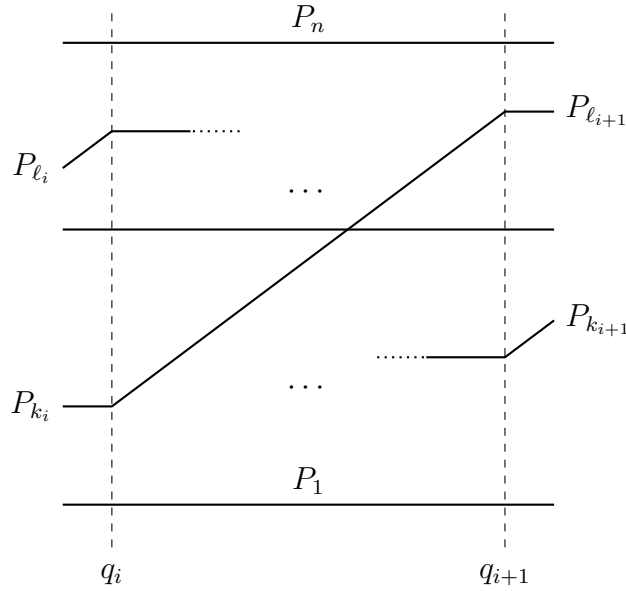


COURS 5: CONSTRUCTION DE POINTS

1. Stratégie générale.

Soit $\mathbf{P} := (P_1, \dots, P_n): [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un n -système rigide de maille $c \geq \log(2)$. On cherche à construire un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n tel que $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ soit borné. Pour simplifier, on va supposer que \mathbf{P} admet une suite infinie de points d'échange $(q_i)_{i \geq 0}$. Cela revient à demander que P_{n-1} ne soit pas borné.

On commence par quelques rappels. D'abord, le graphe conjoint au voisinage d'un intervalle $[q_i, q_{i+1}]$ entre deux points d'échange consécutifs est illustré sur la figure ci-dessous.



Pour chaque $i \geq 0$, on pose $\mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{P}(q_i)$. On note k_i l'indice k pour lequel P_k est de pente 1 à droite de q_i . Si $i \geq 1$, on note ℓ_i l'indice ℓ pour lequel P_ℓ est de pente 1 à gauche de q_i . On pose $\ell_0 = n$. Ces points et ces nombres satisfont les propriétés d'un canevas de maille c , à savoir que, pour tout $i \geq 0$, on a

$$(C1) \quad \mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}) \text{ avec } 0 < a_1^{(i)} < \dots < a_n^{(i)} \text{ multiples de } c,$$

$$(C2) \quad 1 \leq k_0 \leq \ell_0 = n \text{ et } 1 \leq k_i < \ell_i \leq n \text{ si } i \geq 1,$$

$$(C3) \quad \ell_{i+1} \geq k_i, \quad a_{\ell_{i+1}}^{(i+1)} \geq a_{\ell_{i+1}}^{(i)} + c \text{ et}$$

$$(a_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{a_{\ell_{i+1}}^{(i+1)}}, \dots, a_n^{(i+1)}) = (a_1^{(i)}, \dots, \widehat{a_{k_i}^{(i)}}, \dots, a_n^{(i)}).$$

À partir de ces données, on retrouve la suite des points d'échange de \mathbf{P} puis la fonction \mathbf{P} elle-même grâce aux formules

$$q_i = a_1^{(i)} + \dots + a_n^{(i)} \quad (i \geq 0),$$

$$\mathbf{P}(q) = \Phi_n(a_1^{(i)}, \dots, \widehat{a_{k_i}^{(i)}}, \dots, a_n^{(i)}, a_{k_i}^{(i)} + q - q_i) \quad (i \geq 0, q_i \leq q < q_{i+1}).$$

La stratégie générale pour construire un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n tel que $\mathbf{L}_\mathbf{u} - \mathbf{P}$ soit borné procède en deux étapes.

1° On construit une suite de bases de \mathbb{Z}^n

$$\underline{\mathbf{x}}^{(i)} = (\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)}) \quad (i \geq 0)$$

qui satisfont les conditions suivantes pour tout $i \geq 0$:

$$(B1) \quad (\mathbf{x}_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{\ell_{i+1}}^{(i+1)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i+1)}) = (\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)}),$$

$$(B2) \quad \mathbf{x}_{\ell_{i+1}}^{(i+1)} \in \mathbf{x}_{k_i}^{(i)} + \langle \mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_{\ell_{i+1}}^{(i)} \rangle_{\mathbb{Z}},$$

$$(B3) \quad a_j^{(i)} \leq \log \|\mathbf{x}_j^{(i)}\| \leq a_j^{(i)} + \log(2) \quad (1 \leq j \leq n),$$

$$(B4) \quad \|\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{x}_m^{(i)}} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n^{(i)}\| \geq \theta \|\mathbf{x}_1^{(i)}\| \dots \|\widehat{\mathbf{x}_m^{(i)}}\| \dots \|\mathbf{x}_n^{(i)}\| \quad \text{pour } m = k_i \text{ et } m = \ell_i,$$

où θ est un nombre indépendant de i , avec $0 < \theta \leq 1$. On interprète la condition (B4) comme une mesure d'orthogonalité des $(n-1)$ -uplets $(\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_m^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)})$ avec $m = k_i$ et $m = \ell_i$.

2° On forme une suite $(U_i)_{i \geq -1}$ de sous-espaces de \mathbb{R}^n de co-dimension 1 en posant

$$U_i := \begin{cases} \langle \mathbf{x}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}^{(0)} \rangle_{\mathbb{R}} & \text{si } i = -1, \\ \langle \mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)} \rangle_{\mathbb{R}} & \text{si } i \geq 0, \end{cases}$$

et pour chaque $i \geq -1$, on choisit un vecteur unitaire $\mathbf{u}_i \in U_i^\perp$.

