

COURS 4: APPROXIMATION AVEC CONTRAINTES ANGULAIRES

1. Distance projective d'un point à un sous-espace.

On fixe un espace euclidien réel E de dimension finie $n \geq 2$. Pour tout sous-espace V de E , on a une décomposition en somme directe

$$E = V \oplus V^\perp$$

où $V^\perp = \{\mathbf{x} \in E; \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \forall \mathbf{v} \in V\}$ est le complément orthogonal de V dans E . On note $\text{proj}_V: E \rightarrow V$ et $\text{proj}_{V^\perp}: E \rightarrow V^\perp$ les projections sur le premier et le second facteur respectivement. Alors, pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a

$$(1.1) \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \|\text{proj}_V(\mathbf{x})\|^2 + \|\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x})\|^2.$$

Si $V = \langle \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}}$ pour un point $\mathbf{y} \in E$, on écrit simplement \mathbf{y}^\perp pour désigner V^\perp .

Définition 1.1. Soient \mathbf{x}, \mathbf{y} des points non nuls de E et soit V un sous-espace de E . La *distance projective* de \mathbf{x} à V est

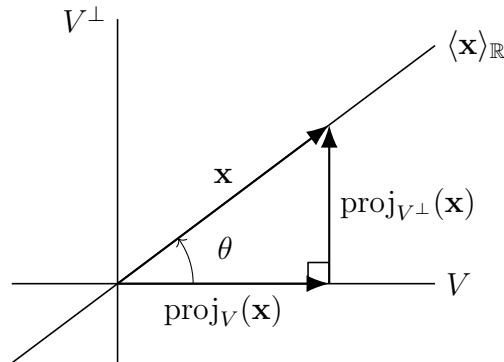
$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) = \frac{\|\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \in [0, 1].$$

La *distance projective* de \mathbf{x} à \mathbf{y} est

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \langle \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}}) \in [0, 1].$$

Ces nombres ne dépendent que des classes de \mathbf{x} et de \mathbf{y} dans l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ sur E . C'est pourquoi on les appelle des distances *projectives*.

Comme le montre la figure ci-dessous pour $V = \langle \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}}$, le nombre $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ représente le sinus de l'angle aigu θ entre les droites $\langle \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}$ et $\langle \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}}$ engendrées par \mathbf{x} et \mathbf{y} . Il est nul si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont parallèles et vaut 1 s'ils sont orthogonaux. En particulier, $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une fonction symétrique de \mathbf{x} et de \mathbf{y} .



Le lemme suivant montre que si V est un sous-espace non nul de E , alors $\text{dist}(\mathbf{x}, V)$ représente le sinus du plus petit angle entre \mathbf{x} et un vecteur non nul de V , c'est-à-dire le sinus de l'angle entre \mathbf{x} et V . Pour $V = \{0\}$, la définition donne $\text{dist}(\mathbf{x}, \{0\}) = 1$.

Lemme 1.2. Soit \mathbf{x} un vecteur non nul de E et soit V un sous-espace non nul de E . On a

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) = \min \{ \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ; \mathbf{y} \in V \setminus \{0\} \}.$$

Démonstration. Soit U un sous-espace de V . Comme V^\perp est un sous-espace de U^\perp , on a

$$\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x}) = \text{proj}_{V^\perp}(\text{proj}_{U^\perp}(\mathbf{x})),$$

donc $\|\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x})\| \leq \|\text{proj}_{U^\perp}(\mathbf{x})\|$ et par suite $\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, U)$. En particulier, pour les sous-espaces de dimension 1 de V , cela implique $\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{y})$ quel que soit $\mathbf{y} \in V \setminus \{0\}$. Enfin, posons $\mathbf{y}_0 = \text{proj}_V(\mathbf{x})$. Si $\mathbf{y}_0 \neq 0$, on a $\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x}) = \text{proj}_{\mathbf{y}_0^\perp}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}_0$, donc $\text{dist}(\mathbf{x}, V) = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$. Si $\mathbf{y}_0 = 0$, alors $\mathbf{x} \in V^\perp$ et on obtient $\text{dist}(\mathbf{v}, V) = 1 = \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{y})$ quel que soit $\mathbf{y} \in V \setminus \{0\}$. \square

Pour \mathbf{x} et V quelconques avec $\mathbf{x} \neq 0$, on note que $\text{dist}(\mathbf{x}, V) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} \in V$, et l'égalité (1.1) se réécrit

$$(1.2) \quad 1 = \text{dist}(\mathbf{x}, V^\perp)^2 + \text{dist}(\mathbf{x}, V)^2.$$

Le lemme suivant donne un moyen alternatif de calculer la distance projective d'un point à un sous-espace.

Lemme 1.3. *Soit \mathbf{x} un vecteur non nul de E , soit V un sous-espace non nul de E et soit $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ une base de V . On a*

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) = \frac{\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_m\|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_m\|} \quad \text{et} \quad \text{dist}(\mathbf{x}, V^\perp) = \frac{\|\mathbf{x} \lrcorner (\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_m)\|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_m\|}$$

Démonstration. Le membre de droite de chacune des deux formules ne dépend pas du choix de la base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de V . Donc, on peut supposer que c'est une base orthonormée de V . Alors $(\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x}), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E . Comme $\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \text{proj}_V(\mathbf{x})$, on trouve

$$\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_m\| = \|\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_m\| = \|\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x})\|.$$

On en déduit la première formule puisque $\|\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_m\| = 1$. La seconde formule découle de même du calcul

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} \lrcorner (\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_m)\| &= \left\| \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{v}}_j \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_m \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^m (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_j \right\| = \|\text{proj}_V(\mathbf{x})\|. \end{aligned} \quad \square$$

