine cette dernière inégalité avec celle de (i) et on utilise

$$\sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)| \leq \sup_{\varphi \in S} |\varphi(F)| + \sup_{\varphi \in S} |\varphi(G)| \leq \sup_{\varphi \in S} |\varphi(F)| + |G|_{r_0}.$$

On utilise aussi le fait que G admet un zéro d'ordre $\geq L$ à l'origine pour majorer $|G|_{r_0}$ par $(r_0/R)^L|G|_R$, et $|G|_r$ par $(r/R)^L|G|_R$. Enfin on majore $|G|_R$ par $|F|_R + |P|_R$ et on utilise la formule de Plancherel pour majorer $|P|_R$ par $L|F|_R$, d'où $|G|_R \leq (1+L)|F|_R \leq e^L|F|_R$. □

Soit r_0 comme dans l'énoncé du théorème. En reprenant les notations du paragraphe précédent, on associe à chaque entier k avec $0 \leq k < L$ et à chaque point $p \in E(k)$ une fonctionnelle linéaire $\varphi_{k,p}$ sur $\mathcal{H}_{r_0}$ en posant

$$\varphi_{k,p}(F) = \frac{1}{k!} \left| \frac{\partial^k F}{\partial w^k}(p) \right| N^k$$

quel que soit $F \in \mathcal{H}_{r_0}$. Comme E est contenu dans $B(0, r_0 - N)$, les inégalités de Cauchy donnent $|\varphi_{k,p}(F)| \leq |F|_{r_0}$. Donc ces fonctionnelles linéaires sont de norme au plus 1. Soit S leur ensemble. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de vérifier que, pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[z,w]$ de degré $< L$, on a

$$|P|_{r_0} \leq (c^L - 1) \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)|. \tag{2}$$

Remarque 1. Si S est un ensemble fini de fonctionnelles linéaires sur $\mathbf{C}[z,w]$, on désigne par $\omega(S)$ le plus petit entier ℓ pour lequel il existe un polynôme non nul $P \in \mathbf{C}[z,w]$ de degré ℓ dont l'image sous chaque élément de S est nulle. Alors, pour $r_0 > 0$ donné, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $|P|_{r_0} \leq \gamma \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)|$ pour tout polynôme P de degré $< \omega(S)$. Dans le cas qui nous occupe, on vérifie bien que $\omega(S) = L$. Cela découle de la remarque générale suivante.

Remarque 2. Si $\{u_1, \dots, u_L\}$ est un ensemble de L points de $\mathbf{C}^2$ dont les premières coordonnées sont L nombres distincts, alors il existe un polynôme non nul $P \in \mathbf{C}[z,w]$ de degré L qui vérifie $\big(\partial^k P/\partial w^k\big)(u_j) = 0$ pour chaque couple d'entiers (j,k) avec $j \geq 1$, $k \geq 0$ et $j + k \leq L$, et il n'en existe pas de degré plus petit.

En effet, comme la dimension du sous-espace de $\mathbf{C}[z,w]$ constitué des polynômes de degré $\leq L$ est supérieure au nombre de couples d'entiers (j,k) avec $j \geq 1$, $k \geq 0$ et $j+k \leq L$, il existe un polynôme non nul P de degré au plus L qui satisfait les conditions requises. Il reste à montrer qu'un tel polynôme est de degré L. Pour cela, on procède par récurrence sur L. Si $L = 1$, la condition $P(u_1) = 0$ implique que P n'est pas constant, donc il est de degré 1. Supposons $L \geq 2$. Le polynôme $Q = \partial P/\partial w$ vérifie $\big(\partial^k Q/\partial w^k\big)(u_j) = 0$ pour tout couple d'entiers (j,k) avec $j \geq 1$, $k \geq 0$ et $j + k \leq L - 1$. S'il est nul, alors P ne dépend que de z. Dans ce cas, comme P s'annule en chacun des points $u_1, \dots, u_L$ et que ceux-ci ont des premières coordonnées distinctes, son degré doit forcément être au moins L, donc égal à L. Enfin, si Q n'est pas nul, on peut supposer, par récurrence, que son degré est au moins $L - 1$. Par suite, P est de degré L.