Pour tout $i \geq 0$, on a

$$U_{i-1} = \langle \mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{\ell_i}^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Grâce au lemme 2.2 puis au corollaire 2.3 du cours 4, on en déduit

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i) &= \text{dist}(U_{i-1}, U_i) \\ &= \frac{\|\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{x}_{\ell_i}^{(i)}} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n^{(i)}\|}{\|\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n^{(i)}\| \|\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{x}_{\ell_i}^{(i)}} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n^{(i)}\|}. \end{aligned}$$

Pour majorer ce rapport, on applique l'inégalité d'Hadamard au numérateur et l'hypothèse (B4) à chaque facteur du dénominateur. Grâce aux estimations (B3), on en déduit

$$\text{dist}(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i) \leq \frac{\theta^{-2}}{\|\mathbf{x}_1^{(i)}\| \dots \|\mathbf{x}_n^{(i)}\|} \leq \theta^{-2} \exp(-a_1^{(i)} - \dots - a_n^{(i)}) = \theta^{-2} \exp(-q_i).$$

Comme $q_{i+1} - q_i \geq c \geq \log(2)$ pour tout $i \geq 0$, cela implique

$$\text{dist}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \leq \sum_{m=i+1}^j \text{dist}(\mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_m) \leq \theta^{-2} \sum_{m=i+1}^j \exp(-q_m) \leq 2\theta^{-2} \exp(-q_{i+1})$$

pour toute paire d'entiers i et j avec $-1 \leq i < j$. Enfin, comme $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est complet sous la distance projective (corollaire 1.6 du cours 4), on conclut qu'il existe un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n tel que

$$\text{dist}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}) \leq 2\theta^{-2} \exp(-q_{i+1}) \quad \text{pour tout } i \geq -1.$$

En multipliant chaque \mathbf{u}_i par ± 1 pour un choix de signe approprié, on peut supposer que $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u} \geq 0$ pour tout $i \geq -1$. Alors le lemme 1.5 du cours 4 livre

$$\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}\| \leq 4\theta^{-2} \exp(-q_{i+1}) \quad (i \geq -1).$$

Fixons maintenant un indice $i \geq 0$. Pour chaque $j = 1, \dots, n$ avec $j \neq k_i$, on a $\mathbf{x}_j^{(i)} \in U_i$, donc $\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot \mathbf{u}_i = 0$ et par suite

$$|\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot \mathbf{u}| = \|\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_i)\| \leq \|\mathbf{x}_j^{(i)}\| \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_i\| \leq 8\theta^{-2} \exp(a_j^{(i)} - q_{i+1})$$

en utilisant l'hypothèse (B3) pour majorer la norme de $\mathbf{x}_j^{(i)}$. On obtient ainsi

$$\log |\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot \mathbf{u}| \leq c_1 + a_j^{(i)} - q_{i+1} \quad (j \neq k_i),$$

avec $c_1 = \log(8\theta^{-2})$. De même, on trouve

$$\log |\mathbf{x}_{k_i}^{(i)} \cdot \mathbf{u}| \leq c_1 + a_{k_i}^{(i)} - q_i,$$

car $\mathbf{x}_{k_i}^{(i)} \in U_{i-1}$. Cela permet de majorer les trajectoires des éléments de la base $\underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ sur l'intervalle $[q_i, q_{i+1}]$. Pour tout $q \in [q_i, q_{i+1}]$ et tout $j = 1, \dots, n$, on en déduit en effet

$$(1.1) \quad L(\mathbf{x}_j^{(i)}, q) = \max \{ \log \|\mathbf{x}_j^{(i)}\|, q + \log |\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot \mathbf{u}| \} \leq \begin{cases} c_1 + a_j^{(i)} & \text{si } j \neq k_i, \\ c_1 + a_j^{(i)} + q - q_i & \text{si } j = k_i, \end{cases}$$

car $\log \|\mathbf{x}_j^{(i)}\| \leq \log(2) + a_j^{(i)} \leq c_1 + a_j^{(i)}$. Fixons $q \in [q_i, q_{i+1}]$. Comme $\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)}$ sont linéairement indépendants, on a aussi

$$(L_{\mathbf{u},1}(q), \dots, L_{\mathbf{u},n}(q)) \leq \Phi_n(L(\mathbf{x}_1^{(i)}, q), \dots, L(\mathbf{x}_n^{(i)}, q))$$

pour l'ordre composantes à composantes défini par

$$(t_1, \dots, t_n) \leq (t'_1, \dots, t'_n) \iff t_j \leq t'_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, n.$$

Comme Φ_n préserve cet ordre ($\mathbf{t} \leq \mathbf{t}' \Rightarrow \Phi_n(\mathbf{t}) \leq \Phi_n(\mathbf{t}')$), les inégalités (1.1) livrent

$$\begin{aligned} \Phi_n(L(\mathbf{x}_1^{(i)}, q), \dots, L(\mathbf{x}_n^{(i)}, q)) &\leq (c_1, \dots, c_1) + \Phi_n(a_1^{(i)}, \dots, \widehat{a_{k_i}^{(i)}}, \dots, a_1^{(i)}, a_{k_i}^{(i)} + q - q_i) \\ &= (c_1, \dots, c_1) + \mathbf{P}(q) \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$(L_{\mathbf{u},1}(q), \dots, L_{\mathbf{u},n}(q)) \leq (c_1 + P_1(q), \dots, c_1 + P_n(q))$$

Enfin, comme les différences $c_1 + P_j(q) - L_{\mathbf{u},j}(q)$ sont ≥ 0 , elles sont majorées par leur somme

$$\sum_{j=1}^n (c_1 + P_j(q) - L_{\mathbf{u},j}(q)) = nc_1 + q - \sum_{j=1}^n L_{\mathbf{u},j}(q).$$

Par ailleurs, le théorème de Minkowski donne $\sum_{j=1}^n L_{\mathbf{u},j}(q) \geq q - c_0$ pour une constante $c_0 = c_0(n) \geq 0$ (voir cours 2, §2). On en déduit que

$$(1.2) \quad \|\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(q) - \mathbf{P}(q)\|_{\infty} \leq nc_1 + c_0$$

pour tout $q \in [q_i, q_{i+1}]$ et tout $i \geq 0$, donc pour tout $q \geq q_0$. Cela montre que $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ est borné.

Cet argument montre aussi que, pour tout $i \geq 0$ et tout $q \in [q_i, q_{i+1}]$, on a

$$\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(q) \leq \Phi_n(L(\mathbf{x}_1^{(i)}, q), \dots, L(\mathbf{x}_n^{(i)}, q)) \leq (c_1, \dots, c_1) + \mathbf{P}(q) \leq (c_2, \dots, c_2) + \mathbf{L}_{\mathbf{u}}(q)$$

avec $c_2 = c_0 + nc_1$. Cela signifie que les vecteurs de la base $\underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ réalisent les minima de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$ à des facteurs près, bornés inférieurement par $\exp(-c_2)$ et supérieurement par $\exp(c_2)$, dans un ordre qui varie en fonction de $q \in [q_i, q_{i+1}]$. Plus précisément, on obtient l'estimation suivante qui complète la majoration (1.1)

$$(1.3) \quad L(\mathbf{x}_j^{(i)}, q) \leq a_j^{(i)} + \delta_{j,k_i}(q - q_i) + c_1 \leq L(\mathbf{x}_j^{(i)}, q) + c_2 \quad (1 \leq j \leq n, q_i \leq q \leq q_{i+1}),$$

où les constantes c_1 et c_2 ne dépendent que de n et de θ .