En particulier, pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ non nuls, le lemme appliqué à $V = \langle \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{R}}$ livre

$$(1.3) \quad \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \quad \text{et} \quad \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\perp) = \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|},$$

et l'égalité (1.2) entraîne la formule très utile

$$\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\|^2 + |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^2.$$

Lemme 1.4. *Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E \setminus \{0\}$ et soit V un sous-espace de E . On a*

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \text{et} \quad \text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \text{dist}(\mathbf{y}, V).$$

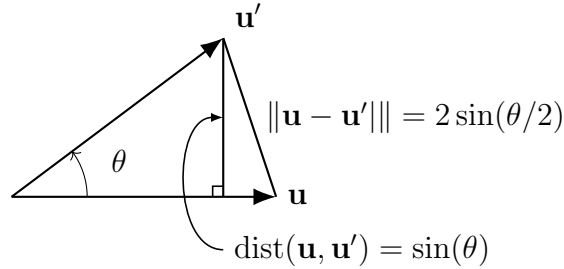
On laisse ce résultat en exercice. La première inégalité signifie que la distance projective satisfait l'inégalité du triangle. Cette distance constitue donc une métrique sur l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ sur E . La seconde inégalité s'en déduit grâce au lemme 1.2.

Le lemme suivant compare la distance projective à la distance usuelle sur E pour des vecteurs unitaires qui font entre eux un angle aigu.

Lemme 1.5. *Soient \mathbf{u}, \mathbf{u}' des vecteurs unitaires de E avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \geq 0$. Alors on a*

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\| \leq 2 \text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{u}').$$

Démonstration. On peut donner une preuve algébrique de cette égalité mais il est plus simple de noter qu'elle revient géométriquement à $\sin(\theta) \leq 2 \sin(\theta/2) \leq 2 \sin(\theta)$ où $\theta \in [0, \pi/2]$ désigne l'angle entre \mathbf{u} et \mathbf{u}' , comme illustré sur la figure ci-dessous. \square



Corollaire 1.6. *L'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est complet pour la distance projective.*

Démonstration. Soit $(\mathbf{u}_i)_{i \geq 1}$ une suite de Cauchy de vecteurs non nuls de E pour la distance projective. On doit montrer qu'il existe un vecteur non nul \mathbf{u} de V tel que $\text{dist}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}) = 0$ tende vers 0 pour $i \rightarrow \infty$. Pour cela, on choisit d'abord un indice $i_0 \geq 1$ tel que $\text{dist}(\mathbf{u}_{i_0}, \mathbf{u}_i) < 1/4$ pour tout $i \geq i_0$. Ensuite, en divisant chaque \mathbf{u}_i par $\pm \|\mathbf{u}_i\|$, on s'arrange pour que les \mathbf{u}_i soient unitaires avec $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_{i_0} \geq 0$ pour tout $i \geq 1$. On peut le faire car ce changement de longueur et de sens n'affecte pas les distances projectives. Alors le lemme précédent donne $\|\mathbf{u}_{i_0} - \mathbf{u}_i\| < 1/2$ pour tout $i \geq i_0$. On en déduit que, pour tout choix d'entiers $i, j \geq i_0$, on a $\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i\| < 1$, puis

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \|\mathbf{u}_i\|^2 - \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \geq 1 - \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\| > 0$$

et par suite $\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\| \leq 2 \text{dist}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ grâce au même lemme. Donc la suite $(\mathbf{u}_i)_{i \geq 1}$ ainsi modifiée est une suite de Cauchy dans E pour la métrique déduite de la norme de E . Comme E est complet pour cette métrique, il existe un vecteur \mathbf{u} de E tel que $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}\| = 0$. Par continuité de la norme et du produit scalaire, cela implique $\|\mathbf{u}\| = 1$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u} = 1$, donc $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}) = 0$ en vertu du lemme 1.5. \square

2. Distance projective d'un sous-espace de E à un autre.

Soient U et V des sous-espaces non nuls de E . Il y a plusieurs manières de définir la distance de U à V et elles ne sont pas équivalentes en général. La raison est que la paire (U, V) est caractérisée à isométrie près par plusieurs angles d'inclinaison comme Schmidt l'explique dans [Sc1967, §§6–8]. La définition la plus simple et la plus commode pour nous est

$$\text{dist}(U, V) = \max \{ \text{dist}(\mathbf{x}, V); \mathbf{x} \in U \setminus \{0\} \}.$$

Un argument de compacité (voir [Ro2015, §4]) montre que ce minimum existe. On en déduit l'estimation suivante.

Lemme 2.1. *Soit $\mathbf{x} \in E \setminus \{0\}$ et soient U, V des sous-espaces non nuls de E . On a*

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, U) + \text{dist}(U, V).$$

Démonstration. On choisit $\mathbf{y} \in U \setminus \{0\}$ tel que $\text{dist}(\mathbf{x}, U) = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ puis $\mathbf{z} \in V \setminus \{0\}$ tel que $\text{dist}(\mathbf{y}, V) = \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Alors, on a

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, U) + \text{dist}(U, V). \quad \square$$

La distance ainsi définie n'est pas symétrique car par exemple, si U est un sous-espace propre de V , on a $\text{dist}(U, V) = 0 < \text{dist}(V, U)$. Par contre, on peut montrer que $\text{dist}(U, V) = \text{dist}(V, U)$ si U et V ont même dimension. Cela découle du lemme suivant lorsque U et V sont de co-dimension 1 dans E .