4. Un lemme combinatoire

On désigne par $x\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ et $y\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ les fonctions coordonnées qui, à un point $(z,w) \in \mathbf{C}^2$, associent respectivement z et w. Dans les notations du paragraphe 2, pour tout point $p \in E$ et tout entier k avec $0 \leq k \leq L$, on pose
$$a(p,k) = \prod_{\substack{q \in E(k) \\ q \neq p}} |x(p) - x(q)|,$$
avec la convention que le produit vide est égal à 1. En vertu des hypothèses, un tel produit n'est pas nul puisque $|x(p) - x(q)| \geq 2^{-N}$ pour toute paire de points distincts p et q de E. On exploite ici cette condition diophantienne pour établir l'estimation suivante :

Lemme. *Soit $p \in E$ et soient k, k' des entiers avec $0 \leq k < k' \leq L$. Alors, on a*
$$\frac{a(p,k')}{a(p,k)} = \prod_{\substack{q \in E(k)\setminus E(k') \\ q \neq p}} |x(p) - x(q)|^{-1} \leq e^{5N} \Big(\frac{e^3}{N}\Big)^{k'-k}.$$

Preuve. Posons $I = E(k) \setminus E(k')$ et supposons dans un premier temps que les points de I soient de la forme $(m + na, nb)$ avec n constant. Alors les $k' - k$ nombres $x(p) - x(q)$ avec $q \in I$ diffèrent l'un de l'autre par un entier. Soit q_0 un élément de I pour lequel $|\Re(x(p) - x(q_0))|$ est minimal, où $\Re$

désigne la fonction partie réelle. On peut réordonner les autres éléments q de I de telle sorte que les quantités $|\Re(x(p) - x(q))|$ soient minorées respectivement par $1/2, 1, 3/2, \ldots, (k' - k - 1)/2$. Si $q_0 \neq p$, cela implique

$$\frac{a(p,k')}{a(p,k)} \leq |x(p) - x(q_0)|^{-1} \frac{2^{k'-k-1}}{(k'-k-1)!} \leq 2^N e^N \Big(\frac{2}{N}\Big)^{k'-k-1}$$
$$\leq (2e^{3/2})^N \Big(\frac{2}{N}\Big)^{k'-k}.$$

Si $q_0 = p$, cette majoration demeure valable puisque, dans ce cas, le terme $|x(p) - x(q_0)|$ n'apparaît pas dans le quotient $a(p,k')/a(p,k)$.

En général, on a

$$\frac{a(p,k')}{a(p,k)} = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{a(p,k_{j+1})}{a(p,k_j)}$$

pour toute suite croissante d'entiers $k_0 < \cdots < k_s$ avec $k_0 = k$ et $k_s = k'$. On choisit $k_0, \ldots, k_s$ de telle sorte que l'ensemble $I_j = E(k_j) \setminus E(k_{j+1})$ vérifie l'hypothèse précédente pour $j = 0, \ldots, s-1$, et que I_j contienne N éléments lorsque $j \neq 0, s-1$. Si $s = 1$, la conclusion découle de l'observation précédente. Sinon, on a $s \geq 2$ et on trouve

$$\frac{a(p,k')}{a(p,k)} \leq \big(2e^{3/2}\big)^N \Big(\frac{2}{N}\Big)^{k_1-k_0} \Big(\frac{4e^{3/2}}{N}\Big)^{k_{s-1}-k_1} \big(2e^{3/2}\big)^N \Big(\frac{2}{N}\Big)^{k_s-k_{s-1}}$$
$$\leq \big(4e^3\big)^N \Big(\frac{4e^{3/2}}{N}\Big)^{k'-k}.$$