2. Construction des bases.

Il reste à construire les bases $\underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ de \mathbb{Z}^n requises à la première étape de la stratégie développée précédemment. La condition (4) est délicate à remplir, tandis que les autres conditions ne posent pas vraiment de difficultés. Dans [Ro2015, Theorem 5.5], on montre qu'il est possible de construire de telles bases en général avec $\theta = e^{-2}$ si la maille c de \mathbf{P} est au moins $4 + (n + 3) \log(2)$. On propose ici une approche plus simple basée sur [CR2023]. Elle verra qu'elle requiert des hypothèses plus fortes sur le n -système \mathbf{P} mais elle est adaptée au problème de l'approximation avec contraintes angulaires qu'on a abordé au cours 4. Elle évite la partie technique de [Ro2015, §5] et je crois qu'elle pourrait être utile pour calculer les dimensions de Hausdorff d'ensembles de points singuliers de sortes diverses. Le point de départ est l'observation suivante qu'on laisse en exercice.

Lemme 2.1. *Soit $\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ un $(n - 1)$ -uplet de vecteurs unitaires linéairement indépendants de \mathbb{R}^n . Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout choix de vecteurs non nuls $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ de \mathbb{R}^n satisfaisant $\text{dist}(\mathbf{x}_j, \mathbf{v}_j) \leq \delta$ pour $i = 1, \dots, n - 1$, on ait*

$$\|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{n-1}\| \geq \theta \|\mathbf{x}_1\| \cdots \|\mathbf{x}_{n-1}\|$$

avec $\theta = (1/2) \|\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{n-1}\|$.

Par exemple, pour $n = 3$ et $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, on peut prendre $\delta = \theta = 1/2$.

On fixe $\underline{\mathbf{v}}$ et δ comme dans le lemme et on fait l'hypothèse que $k_0 < \ell_0 = n$. Ce n'est pas restrictif pour les applications et cela permet de construire une suite de n -uplets

$$\underline{\mathbf{v}}^{(i)} = (\mathbf{v}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{v}_n^{(i)}) \quad (i \geq 0)$$

de la manière suivante. On pose d'abord

$$\underline{\mathbf{v}}^{(0)} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_{k_0}).$$

Puis, en supposant $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$ construit pour un entier $i \geq 0$, on définit récursivement $\underline{\mathbf{v}}^{(i+1)}$ par les conditions

$$(V1) \ (\mathbf{v}_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{\mathbf{v}_{\ell_{i+1}}^{(i+1)}}, \dots, \mathbf{v}_n^{(i+1)}) = (\mathbf{v}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{v}_{k_i}^{(i)}}, \dots, \mathbf{v}_n^{(i)}),$$

$$(V2) \ \mathbf{v}_{\ell_{i+1}}^{(i+1)} = \mathbf{v}_{k_{i+1}}^{(i+1)}.$$

En effet, comme $k_{i+1} < \ell_{i+1}$, la condition (V1) détermine $\mathbf{v}_{k_{i+1}}^{(i+1)}$, puis (V2) achève de déterminer $\underline{\mathbf{v}}^{(i+1)}$.

Pour chaque entier $i \geq 0$, on a $\mathbf{v}_{\ell_i}^{(i)} = \mathbf{v}_{k_i}^{(i)}$ et chacun des $(n-1)$ -uplets $(\mathbf{v}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{v}_m^{(i)}}, \dots, \mathbf{v}_n^{(i)})$ avec $m = k_i$ et $m = \ell_i$ est une permutation de $\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$. Alors, en vertu du lemme, la condition (B4) est remplie pour la valeur de θ donnée par ce lemme si la base $\underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ satisfait

$$(B4') \ \text{dist}(\mathbf{x}_j^{(i)}, \mathbf{v}_j^{(i)}) \leq \delta \quad (1 \leq j \leq n).$$

Notre approche se réduit alors la proposition suivante qui regroupe les propositions 5.4 et 5.5 de [CR2023].

Proposition 2.2. *Il existe une suite de bases $(\underline{\mathbf{x}}^{(i)})_{i \geq 0}$ de \mathbb{Z}^n satisfaisant les conditions (B1) à (B3) et (B4') pour tout $i \geq 0$ si $a_1^{(0)} = P_1(q_0)$ est assez grand et si au moins une des conditions suivantes est remplie*

$$(*) \ c \geq \log(8/\delta) \ \text{et} \ \ell_i = n \ \text{pour tout entier} \ i \geq 0,$$

$$(**) \ c \geq \log(2) \ \text{et} \ \sum_{i=1}^{\infty} \exp(q_{i-1} - q_i) < \delta/4.$$

Les deux conditions (*) et (**) imposent des conditions fortes sur le n -système \mathbf{P} . La première impose des restrictions sur la forme du graphe conjoint. La seconde demande que les points d'échanges q_i grossissent suffisamment vite pour que la série $\sum_{i=1}^{\infty} \exp(q_{i-1} - q_i)$ converge. Cette dernière condition est satisfaite si \mathbf{P} est auto-similaire, c'est-à-dire s'il existe un nombre $\rho > 1$ tel que $\mathbf{P}(\rho q) = \rho \mathbf{P}(q)$ pour tout $q \geq q_0$ car alors, pour tout $i \geq 1$, on a $q_{i+m} = \rho q_i$ pour un entier $m \geq 1$ indépendant de i . Dans [Ro2017], on démontre que, pour toute famille finie d'exposants d'approximation, les points du spectre de cette famille associés aux n -systèmes auto-similaires sont denses dans le spectre tout entier. Donc, bien qu'elle soit moins fine que celle de [Ro2015], cette approche permet malgré tout le calcul des spectres d'exposants diophantiens.

Dans ce cours, on va simplement démontrer la proposition sous l'hypothèse (**). Pour éviter les technicalités, on va aussi supposer que

$$\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$$

consiste des $n - 1$ premiers éléments de la base canonique de \mathbb{R}^n . Enfin, pour simplifier les notations, on pose

$$A_j^{(i)} = \exp(a_j^{(i)}) = \exp(P_j(q_i)) \quad (0 \leq i, 1 \leq j \leq n).$$

En vertu de la propriété (C1) et du fait que $c \geq \log(2)$, ces nombres satisfont

$$A_1^{(i)} \geq 2 \quad \text{et} \quad A_j^{(i)} \geq 2A_{j-1}^{(i)} \quad (0 \leq i, 1 < j \leq n).$$

On va construire par récurrence une suite de bases $(\underline{\mathbf{x}}^{(i)})_{i \geq 0}$ de \mathbb{Z}^n qui, pour tout $i \geq 0$, satisfont les conditions (B1) à (B3) et la condition

$$(B4'') \max_{1 \leq j \leq n} \text{dist}(\mathbf{x}_j^{(i)}, \mathbf{v}_j^{(i)}) \leq \delta_i \quad \text{où} \quad \delta_i = \frac{\delta}{2} + 2 \sum_{1 \leq m \leq i} \exp(q_{m-1} - q_m),$$

qui est plus forte que (B4').