Lemme 2.2. *Soient $U = \langle \mathbf{u}' \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ et $V = \langle \mathbf{v}' \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ pour des vecteurs non nuls \mathbf{u}' et \mathbf{v}' de E . Alors on a*

$$(2.1) \quad \text{dist}(U, V) = \text{dist}(\mathbf{u}', \mathbf{v}').$$

De plus si $U \neq V$, alors pour toute base $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-2})$ de $W := U \cap V$ et tout choix de $\mathbf{u} \in U \setminus V$ et de $\mathbf{v} \in V \setminus U$, on a aussi

$$(2.2) \quad \text{dist}(U, V) = \frac{\|X\| \|X \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|}{\|X \wedge \mathbf{u}\| \|X \wedge \mathbf{v}\|}$$

où $X = \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{n-2}$.

Démonstration. Si $U = V$, l'égalité (2.1) est immédiate car alors $\text{dist}(U, V) = 0 = \text{dist}(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$. On peut donc supposer $U \neq V$. On note aussi que le membre de droite de (2.2) est indépendant du choix de la base $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-2})$ de W et des points $\mathbf{u} \in U \setminus V$ et $\mathbf{v} \in V \setminus U$. Alors on peut choisir pour $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-2})$ une base orthonormée de W et choisir $\mathbf{u} \in U \cap W^{\perp}$ et $\mathbf{v} \in V \cap W^{\perp}$ unitaires. Alors le membre de droite de (2.2) se réduit à

$$\frac{\|X\| \|X \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|}{\|X \wedge \mathbf{u}\| \|X \wedge \mathbf{v}\|} = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Comme $\mathbf{u} \in W^{\perp}$, on a $\text{proj}_V(\mathbf{u}) = \text{proj}_{\langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}}}(\mathbf{u})$, donc

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{dist}(\mathbf{u}, V).$$

D'autre part, soit \mathbf{x} un vecteur unitaire quelconque de U . Il s'écrit $\mathbf{x} = a\mathbf{u} + \mathbf{w}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{w} \in W$ tels que $1 = a^2 + \|\mathbf{w}\|^2$. Cela implique $|a| \leq 1$ et par suite

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) = \|\text{proj}_{V^{\perp}}(\mathbf{x})\| = \|\text{proj}_{V^{\perp}}(a\mathbf{u})\| \leq \|\text{proj}_{V^{\perp}}(\mathbf{u})\| = \text{dist}(\mathbf{u}, V).$$

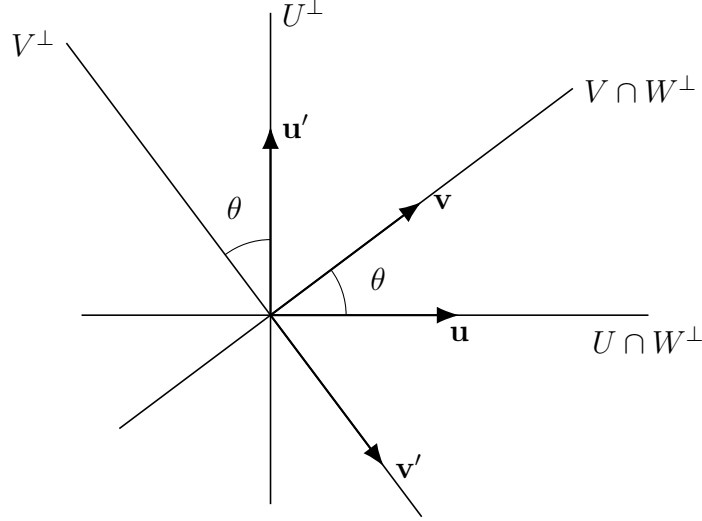
On en déduit que

$$\text{dist}(U, V) = \text{dist}(\mathbf{u}, V) = \text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

ce qui démontre (2.2).

Pour en déduire (2.1), il reste à montrer que $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{dist}(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$. Or, cette égalité est claire géométriquement quand on l'interprète dans le plan W^{\perp} . Puisque $(\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}, \langle \mathbf{u}' \rangle_{\mathbb{R}})$ et $(\langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}}, \langle \mathbf{v}' \rangle_{\mathbb{R}})$ sont des paires de droites orthogonales dans ce plan, l'angle aigu θ entre les

droites $\langle \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}}$ et $\langle \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}}$ est le même que l'angle aigu entre $U^{\perp} = \langle \mathbf{u}' \rangle_{\mathbb{R}}$ et $V^{\perp} = \langle \mathbf{v}' \rangle_{\mathbb{R}}$ comme le montre le dessin ci-dessous dans le plan W^{\perp} . \square



En vertu de la formule (2.1), la distance projective entre les hyperplans satisfait l'inégalité du triangle. Si U, V et W sont des hyperplans de \mathbb{R}^n , alors

$$\text{dist}(U, W) \leq \text{dist}(U, V) + \text{dist}(V, W).$$

Quant à la formule (2.2), elle admet la conséquence suivante.

Corollaire 2.3. Soit $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ une base de \mathbb{Z}^n et soient $1 \leq k < \ell \leq n$ des entiers. Les hyperplans

$$U = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \widehat{\mathbf{x}}_{\ell}, \dots, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad V = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \widehat{\mathbf{x}}_k, \dots, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathbb{R}},$$

satisfont

$$\text{dist}(U, V) = \frac{\|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{x}}_k \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{x}}_{\ell} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n\|}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{x}}_k \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n\| \|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{x}}_{\ell} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n\|}.$$

Démonstration. On a $\|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n\| = \text{covol}(\mathbb{Z}^n) = 1$ et $U \cap V = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \widehat{\mathbf{x}}_k, \dots, \widehat{\mathbf{x}}_{\ell}, \dots, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathbb{R}}$. \square

3. Exposants intermédiaires.

On dit qu'un sous-espace V de \mathbb{R}^n est *défini sur* \mathbb{Q} s'il est l'ensemble des zéros communs d'une famille d'équations linéaires homogènes à coefficients dans \mathbb{Q} . Une condition équivalente est que V soit engendré par des éléments de \mathbb{Q}^n . Donc E est défini sur \mathbb{Q} si et seulement si V^{\perp} est défini sur \mathbb{Q} .