5. Preuve du théorème

Soit $P \in \mathbf{C}[z,w]$ un polynôme de degré $< L$. Il reste à démontrer l'inégalité (2) (voir la discussion qui suit la démonstration du critère de Waldschmidt-Moreau). Pour $w \in \mathbf{C}$ fixé, la formule d'interpolation de Lagrange donne

$$P(z,w) = \sum_{p \in E} \bigg(\prod_{\substack{q \in E \\ q \neq p}} \frac{z - x(q)}{x(p) - x(q)} \bigg) P(x(p), w).$$

En développant chacun des termes $P(x(p), w)$ en série de Taylor autour du point $w = y(p)$, on en déduit

$$P(z,w) = \sum_{\substack{p \in E \\ 0 \leq k < L}} \bigg(\prod_{\substack{q \in E \\ q \neq p}} \frac{z - x(q)}{x(p) - x(q)} \bigg) (w - y(p))^k \frac{1}{k!} \frac{\partial^k P}{\partial w^k}(p),$$

et par suite

$$|P|_{r_0} \le \sum_{\substack{p\in E\\ 0\le k<L}} \frac{(2r_0)^{L+k}}{a(p,0)} \frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^k P}{\partial w^k}(p)\right|.$$

Pour $p \in E(k)$, le terme correspondant de la somme peut s'exprimer en fonction de $\varphi_{k,p}(P)$. Pour $p \notin E(k)$, on reprend les calculs ci-dessus avec P remplacé par $(1/k!)\partial^k P/\partial w^k$ et E remplacé par $E(k)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k P}{\partial w^k}(z,w)&\\ &= \sum_{\substack{p'\in E(k)\\ k\le k'<L}} \Bigg(\prod_{\substack{q\in E(k)\\ q\neq p'}} \frac{z-x(q)}{x(p')-x(q)}\Bigg)\binom{k'}{k}(w-y(p'))^{k'-k}\frac{1}{k'!}\frac{\partial^{k'}P}{\partial w^{k'}}(p'),\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^k P}{\partial w^k}(p)\right|&\\ \le \sum_{\substack{p'\in E(k)\\ k\le k'<L}} &\frac{a(p,k)}{|x(p)-x(p')|\,a(p',k)}\binom{k'}{k}|y(p)-y(p')|^{k'-k}\frac{1}{k'!}\left|\frac{\partial^{k'}P}{\partial w^{k'}}(p')\right|\\ &\le 2^N \sum_{\substack{p'\in E(k)\\ k\le k'<L}} \frac{a(p,k)}{a(p',k)}\binom{k'}{k}|y(p)-y(p')|^{k'-k}\frac{1}{k'!}\left|\frac{\partial^{k'}P}{\partial w^{k'}}(p')\right|,\end{aligned}$$

puisque $|x(p)-x(p')| \ge 2^{-N}$ pour tout point p' de E distinct de p. En itérant ce procédé et en combinant les inégalités obtenues, on déduit que $|P|_{r_0}$ est majoré par la somme des produits

$$\begin{aligned}\frac{(2r_0)^{L+k_1}}{a(p_1,0)}2^{N(s-1)}\prod_{j=1}^{s-1}\left(\frac{a(p_j,k_j)}{a(p_{j+1},k_j)}\binom{k_{j+1}}{k_j}|y(p_j)-y(p_{j+1})|^{k_{j+1}-k_j}\right)&\\ \times\frac{1}{k_s!}\left|\frac{\partial^{k_s}P}{\partial w^{k_s}}(p_s)\right|&,\end{aligned}$$

où s désigne un entier strictement positif, $k_1,\dots,k_s$ des entiers avec $0 \le k_1 \le \dots \le k_s < L$ et $p_1,\dots,p_s$ des éléments de E tels que $p_j \notin E(k_j)$ et $p_{j+1} \in E(k_j)$ pour $j = 1,\dots,s-1$, et $p_s \in E(k_s)$.