1° Pour construire la base initiale $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = (\mathbf{x}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(0)})$, on pose d'abord

$$\mathbf{x}_j^{(0)} = \lceil A_j^{(0)} \rceil \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_{j+1} \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Alors $(\mathbf{x}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}^{(0)}, \mathbf{e}_1)$ est une base de \mathbb{Z}^n et, pour $j = 1, \dots, n-1$, on trouve

$$A_j^{(0)} \leq \|\mathbf{x}_j^{(0)}\| \leq A_j^{(0)} + 2 \leq 2A_j^{(0)}.$$

En supposant $A_1^{(0)} \geq 4/\delta$, on obtient aussi

$$\text{dist}(\mathbf{x}_j^{(0)}, \mathbf{e}_j) = \frac{\|\mathbf{x}_j^{(0)} \wedge \mathbf{e}_j\|}{\|\mathbf{x}_j^{(0)}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_j^{(0)}\|} \leq \frac{1}{A_j^{(0)}} \leq \frac{1}{A_1^{(0)}} \leq \frac{\delta}{4}.$$

On définit ensuite

$$\mathbf{x}_n^{(0)} = \mathbf{e}_1 + A\mathbf{x}_{k_0}^{(0)}$$

où A est le plus petit entier avec $A \geq 0$ pour lequel $\|\mathbf{x}_n^{(0)}\| > A_n^{(0)}$. Alors $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = (\mathbf{x}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(0)})$ est une base de \mathbb{Z}^n . On a forcément $A \geq 1$ et par suite

$$\|\mathbf{x}_n^{(0)}\| \leq \|\mathbf{e}_1 + (A-1)\mathbf{x}_{k_0}^{(0)}\| + \|\mathbf{x}_{k_0}^{(0)}\| \leq A_n^{(0)} + 2A_{k_0}^{(0)} \leq 2A_n^{(0)}.$$

Comme $\mathbf{v}_n^{(0)} = \mathbf{e}_{k_0}$, on trouve aussi

$$\text{dist}(\mathbf{x}_n^{(0)}, \mathbf{v}_n^{(0)}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}_n^{(0)}, \mathbf{x}_{k_0}^{(0)}) + \text{dist}(\mathbf{x}_{k_0}^{(0)}, \mathbf{e}_{k_0}) \leq \frac{1}{\|\mathbf{x}_n^{(0)}\|} + \frac{\delta}{4} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Donc la base $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ remplit les conditions (B3) et (B4'') pour $i = 0$.

2° Supposons maintenant que, pour un entier $i \geq 0$, on ait construit des bases $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}, \dots, \underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ de \mathbb{Z}^n qui satisfont les conditions (B1) et (B2) pour les indices de 0 à $i-1$ et les conditions (B3) et (B4'') pour les indices de 0 à i . Pour simplifier l'écriture, on note

$$h = k_i, \quad \ell = \ell_{i+1} \quad \text{et} \quad k = k_{i+1},$$

puis on construit une base $\underline{\mathbf{x}}^{(i+1)}$ de \mathbb{Z}^n en posant

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_\ell^{(i+1)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i+1)}) &= (\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_h^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)}), \\ \mathbf{x}_\ell^{(i+1)} &= \mathbf{x}_h^{(i)} + A\mathbf{x}_k^{(i+1)}, \end{aligned}$$

où A est le plus petit entier avec $A \geq 0$ pour lequel $\|\mathbf{x}_\ell^{(i+1)}\| > A_\ell^{(i+1)}$. Alors les conditions (B1) et (B2) sont remplies pour l'entier i . Comme les conditions (B3) et (B4'') sont remplies pour l'indice i et que, par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} (A_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{A_\ell^{(i+1)}} , \dots, A_n^{(i+1)}) &= (A_1^{(i)}, \dots, \widehat{A_h^{(i)}} , \dots, A_n^{(i)}), \\ (\mathbf{v}_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{\mathbf{v}_\ell^{(i+1)}} , \dots, \mathbf{v}_n^{(i+1)}) &= (\mathbf{v}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{v}_h^{(i)}} , \dots, \mathbf{v}_n^{(i)}), \end{aligned}$$

la base $\underline{\mathbf{x}}^{(i+1)}$ remplit les conditions (B3) et (B4'') pour l'entier $i + 1$ et tout $j = 1, \dots, n$, sauf peut-être pour $j = \ell$. Comme $k < \ell$, on a en particulier

$$\|\mathbf{x}_k^{(i+1)}\| \leq 2A_k^{(i+1)} \leq A_\ell^{(i+1)} \quad \text{et} \quad \text{dist}(\mathbf{x}_k^{(i+1)}, \mathbf{v}_k^{(i+1)}) \leq \delta_i.$$

On en déduit $A \geq 1$, puis

$$\|\mathbf{x}_\ell^{(i+1)}\| \leq \|\mathbf{x}_h^{(i)}\| + (A - 1)\|\mathbf{x}_k^{(i+1)}\| + \|\mathbf{x}_k^{(i+1)}\| \leq A_\ell^{(i+1)} + A_k^{(i+1)} \leq 2A_\ell^{(i+1)},$$

donc la base $\underline{\mathbf{x}}^{(i+1)}$ remplit aussi la condition (B3) pour $j = \ell$. Comme $\mathbf{x}_\ell^{(i+1)}$ admet la même projection orthogonale sur $(\mathbf{x}_k^{(i+1)})^\perp$ que le vecteur $\mathbf{x}_h^{(i)}$, on trouve aussi

$$\text{dist}(\mathbf{x}_\ell^{(i+1)}, \mathbf{x}_k^{(i+1)}) \leq \frac{\|\mathbf{x}_h^{(i)}\|}{\|\mathbf{x}_\ell^{(i+1)}\|} \leq \frac{2A_h^{(i)}}{A_\ell^{(i+1)}} = 2 \exp(a_h^{(i)} - a_\ell^{(i+1)}) = 2 \exp(q_i - q_{i+1}).$$

Comme $\mathbf{v}_\ell^{(i+1)} = \mathbf{v}_k^{(i+1)}$, l'inégalité du triangle livre

$$\text{dist}(\mathbf{x}_\ell^{(i+1)}, \mathbf{v}_\ell^{(i+1)}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}_\ell^{(i+1)}, \mathbf{x}_k^{(i+1)}) + \text{dist}(\mathbf{x}_k^{(i+1)}, \mathbf{v}_k^{(i+1)}) \leq \delta_i + 2 \exp(q_i - q_{i+1}) = \delta_{i+1}.$$

Donc $\underline{\mathbf{x}}^{(i+1)}$ remplit la condition (B4'') pour $j = \ell$. La suite de bases $(\underline{\mathbf{x}}^{(i)})_{i \geq 0}$ ainsi construite possède donc les propriétés cherchées.