Si V est un tel sous-espace et si $k = \dim(V) > 0$, alors $V \cap \mathbb{Z}^n$ est un réseau de E et on définit la *hauteur* de V par

$$H(V) = \text{covol}_V(V \cap \mathbb{Z}^n) = \|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k\|$$

où $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ est n'importe quelle base de $V \cap \mathbb{Z}^n$. Si \mathbf{u} est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n , on définit aussi

$$(3.1) \quad D_{\mathbf{u}}(V) = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k\| \quad \text{et} \quad D_{\mathbf{u}}^*(V) = \|\mathbf{u} \lrcorner (\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k)\|,$$

ce qui ne dépend pas non plus du choix de la base $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ de $V \cap \mathbb{Z}^n$. Dans ce contexte, les formules du lemme 1.3 s'interprètent de la manière suivante.

Lemme 3.1. *Pour tout sous-espace non nul V de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} et tout vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n , on a*

$$(3.2) \quad \text{dist}(\mathbf{u}, V) = \frac{D_{\mathbf{u}}(V)}{H(V)} \quad \text{et} \quad \text{dist}(\mathbf{u}, V^\perp) = \frac{D_{\mathbf{u}}^*(V)}{H(V)}.$$

Pour le sous-espace nul $\{0\}$, on pose $H(\{0\}) = 1$. La formule de dualité suivante est due à Schmidt [Sc1967, §1, équation (4)].

Lemme 3.2. *Pour tout sous-espace V de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} , on a $H(V) = H(V^\perp)$.*

Démonstration. Soit $k = \dim(V)$. C'est clair si $k = 0$ ou si $k = n$ car $H(\mathbb{R}^n) = 1$. Supposons $0 < k < n$, et soit $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ une base de $V \cap \mathbb{Z}^n$. On la complète en une base $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ de \mathbb{Z}^n avec $\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = 1$ et on forme la base duale $(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*)$ de \mathbb{Z}^n . Alors $(\mathbf{x}_{k+1}^*, \dots, \mathbf{x}_n^*)$ est une base de $V^\perp \cap \mathbb{Z}^n$. On pose $X = \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k$ et $Y = \mathbf{x}_{k+1}^* \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n^*$ de sorte que $H(V) = \|X\|$ et que $H(V^\perp) = \|Y\|$. Pour conclure, on va montrer que l'isométrie $*$: $\bigwedge^k \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^{n-k} \mathbb{R}^n$ envoie X sur $\pm Y$, donc que $\|X\| = \|Y\|$. Pour cela il suffit de noter que pour tout choix d'entiers $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{i_k}^*) \wedge Y &= \begin{cases} \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n & \text{si } (i_1, \dots, i_k) = (1, \dots, k), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= ((\mathbf{x}_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{i_k}^*) \cdot X) \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire 3.3. *Pour tout sous-espace V de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} et tout vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n , on a $D_{\mathbf{u}}(V) = D_{\mathbf{u}}^*(V^\perp)$.*

Démonstration. $D_{\mathbf{u}}^*(V^\perp) = H(V^\perp) \text{dist}(\mathbf{u}, V) = H(V) \text{dist}(\mathbf{u}, V) = D_{\mathbf{u}}(V)$ grâce à (3.2). \square

En revisitant les travaux de Schmidt dans [Sc1967], Laurent [La2009b] puis Bugeaud et Laurent [BL2010] ont introduit des suites de $n-1$ exposants d'approximation intermédiaires entre les exposants α et ω d'une part et leurs contreparties uniformes $\hat{\alpha}$ et $\hat{\omega}$ d'autre part (voir le cours 3, §4). Les k -ièmes exposants de chaque suite sont des mesure d'approximation d'un vecteur \mathbf{u} non nul par des sous-espaces définis sur \mathbb{Q} de dimension k . Leur définition est basée non pas directement sur les distances projectives mais plutôt sur les quantités (3.1) qui sont linéaires en termes des coordonnées grassmanniennes de V .

Définition 3.4. Soit k un entier avec $1 \leq k < n$ et soit \mathbf{u} un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . On définit $\omega_{k-1}(\mathbf{u})$ (resp. $\hat{\omega}_{k-1}(\mathbf{u})$) comme le suprémum des nombres ω tels que pour des nombres $Q \geq 1$ arbitrairement grands (resp. pour tout $Q \geq 1$ assez grand), il existe un sous-espace V de \mathbb{R}^n de dimension k défini sur \mathbb{Q} avec

$$(3.3) \quad H(V) \leq Q \quad \text{et} \quad D_{\mathbf{u}}(V) \leq Q^{-\omega}.$$

Ces nombres ne dépendent que de la classe de \mathbf{u} dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ et l'indice $k-1$ désigne la dimension de l'image de E dans cet espace projectif. On peut toujours supposer que \mathbf{u} est unitaire.

Pour $k = 1$, on a $V = \langle \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}$ pour un point primitif \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n , c'est-à-dire un point entier dont le pgcd des coordonnées est 1, et alors on a $H(V) = \|\mathbf{x}\|$ et $D_{\mathbf{u}}(V) = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}\|$. On en déduit $\omega_0(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u})$ et $\widehat{\omega}_0(\mathbf{u}) = \widehat{\alpha}(\mathbf{u})$. De même, on trouve $\omega_{n-2}(\mathbf{u}) = \omega(\mathbf{u})$ et $\widehat{\omega}_{n-2}(\mathbf{u}) = \widehat{\omega}(\mathbf{u})$.