Fixons un tel produit. Alors, on a $p_1 > \dots > p_s$ et $k_1 < \dots < k_{s-1} \le k_s$. Donc, si ce produit n'est pas nul, on doit aussi avoir $|y(p_1)| > \dots > |y(p_{s-1})| \ge |y(p_s)|$, et par suite $s \le N+1$ (si $b=0$, cela implique même $s \le 2$). Alors, en posant $k_0 = 0$ et en utilisant le fait que $a(p_s,L) = 1$, on obtient, grâce au lemme,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a(p_1,0)}\prod_{j=1}^{s-1}\frac{a(p_j,k_j)}{a(p_{j+1},k_j)} &= \frac{a(p_s,L)}{a(p_s,k_{s-1})}\prod_{j=1}^{s-1}\frac{a(p_j,k_j)}{a(p_j,k_{j-1})}\\
&\le e^{5N}\Big(\frac{e^3}{N}\Big)^{L-k_{s-1}}\prod_{j=1}^{s-1}\Big(e^{5N}\Big(\frac{e^3}{N}\Big)^{k_j-k_{j-1}}\Big)\\
&= e^{5sN}\Big(\frac{e^3}{N}\Big)^{L}\le e^{10L}\Big(\frac{e^3}{N}\Big)^{L}=\Big(\frac{e^{13}}{N}\Big)^{L}.
\end{aligned}$$

Donc, le produit en question est majoré par

$$\Big(\frac{4e^{13}r_0}{N}\Big)^L\frac{k_s!}{k_1!(k_2-k_1)!\cdots(k_s-k_{s-1})!}(2r_0)^{k_1}\prod_{j=1}^{s-1}\big|y(p_j)-y(p_{j+1})\big|^{k_{j+1}-k_j}$$

multiplié par $(1/k_s!)\big|\big(\partial^{k_s}P/\partial w^{k_s}\big)(p_s)\big|$. Comme $p_s\in E(k_s)$, ce dernier facteur est majoré par $N^{-k_s}\sup_{\varphi\in S}|\varphi(P)|$. Donc, pour $p_1,\dots,p_s$ fixés et k_s fixé, la somme de ces produits est majorée par

$$\Big(\frac{4e^{13}r_0}{N}\Big)^L\Big(\frac{3r_0}{N}\Big)^{k_s}\sup_{\varphi\in S}|\varphi(P)|.$$

Comme E possède 2^L sous-ensembles et que k_s est restreint à l'intervalle $0\le k_s<L$, on en déduit

$$|P|_{r_0}\le 2^L\Big(\frac{4e^{13}r_0}{N}\Big)^L\Big(\frac{3r_0}{N}\Big)^{L}\sup_{\varphi\in S}|\varphi(P)|\le (c^L-1)\sup_{\varphi\in S}|\varphi(P)|.$$

Bibliographie

[1] S. Lang, *Introduction to transcendental numbers.* Addison-Wesley, 1966.

[2] D. Masser, *Polynomial interpolation in several complex variables.* J. Approx. Theory **24** (1978), 18–34.

[3] J.-C. Moreau, *Lemmes de Schwarz en plusieurs variables et applications arithmétiques.* Sém. P. Lelong, H. Skoda (Analyse) 1978/79, pp. 174–190, *Lecture Notes in Math. 822*, Springer, Berlin-New York, 1980.

[4] D. Roy, *An arithmetic criterion for the values of the exponential function.* Acta Arith. (à paraître).

[5] M. Waldschmidt, *Nombres transcendants et groupes algébriques.* Soc. Math. France, Astérisque **69–70** (1979), avec deux appendices par D. Bertrand et J.-P. Serre.

[6] M. Waldschmidt, *Transcendance et exponentielles en plusieurs variables.* Invent. Math. **63** (1981), 97–127.

Damien Roy
Département de Mathématiques et de Statistiques
Université d'Ottawa
585 King Edward
Ottawa
Ontario, K1N 6N5
Canada
E-mail : droy@uottawa.ca