3. Deux exemples.

Exemple 1. Pour illustrer les résultats précédents, fixons un nombre $\delta > 0$ et un triplet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de vecteurs unitaires linéairement indépendants de \mathbb{R}^4 , et considérons un 4-système rigide $\mathbf{P}: [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^4$ de maille c qui remplit les conditions (**) de la proposition 2.2 pour ces données. Supposons que le graphe conjoint de \mathbf{P} soit comme sur la figure 1 au-dessus de l'intervalle $[q_0, q_4 + c]$. La proposition 2.2 fournit un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n et une suite de bases $(\underline{\mathbf{x}}^{(i)})_{i \geq 0}$ de \mathbb{Z}^n qui satisfont les conditions (1.2) et (1.3), c'est-à-dire tels que

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{u},j}(q) &= P_j(q) \pm c_2 & (q \geq q_0), \\ L(\mathbf{x}_j^{(i)}, q) &= P_j(q_i) + \delta_{j,k_i}(q - q_i) \pm c_2 & (1 \leq j \leq 4, q_i \leq q \leq q_{i+1}), \end{aligned}$$

pour une constante c_2 qui ne dépend que de n et du choix de $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ (via le lemme 2.1). Donc, les trajectoires des quatre éléments de $\underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ épousent le graphe conjoint de \mathbf{P} sur $[q_i, q_{i+1}]$ avec un écart relativement petit par rapport à la maille c de \mathbf{P} si celle-ci est grande par rapport à c_2 . Supposons que ce soit le cas. Au point q_i , on trouve

$$L(\mathbf{x}_j^{(i)}, q_i) = P_j(q_i) \pm c_2 = L_{\mathbf{u},j}(q) \pm 2c_2 \quad (1 \leq j \leq n).$$

Cela signifie que les éléments de $\underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ réalisent **dans l'ordre** les minima de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q_i)$ à des facteurs relativement proches de 1. Sachant que les trajectoires de ces points sont continues, affines par morceaux et convexes, de pente 0 puis 1, on peut donc suivre approximativement ces trajectoires sur le graphe conjoint de \mathbf{P} . En fait, on peut déterminer approximativement le point où leur trajectoire change de pente, sauf pour $\mathbf{x}_{k_0}^{(0)}$.

Par exemple, on lit sur le graphe conjoint de \mathbf{P} que la trajectoire de $\mathbf{x}_1^{(0)}$ passe par un point proche de (q_0, c) à partir duquel sa pente est 1. La trajectoire de $\mathbf{x}_2^{(0)} = \mathbf{x}_1^{(1)} = \mathbf{x}_1^{(2)}$ passe de la pente 0 à la pente 1 en un point voisin de $(q_2, 4c)$. À gauche de ce point, elle est constante, égale à $4c \pm 2c_2$. La trajectoire de $\mathbf{x}_3^{(0)} = \mathbf{x}_2^{(1)}$ passe de la pente 0 à la pente

1 en un point proche de $(q_1, 7c)$. Enfin, pour donner un dernier exemple, la trajectoire de $\mathbf{x}_3^{(1)} = \mathbf{x}_2^{(2)} = \mathbf{x}_1^{(3)}$ change de pente en un point proche de $(q_3, 10c)$.

La proposition 2.2 donne par ailleurs $\text{dist}(\mathbf{x}_j^{(i)}, \mathbf{v}_j^{(i)}) \leq \delta$ pour des vecteurs $\mathbf{v}_j^{(i)}$ parmi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ suivant la récurrence indiquée au début du paragraphe 2. La figure 1 indique le choix de la direction $\mathbf{v}_j^{(i)}$ à côté de la trajectoire du point $\mathbf{x}_j^{(i)}$, à droite de la verticale $q = q_i$. Cette direction ne dépend que du point. Elle demeure la même tout au long de sa trajectoire. Par exemple, le point $\mathbf{x}_3^{(1)} = \mathbf{x}_2^{(2)} = \mathbf{x}_1^{(3)}$ est à distance projective au plus δ de la direction $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3^{(1)} = \mathbf{v}_2^{(2)} = \mathbf{v}_1^{(3)}$.

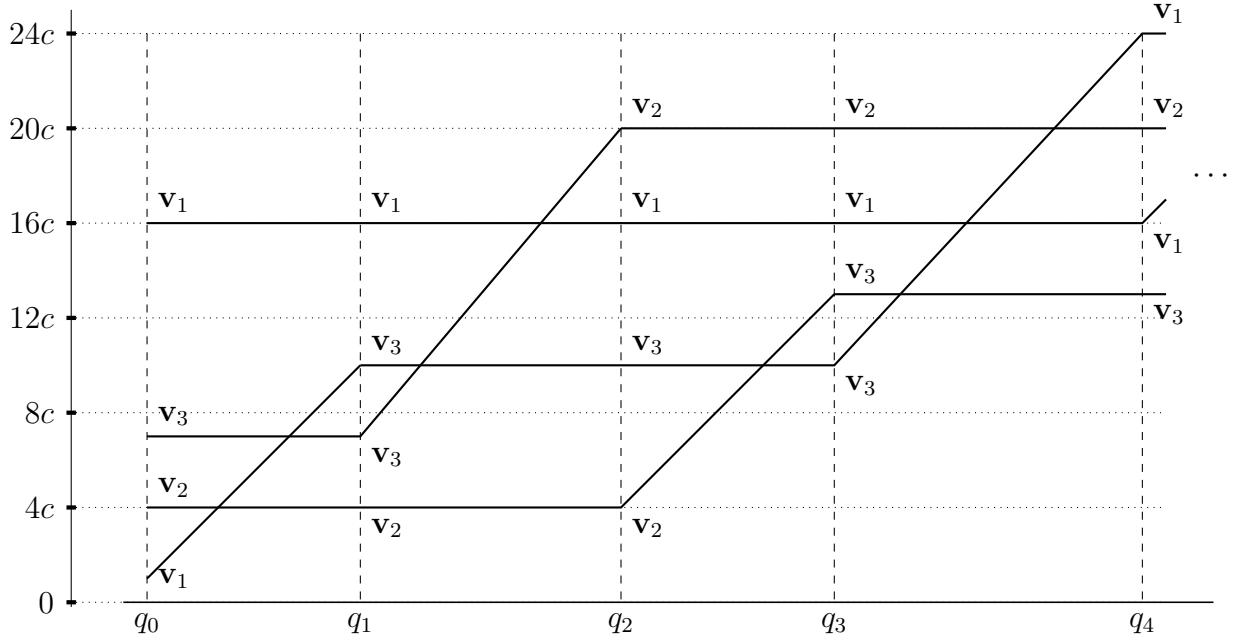


FIGURE 1. Choix de directions pour un 4-système de maille c .