La géométrie paramétrique des nombres permet d'étudier ces exposants grâce aux formules suivantes.

Proposition 3.5. *Soit k un entier avec $1 \leq k < n$ et soit \mathbf{u} un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n . Alors*

$$\omega_{k-1}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\underline{\psi}_{n-k}(\mathbf{u})} - 1 \quad \text{et} \quad \widehat{\omega}_{k-1}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\overline{\psi}_{n-k}(\mathbf{u})} - 1,$$

où $\underline{\psi}_{n-k}(\mathbf{u})$ et $\overline{\psi}_{n-k}(\mathbf{u})$ représentent respectivement les limites inférieure et supérieure du quotient $(L_{\mathbf{u},1}(q) + \cdots + L_{\mathbf{u},n-k}(q))/q$ lorsque q tend vers l'infini.

Démonstration. En vertu du lemme 3.2 et du corollaire 3.3, les conditions (3.3) de la définition 3.4 sont équivalentes à

$$(3.4) \quad H(V^\perp) \leq Q \quad \text{et} \quad D_{\mathbf{u}}^*(V^\perp) \leq Q^{-\omega}.$$

Si ces conditions sont remplies pour un sous-espace vectoriel V de \mathbb{R}^n de dimension k défini sur \mathbb{Q} et si $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-k})$ est une base de $V^\perp \cap \mathbb{Z}^n$, alors le point $X = \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{n-k}$ satisfait

$$\|X\| \leq Q \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u} \lrcorner X\| \leq Q^{-\omega}.$$

En posant $q = \log(Q^{\omega+1})$, on en déduit que $X \in \exp(q/(\omega+1))\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(n-k)}(q)$, donc

$$(3.5) \quad L_{\mathbf{u},1}^{(n-k)}(q) \leq \frac{q}{\omega+1}.$$

Réciproquement, supposons que la condition (3.5) soit remplie avec $q = \log(Q^{\omega+1})$ pour un nombre $Q \geq 1$. On peut renverser la construction comme suit. On choisit d'abord des points linéairement indépendants $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-k}$ de \mathbb{Z}^n qui réalisent les premiers minima de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$, c'est-à-dire tels que $L(\mathbf{x}_j, q) = L_{\mathbf{u},j}(q)$ pour $j = 1, \dots, n-k$. En vertu de la théorie de Mahler, le point $X = \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{n-k}$ de $(\mathbb{Z}^n)^{(n-k)}$ réalise à une constante multiplicative près le premier minimum de $(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))^{(n-k)}$ par rapport au réseau $(\mathbb{Z}^n)^{(n-k)}$ (voir la remarque à la toute fin du cours 1). Comme $(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))^{(n-k)} \asymp_n \mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(n-k)}(q)$, on en déduit qu'il existe une constante $c = c(n) > 0$ telle que

$$(3.6) \quad L(X, q) \leq L_{\mathbf{u},1}^{(n-k)}(q) + c \leq \frac{q}{\omega+1} + c = \log(e^c Q).$$

On pose $V = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-k} \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$. C'est un sous-espace de \mathbb{R}^n défini sur \mathbb{Q} de dimension k avec

$$H(V^\perp) \leq \|X\| \leq \exp(L(X, q)) \leq e^c Q$$

$$D_{\mathbf{u}}^*(V^\perp) \leq \|\mathbf{u} \lrcorner X\| \leq \exp(L(X, q) - q) \leq e^c Q^{-\omega}.$$

On en déduit que $\omega_{k-1}(\mathbf{u})$ (resp. $\widehat{\omega}_{k-1}(\mathbf{u})$) est le suprémum des nombres ω tels que la condition (3.5) soit satisfaite pour des nombres $q \geq 0$ arbitrairement grands (resp. pour tout $q \geq 0$ assez grand). La conclusion suit en utilisant le fait que la différence

$$L_{\mathbf{u},1}^{(n-k)}(q) - (L_{\mathbf{u},1} + \cdots + L_{\mathbf{u},n-k})$$

est bornée. □

Exercice 3.1. Soit k un entier avec $1 \leq k < n$ et soit \mathbf{u} un vecteur de \mathbb{R}^n à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Montrer que $\omega_{k-1}(\mathbf{u})$ est le suprémum des nombres ω pour lesquels il existe une infinité de sous-espaces V de \mathbb{R}^n de dimension k définis sur \mathbb{Q} tels que $\text{dist}(\mathbf{u}, V) \leq H(V)^{-\omega-1}$.

4. Approximation avec contraintes angulaires.

On fixe des entiers m et n avec $n \geq m + 2 \geq 3$ et on pose

$$\rho_m = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2} \in (m, m + 1).$$

Le résultat suivant reprend [CR2023, Theorem 1.1] sous forme simplifiée.

Théorème 4.1 (Champagne–R. 2023). *Soit V un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension $m + 1$.*

1) *Pour tout $\delta \in (0, 1)$ et tout vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , il existe une infinité de points non nuls \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n tels que*

$$(4.1) \quad \text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \delta \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{x}\|^{-\rho}$$

avec $\rho = \rho_m$.

2) *Pour tout $\rho > \rho_m$, il existe $\delta \in (0, 1)$ et un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} tels que les conditions (4.1) admettent au plus un nombre fini de solutions non nulles $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$.*

En choisissant $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_{m+2} = \dots = x_n = 0\}$, on trouve

$$\text{proj}_{V^\perp}(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x_{m+2}, \dots, x_n)$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, d'où l'énoncé suivant.