Supposons maintenant que \mathbf{v}_4 soit un quatrième vecteur unitaire de \mathbb{R}^4 en dehors de $V := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle_{\mathbb{R}}$. On peut montrer que si δ est assez petit, alors tout point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^4 avec $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_4) \leq \delta$ satisfait $L(\mathbf{x}, q_2) \geq P_4(q_2) - c_2 = 20c - c_2$.

Le principe est simple. Si δ est assez petit, les relations

$$\text{dist}(\mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{v}_2) \leq \delta, \quad \text{dist}(\mathbf{x}_2^{(2)}, \mathbf{v}_3) \leq \delta, \quad \text{dist}(\mathbf{x}_3^{(2)}, \mathbf{v}_1) \leq \delta \quad \text{et} \quad \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_4) \leq \delta$$

impliquent que $\mathbf{x}_1^{(2)}$, $\mathbf{x}_2^{(2)}$, $\mathbf{x}_3^{(2)}$ et \mathbf{x} sont linéairement indépendants. Or on a

$$\begin{aligned} \max\{L(\mathbf{x}_1^{(2)}, q_2), L(\mathbf{x}_2^{(2)}, q_2), L(\mathbf{x}_3^{(2)}, q_2)\} &\leq \max\{4c \pm c_2, 10c \pm c_2, 16c \pm c_2\} \\ &< L_{\mathbf{u},4}(q_2) = 20c \pm c_2. \end{aligned}$$

Donc on a forcément $L(\mathbf{x}, q_2) \geq L_{\mathbf{u},4}(q_2) = 20c \pm c_2$.

Pour le même δ , on trouve de la même façon que tout point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^4 avec $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_4) \leq \delta$ satisfait $L(\mathbf{x}, q_4) \geq P_4(q_4) - c_2 = 24c - c_2$.

Exemple 2. Ce raisonnement conduit à une conséquence encore plus frappante pour un n -système rigide qui remplit la condition $(*)$ de la proposition 2.2. Considérons par exemple le 3-système rigide $\mathbf{P}: [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de maille c dont le graphe conjoint est illustré par la figure 2 au-dessus de l'intervalle $[q_0, q_5 + c]$.

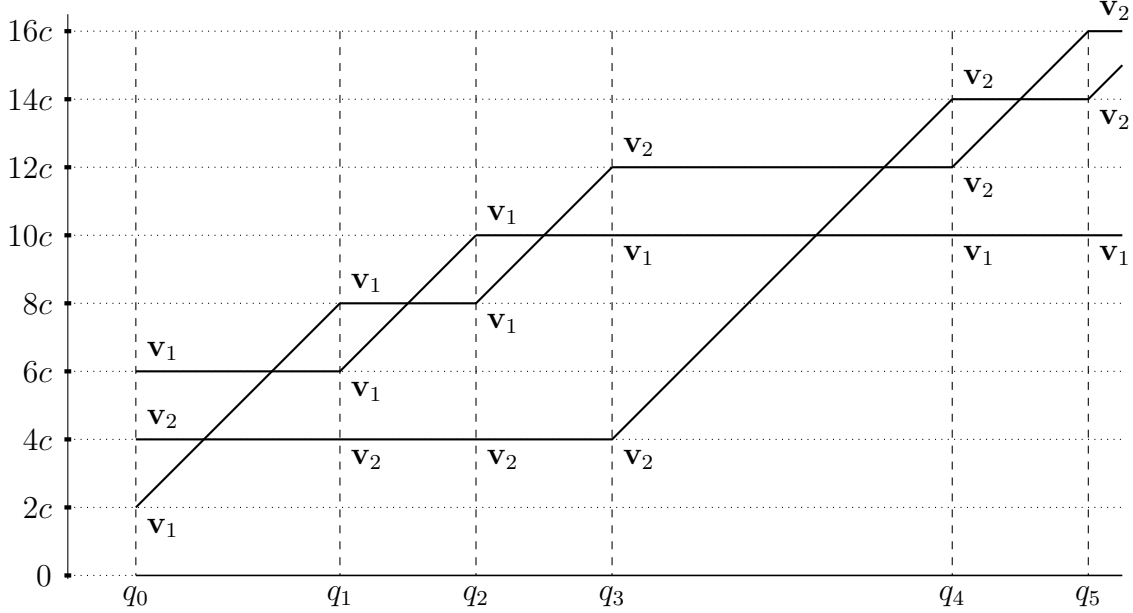


FIGURE 2. Un 3-système de maille c avec $\ell_i = 3$ pour tout i .

On se donne trois vecteurs unitaires $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linéairement indépendants de \mathbb{R}^3 et on applique la proposition 2.2 à la paire $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ pour un choix de δ petit. On obtient ainsi pour chaque $i \geq 0$, une base de $\mathbf{x}^{(i)} = (\mathbf{x}_1^{(i)}, \mathbf{x}_2^{(i)}, \mathbf{x}_3^{(i)})$ de \mathbb{Z}^3 et un triplet de directions $\underline{\mathbf{v}}^{(i)} = (\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)}, \mathbf{v}_3^{(i)})$ satisfaisant entre autres

$$\text{dist}(\mathbf{x}_j^{(i)}, \mathbf{v}_j^{(i)}) \leq \delta \quad (i \geq 0, 1 \leq j \leq 3).$$

Comme $\ell_i = 3$ pour tout $i \geq 0$, les paires $(\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)})$ forment une permutation de $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ pour tout $i \geq 0$. On a indiqué les directions $\mathbf{v}_j^{(i)}$ sur la figure 2 le long des trajectoires des points $\mathbf{x}_j^{(i)}$ comme dans l'exemple 1. En raisonnant comme dans l'exemple 1, on découvre que si δ est assez petit, si la maille c de \mathbf{P} est assez grande en fonction de n et de δ et si un point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^3 satisfait $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_3) \leq \delta$, alors la trajectoire de \mathbf{x} satisfait $L(\mathbf{x}, q_i) \geq P_3(q_i) - c_2$ pour tout $i \geq 0$, pour une constante c_2 qui ne dépend que de n et de δ , et par suite $L(\mathbf{x}, q) \geq P_3(q) - c_2$ pour tout $q \geq q_0$.

4. Application au problème de Schmidt, Thurnheer et Bugeaud-Kristensen.

Les résultats obtenus permettent de compléter la solution au problème de Schmidt, Thurnheer et Bugeaud-Kristensen abordé au cours 4, en fournissant des vecteurs unitaires \mathbf{u} de \mathbb{R}^n comme requis dans la partie 2) du théorème 4.1 du cours 4. On va seulement le montrer dans le cas où $m = 1$ et $n = 3$, pour un choix particulier de sous-espace V . Le cas général est semblable mais plus compliqué techniquement.

Proposition 4.1. *Soit $V = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$. Il existe un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^3 à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} tel que les conditions*

$$(4.1) \quad \text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq 1/48 \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{\|\mathbf{x}\|^{-\rho}}{\log \|\mathbf{x}\|}$$

admettent un nombre fini de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ avec $\|\mathbf{x}\| \geq 2$ et $\rho = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.618$.

La preuve s'inspire des exemples précédents et s'appuie sur le cas particulier suivant de [CR2023, Lemma 3.7].

Lemme 4.2. *Soit V comme dans la proposition et soient $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ avec*

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq 1/48 \quad \text{et} \quad \max_{j=1,2} \text{dist}(\mathbf{x}_j, \mathbf{v}_j) \leq 1/48$$

pour une permutation $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Supposons que $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle_{\mathbb{R}}$. Alors \mathbf{x} s'écrit $\mathbf{x} = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2$ pour des nombres réels a_1, a_2 avec

$$\frac{1}{3} \|\mathbf{x}\| \leq \|a_j \mathbf{x}_j\| \leq \frac{3}{2} \|\mathbf{x}\| \quad (j = 1, 2).$$

On conçoit intuitivement qu'un résultat de cette forme est vrai (sans les valeurs explicites des constantes) car si $\text{dist}(\mathbf{x}, V) = \text{dist}(\mathbf{x}_j, \mathbf{v}_j) = 0$ pour $j = 1, 2$, alors

$$\mathbf{x} \in V \cap \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle_{\mathbb{R}} = V \cap \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

donc $\|a_j \mathbf{x}_j\| = \|\mathbf{x}\|/\sqrt{2}$ pour $j = 1, 2$. On utilisera surtout la conséquence suivante de ce lemme.

Corollaire 4.3. *Avec les notations et hypothèses du lemme, supposons en outre que*

$$\|\mathbf{x}_2\| \geq 3\|\mathbf{x}_1\| \quad \text{et} \quad |\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}| \leq (1/3)|\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}|.$$

Alors, on a

$$\left| \log \frac{\|\mathbf{x}\|}{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|} - \log \frac{\|\mathbf{x}_1\|}{|\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}|} \right| \leq 2.$$

Géométriquement, la quantité $q_{\mathbf{x}} = \log(\|\mathbf{x}\|/|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|)$ est l'abscisse du point où la trajectoire $L_{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} passe de la pente 0 à la pente 1.

Démonstration. On trouve

$$|a_1| \geq \frac{1}{3} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_1\|} \geq \frac{2}{9} \frac{\|a_2 \mathbf{x}_2\|}{\|\mathbf{x}_1\|} \geq \frac{2}{3} |a_2|,$$

donc $|a_2 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}| \leq (1/2)|a_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}|$ et par suite

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{x}\|} &\geq \frac{|a_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}| - |a_2 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \frac{(1/2)|a_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}|}{3|a_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}|} = \frac{1}{6} \frac{|\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{x}_1\|}, \\ \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{x}\|} &\leq \frac{|a_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}| + |a_2 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{(3/2)|a_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}|}{(2/3)|a_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}|} = \frac{9}{4} \frac{|\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{x}_1\|}. \end{aligned} \quad \square$$

Démonstration de la proposition 4.1 On choisit une suite de nombres réels positifs $(a_i)_{i \geq 0}$ telle que

$$(4.2) \quad a_{i+1} \geq 2 \exp(2a_i) \quad (i \geq 0),$$

et on forme la fonction $\tilde{\mathbf{P}}: [s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont les composantes $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$ sont continues et linéaires par morceaux avec

$$0 \leq \tilde{P}_1(q) \leq \tilde{P}_2(q) \leq \tilde{P}_3(q) \quad \text{et} \quad \tilde{P}_1(q) + \tilde{P}_2(q) + \tilde{P}_3(q) = q \quad (q \geq s_0),$$

et dont le graphe conjoint est illustré sur la figure 3, avec

$$s_i = a_i + 2a_{i+1}, \quad q_i = a_i + \rho^2 a_{i+1} \quad \text{et} \quad s'_i = \rho^3 a_{i+1} \quad (i \geq 0).$$

Ces formules découlent des relations $1 + \rho = \rho^2$ et $1 + 2\rho = \rho^3$.

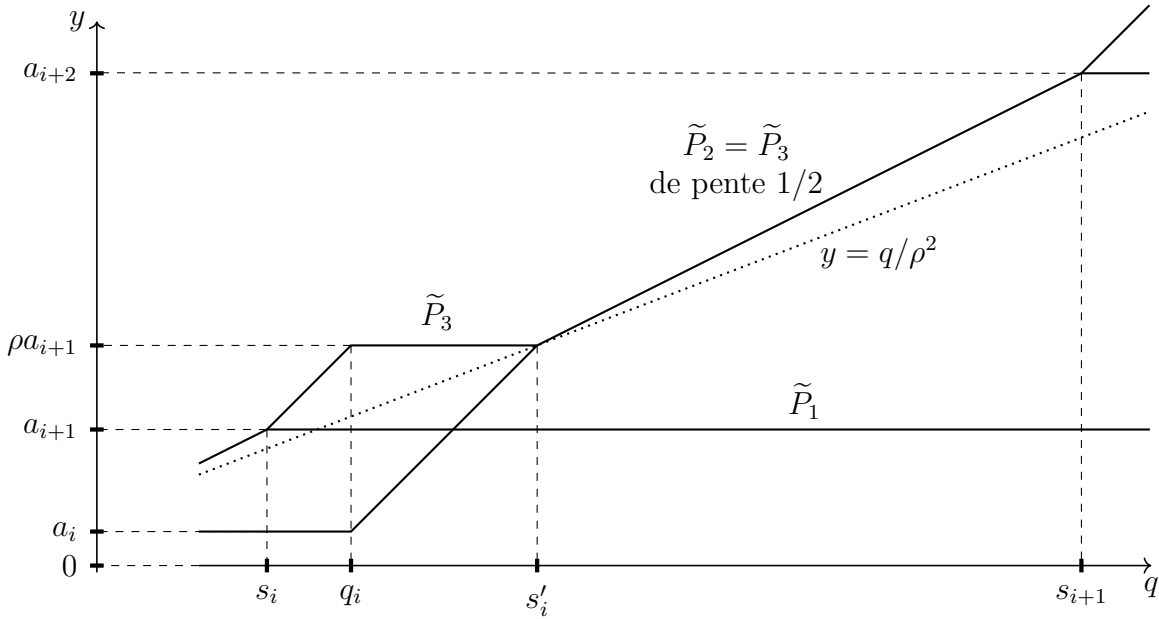


FIGURE 3. Graphe conjoint de $\tilde{\mathbf{P}}$ avec la droite de pente $1/\rho^2$ en pointillés.

La figure 3 montre aussi que $\tilde{P}_3(q) \geq q/\rho^2$ pour tout $q \geq s_0$, avec égalité aux points s'_i avec $i \geq 0$.