Corollaire 4.2. *Pour tout $\delta \in (0, 1)$ et tout vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , il existe une infinité de points non nuls \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n tels que*

$$(4.2) \quad \max\{|x_{m+2}|, \dots, |x_n|\} \leq \delta \|\mathbf{x}\| \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \epsilon \|\mathbf{x}\|^{-\rho}$$

avec $\rho = \rho_m$. *Pour $\rho > \rho_m$, ce n'est plus vrai.*

On sait que, pour tout vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n , il existe une infinité de points non nuls \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n tels que $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq c \|\mathbf{x}\|^{-(n-1)}$ pour une constante $c = c(n) > 0$. Dans [Sc1976], Schmidt se demande ce qu'il advient de ce résultat si on demande que les points $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ aient toutes leurs coordonnées du même signe sauf peut-être la première ou, plus généralement, si on demande que (x_2, \dots, x_n) fasse un petit angle avec un point non nul de \mathbb{R}^{n-1} (voir [Sc1976, Remark A]). Cela revient encore à demander que \mathbf{x} lui même fasse un petit angle avec un sous-espace V de \mathbb{R}^n de dimension 2. Schmidt note aussi que la nature de ce problème change sans la condition d'indépendance linéaire sur \mathbb{Q} des coordonnées de \mathbf{u} . Cette direction de recherche a été étendue par Thurnheer [Th1990] puis reprise par Bugeaud et Kristensen [BK2009] dans le cadre du corollaire ci-dessus.

La partie 1) du théorème revient à Schmidt [Sc1976, §2] pour $m = 1$ et $n = 3$. Elle revient à Thurnheer [Th1990, Theorem 1(b)] pour $n = m + 2$. Dans [CR2023], on déduit le cas général à partir du résultat de Thurnheer. La surprise vient de la partie 2) du théorème qui

affirme que ρ_m est l'exposant optimal pour ce problème, un nombre qui ne dépend que de m et qui est plus petit que $n - 1$. Dans [CR2023], on le montre grâce à une construction en géométrie paramétrique des nombres avec contraintes angulaires qu'on verra au cours 5.

Ces développements font suite aux travaux de Moshchevitin dans [Mo2012]. Il montre par une construction ingénieuse que, pour $m = 1$ et $n = 3$, l'exposant optimal est au plus 1.947 donc strictement inférieur à 2, contrairement à une conjecture de Schmidt dans [Sc1983, §5]. Le fait que le nombre d'or $\rho_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.618$ soit l'exposant optimal pour $m = 1$ et $n = 3$ est démontré dans [Ro2014]. Pour $m = 1$ et $n \geq 3$, cela revient à Jérémy Champagne dans son mémoire de maîtrise [Ch2021].

L'objectif des prochaines pages est de prouver la partie 1) du théorème 4.1 à l'aide des outils de géométrie paramétrique des nombres au lieu des arguments plus classiques de Schmidt et de Thurnheer. De cette façon, on comprend mieux les constructions de [CR2023] qui montrent l'optimalité de l'exposant ρ_m .

Dans ce but, on fixe V , δ et \mathbf{u} comme dans la partie 1) du théorème. On fixe aussi un n -système rigide $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n): [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $L_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ soit borné et on pose

$$c_0 = \sup_{q \geq q_0} \|\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(q) - \mathbf{P}(q)\|_{\infty}.$$

Comme les coordonnées de \mathbf{u} sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , la fonction P_1 n'est pas bornée. On pose aussi

$$r = n - m,$$

de sorte que $2 \leq r \leq n - 1$. On aura besoin de trois lemmes.

Lemme 4.3. *Pour tout $q \geq 0$, il existe un point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n tel que*

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \delta, \quad \log \|\mathbf{x}\| \leq P_{r+1}(q) + c_1 \quad \text{et} \quad \log |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq P_{r+1}(q) - q + c_1,$$

où $c_1 = c_0 + \log(2n/\delta)$.

Démonstration. On applique l'argument général d'approximation inhomogène présenté au cours 1. On commence par fixer un nombre $q \geq 0$, puis on choisit des points linéairement indépendants

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+1} \in \mathbb{Z}^n \cap \lambda \mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q) \quad \text{où} \quad \lambda = \lambda_{r+1}(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q), \mathbb{Z}^n) = \exp(L_{\mathbf{u}, r+1}(q)).$$

Par définition de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$, ces points satisfont

$$\max_{1 \leq i \leq r+1} \|\mathbf{x}_i\| \leq \lambda \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq i \leq r+1} |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| \leq \lambda e^{-q}.$$

On choisit aussi un point

$$\mathbf{y} \in V \cap \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+1} \rangle_{\mathbb{R}} \cap \mathbf{u}^{\perp} \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{y}\| = \frac{n}{\delta} \lambda.$$

C'est possible car V est de dimension $m + 1$ tandis que $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+1} \rangle_{\mathbb{R}}$ est de co-dimension $m - 1$ dans \mathbb{R}^n . On écrit

$$\mathbf{y} = t_1 \mathbf{x}_1 + \dots + t_{r+1} \mathbf{x}_{r+1}$$

avec $t_1, \dots, t_{r+1} \in \mathbb{R}$, puis, pour chaque i , on choisit $a_i \in \mathbb{Z}$ tel que $|t_i - a_i| \leq 1/2$, et on pose

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_{r+1} \mathbf{x}_{r+1} \in \mathbb{Z}^n.$$

On trouve

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \frac{r+1}{2} \max_{1 \leq i \leq r+1} \|\mathbf{x}_i\| \leq \frac{n}{2} \lambda = \frac{\delta}{2} \|\mathbf{y}\|.$$

Comme $\delta \leq 1$, on en déduit

$$\frac{\|\mathbf{y}\|}{2} \leq \|\mathbf{x}\| \leq 2\|\mathbf{y}\| \leq \frac{2n}{\delta} \lambda.$$

De plus comme $\mathbf{y} \in V$, on a $\text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x}) = \text{proj}_{V^\perp}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, donc

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{(\delta/2)\|\mathbf{y}\|}{(1/2)\|\mathbf{y}\|} = \delta.$$

Enfin, comme $\mathbf{y} \in \mathbf{u}^\perp$, on a aussi

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| = |(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{r+1}{2} \max_{1 \leq i \leq r+1} |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}| \leq \frac{n}{2} \lambda e^{-q}.$$

Ce point possède les propriétés requises car $\log \lambda = L_{\mathbf{u}, r+1}(q) \leq P_{r+1}(q) + c_0$. \square

Le raffinement suivant requiert une hypothèse additionnelle sur \mathbf{P} .