On peut construire sans peine un 3-système $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ rigide de maille $c = \log(400)$ dont la différence avec $\tilde{\mathbf{P}}$ est bornée et qui remplit la condition (*) de la proposition 2.2 pour le choix de $\delta = 1/48$. En particulier il satisfait $\ell_i = 3$ pour tout $i \geq 0$. Cette proposition fournit alors un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^3 à coordonnées linéairement indépendantes tel que $\mathbf{L}_\mathbf{u} - \mathbf{P}$ soit borné. Elle fournit aussi une suite de points non nuls $(\mathbf{x}_i)_{i \geq 0}$ de \mathbb{Z}^3 qui satisfont les propriétés suivantes pour tout $i \geq 0$

- (1) $\text{dist}(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) \leq 1/48$ où $\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_1$ si i est pair et $\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_2$ sinon,
- (2) \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_{i+1} sont linéairement indépendants,
- (3) la trajectoire de \mathbf{x}_i change de pente en un point voisin de (q_i, a_i) dans un rayon indépendant de i .

Donc, pour une constante $c_3 > 0$ on a

$$(4.3) \quad \log \|\mathbf{x}_i\| = a_i \pm c_3 \quad \text{et} \quad \log |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| = -\rho^2 a_{i+1} \pm c_3 \quad (i \geq 0),$$

$$(4.4) \quad L_{u,j}(q) = \tilde{P}_j(q) \pm c_3 \quad (1 \leq j \leq 3, q \geq s_0).$$

Supposons qu'un point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^3 satisfasse les conditions (4.1) de la proposition 4.1. On a donc

$$(4.5) \quad \text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq 1/48 \quad \text{et} \quad q_{\mathbf{x}} := \log \frac{\|\mathbf{x}\|}{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|} \geq \rho^2 \log \|\mathbf{x}\| + \log \log \|\mathbf{x}\|.$$

où $q_{\mathbf{x}}$ est l'abscisse du point $(q_{\mathbf{x}}, \log \|\mathbf{x}\|)$ en lequel la trajectoire de \mathbf{x} change de pente. On doit montrer que la norme de \mathbf{x} est bornée.

Pour éviter les répétitions, on met une étoile sur les inégalités qui sont vraies dès que $\|\mathbf{x}\|$ est plus grand qu'une certaine fonction de c_3 . Par exemple, on a $\log \|\mathbf{x}\| + 2c_3 \geq^* a_1$. Alors, il existe un indice $i \geq 0$ tel que

$$(4.6) \quad a_{i+1} \leq \log \|\mathbf{x}\| + 2c_3 \leq a_{i+2}.$$

On considère deux cas.

1°. Supposons d'abord $\log \|\mathbf{x}\| + 2c_3 \geq \rho a_{i+1}$. Il existe $q \in [q_i, s_{i+1}]$ tel que $\log \|\mathbf{x}\| + 2c_3 = \tilde{P}_3(q) = \tilde{P}_2(q)$. Comme $\tilde{P}_3(q) \geq q/\rho^2$, on trouve grâce à (4.5),

$$q_{\mathbf{x}} \geq \rho^2(\tilde{P}_3(q) - 2c_3) + \log \log \|\mathbf{x}\| \geq q - 2\rho^2 c_3 + \log \log \|\mathbf{x}\| >^* q.$$

Cela implique

$$L(\mathbf{x}, q) = \log \|\mathbf{x}\| \leq \tilde{P}_2(q) - 2c_3 < L_{\mathbf{u},2}(q).$$

Comme on a aussi

$$L(\mathbf{x}_{i+1}, q) = a_{i+1} \pm c_3 <^* \tilde{P}_2(q) - 2c_3 < L_{\mathbf{u},2}(q),$$

on en déduit que \mathbf{x} est un multiple de \mathbf{x}_{i+1} , donc

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{i+1}) = \text{dist}(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}) \leq 1/48,$$

et par suite $\text{dist}(\mathbf{v}_{i+1}, V) \leq 1/24$. Or un calcul direct donne

$$\text{dist}(\mathbf{v}_{i+1}, V) = \frac{\|\mathbf{v}_{i+1} \wedge (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3\|}{\|(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ce cas est donc exclu si $\|\mathbf{x}\|$ est assez grand.

2°. Ainsi, on peut supposer $a_{i+1} \leq \log \|\mathbf{x}\| + 2c_3 \leq \rho a_{i+1}$. Alors, il existe $q \in [s_i, q_i]$ tel que $\log \|\mathbf{x}\| + 2c_3 = \tilde{P}_3(q)$. Grâce à (4.5) et (4.2), on trouve

$$(4.7) \quad q_{\mathbf{x}} \geq \rho^2(a_{i+1} - 2c_3) + \log(a_{i+1} - 2c_3) >^* \rho^2 a_{i+1} - 2\rho^2 c_3 + 2a_i >^* q_i + a_i$$

donc $q_{\mathbf{x}} > q_i$ et par suite

$$L(\mathbf{x}, q_i) = \log \|\mathbf{x}\| \leq \tilde{P}_3(q) - 2c_3 \leq \tilde{P}_3(q_i) - 2c_3 < L_{\mathbf{u},3}(q_i).$$

Comme $L_{\mathbf{u},3}(q_i) = \rho a_{i+1} \pm c_3$, on a aussi

$$L(\mathbf{x}_i, q_i) = a_i \pm c_3 <^* L_{\mathbf{u},3}(q_i) \quad \text{et} \quad L(\mathbf{x}_{i+1}, q_i) = a_{i+1} \pm c_3 <^* L_{\mathbf{u},3}(q_i)$$

On en déduit que $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle_{\mathbb{R}}$. Par ailleurs, grâce aux estimations (4.4), les points \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_{i+1} remplissent les hypothèses du corollaire 4.3, et par suite l'écart $|q_i - q_{\mathbf{x}}|$ est borné par une constante indépendante de \mathbf{x} . En vertu de (4.7), ce n'est possible que si $\|\mathbf{x}\|$ est bornée.

REFERENCES

- [CR2023] J. Champagne and D. Roy, Diophantine approximation with constraints, *Acta Arithmetica* **207** (2023), 57–99.
- [Ro2015] D. Roy, On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers, *Ann. of Math.* **182** (2015), 739–786.
- [Ro2017] D. Roy, On the topology of Diophantine approximation Spectra, *Compositio Math.* **153** (2017), 1512–1546.
- [Sc1967] W. M. Schmidt, On heights of algebraic subspaces and Diophantine approximations, *Ann. of Math.* **85** (1967), 430–472.
- [SS2013] W. M. Schmidt and L. Summerer, Diophantine approximation and parametric geometry of numbers, *Monats. Math.* **169** (2013), 51–104.