Lemme 4.4. *Supposons que la somme $M_r = P_1 + \dots + P_r$ soit constante sur un intervalle $[s, q] \subset [0, \infty)$ assez long en fonction de n et de δ . Alors il existe un point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n tel que*

$$(4.3) \quad \text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \delta, \quad \log \|\mathbf{x}\| \leq P_r(q) + c_2 \quad \text{et} \quad \log |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq P_r(q) - q + c_2$$

pour une constante $c_2 = c_2(n, \delta, c_0)$.

Démonstration. Cette fois, on choisit r points linéairement indépendants $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ de \mathbb{Z}^n qui réalisent les r premiers minima de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$, c'est-à-dire tels que

$$L(\mathbf{x}_i, q) = L_{\mathbf{u}, i}(q) \quad (1 \leq i \leq r).$$

On pose $X = \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r$ et $E = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Comme $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(r)}(q) \asymp_n (\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))^{(r)}$, on a

- $L_{\mathbf{u}, 1}^{(r)}(t) = L_{\mathbf{u}, 1}(t) + \dots + L_{\mathbf{u}, r}(t) + \mathcal{O}(1) = M_r(t) + \mathcal{O}(1)$ pour tout $t \geq 0$,
- $L(X, q) = L_{\mathbf{u}, 1}^{(r)}(q) + \mathcal{O}(1)$,
- $L(X, s) \geq L_{\mathbf{u}, 1}^{(r)}(s)$,

où $\mathcal{O}(1)$ désigne un nombre quelconque de valeur absolue bornée par une fonction de n et de c_0 seulement. Ces trois inégalités découlent respectivement du corollaire 4.7 du cours 1, de la remarque à la toute fin du cours 1, et de la définition de $L_{\mathbf{u}, 1}^{(r)}$. Comme M_r est constante sur $[s, q]$, on en déduit

$$L(X, q) = M_r(q) + \mathcal{O}(1) = M_r(s) + \mathcal{O}(1) \leq L(X, s) + \mathcal{O}(1).$$

Donc il existe une constante $c = c(n, c_0) \geq 0$ telle que

$$L(X, q) \leq L(X, s) + c.$$

Supposons que la longueur de $[s, q]$ satisfasse $q - s > c$. L'inégalité précédente implique que la trajectoire L_X de X change de pente de 0 à 1 en un point $\geq q - c$, donc

$$\log \frac{\|X\|}{\|\mathbf{u} \lrcorner X\|} \geq q - c.$$

Alors, grâce au lemme 1.3, tout point non nul \mathbf{x} de E satisfait

$$\frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{x}\|} = \text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{x}^\perp) \leq \text{dist}(\mathbf{u}, E^\perp) = \frac{\|\mathbf{u} \lrcorner X\|}{\|X\|} \leq \exp(-q + c)$$

car $E^\perp \subseteq \mathbf{x}^\perp$ et que $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)$ est une base de E . On conclut que

$$(4.4) \quad \log |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \log \|\mathbf{x}\| - q + c \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in E \setminus \{0\}.$$

On note aussi que $\log \|\mathbf{x}_i\| \leq L(\mathbf{x}_i, q) = L_{\mathbf{u},i}(q) \leq L_{\mathbf{u},r}(q)$ pour $i = 1, \dots, r$, donc

$$\max_{1 \leq i \leq r} \|\mathbf{x}_i\| \leq \lambda \quad \text{où } \lambda = \exp(L_{\mathbf{u},r}(q)).$$

Comme $\dim(V \cap E) \geq \dim(V) + \dim(E) - n = 1$, il existe

$$\mathbf{y} \in V \cap E \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{y}\| = \frac{r\lambda}{\delta}.$$

En procédant comme dans la preuve du lemme précédent, on construit pour cet \mathbf{y} un point $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq E \cap \mathbb{Z}^n$ tel que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \frac{r}{2} \max_{1 \leq i \leq r} \|\mathbf{x}_i\| \leq \frac{r\lambda}{2} = \frac{\delta}{2} \|\mathbf{y}\|.$$

On en déduit

$$\frac{\|\mathbf{y}\|}{2} \leq \|\mathbf{x}\| \leq 2\|\mathbf{y}\|.$$

Comme dans la preuve du lemme précédent, cela implique

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{(\delta/2)\|\mathbf{y}\|}{(1/2)\|\mathbf{y}\|} = \delta,$$

$$\log \|\mathbf{x}\| \leq \log(2\|\mathbf{y}\|) = \log(2r\lambda/\delta) = \log(2r/\delta) + L_{\mathbf{u},r}(q) \leq P_r(q) + c_1$$

où c_1 est comme au lemme 4.3. Puisque $\mathbf{x} \in E$, cette seconde estimation jointe à (4.4) livre

$$\log |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \log \|\mathbf{x}\| - q + c \leq P_r(q) - q + c_2$$

avec $c_2 = c_1 + c$. □

Enfin, on aura besoin de la propriété suivante du n -système \mathbf{P} , basée sur le fait que sa première composante P_1 n'est pas bornée et que $2 \leq r < n$.

Lemme 4.5. *Il existe une infinité d'intervalles maximaux de convexité de $M_r := P_1 + \dots + P_r$ sur lesquels P_1 n'est pas convexe. Pour un tel intervalle $[s, s']$, on a*

$$1) \quad P_{r+1}(s) = P_r(s) \text{ et } P_{r+1}(s') = P_r(s'),$$

$$2) \quad P_{i+1}(s) \leq P_i(s') \text{ pour } i = 1, \dots, r-1.$$

La figure 1 montre le graphe conjoint de \mathbf{P} sur un tel intervalle $[s, s']$. Sur cette figure le point $q \in (s, s')$ est celui où M_r passe de la pente 0 à la pente 1. C'est un point d'échange de \mathbf{P} . Sur $[s, q]$, les fonctions P_1, \dots, P_r sont constantes. Sur $[q, s']$, ce sont les autres composantes P_{r+1}, \dots, P_n qui sont constantes.

Démonstration. La fonction M_r est de pente 1 sur les intervalles où P_1 est de pente 1 et elle est de pente 0 sur ceux où P_n est de pente 1 (puisque $r < n$). Les points de $[q_0, \infty)$ en lesquels la pente de M_r passe de 1 à 0 forment donc une suite non bornée. Les intervalles maximaux de convexité de M_r sont les intervalles $[s, s']$ bornés par deux points consécutifs de cette sorte. Pour ces intervalles, la propriété 1) du lemme est automatique. De plus, P_{r+1} est de pente 1 à droite de s et P_r est de pente 1 à gauche de s' . Comme $r \geq 2$, cela implique que P_1, \dots, P_{r-1} sont de pente 0 à droite de s et à gauche de s' . La même chose s'applique aux sommes $M_i = P_1 + \dots + P_i$ pour $i = 1, \dots, r-1$. Donc, P_1 n'est pas convexe sur $[s, s']$ si et seulement si elle n'est pas constante sur cet intervalle. C'est le cas pour une infinité d'intervalles $[s, s']$ car ceux-ci forment une partition de $[q_0, \infty)$ et P_1 n'est pas bornée. Fixons un tel intervalle. Alors, pour $i = 1, \dots, r-1$, la fonction M_i n'est pas constante sur $[s, s']$, donc pas convexe. Par suite elle passe de la pente 1 à la pente 0 en un point $t_i \in (s, s')$ et on en déduit

$$P_{i+1}(s) \leq P_{i+1}(t_i) = P_i(t_i) \leq P_i(s').$$

Donc la propriété 2) est satisfaite elle aussi. \square

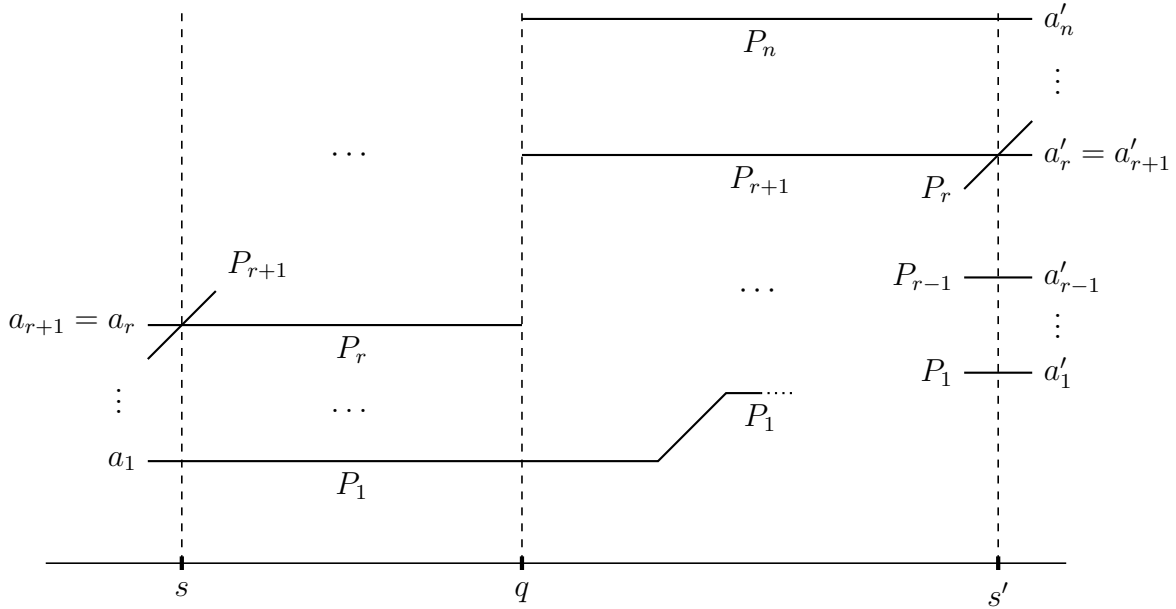


FIGURE 1. Graphique conjoint de \mathbf{P} sur un intervalle maximal de convexité $[s, s']$ de M_r sur lequel P_1 n'est pas convexe.

Si on interprète les composantes P_1, \dots, P_n de \mathbf{P} comme les positions de n joueurs de ballon sur une ligne en fonction du temps (voir le cours 3), alors P_{r+1}, \dots, P_n se partagent le ballon du temps s à un temps q où l'un d'eux fait une passe arrière à P_1 . Comme le ballon doit revenir à P_r à la fin de l'intervalle, il faut qu'entre q et s' , le joueur P_1 aille porter le ballon à P_2 , puis que plus tard P_2 aille le porter à P_3 , et ainsi de suite pour chacun des joueurs P_1, \dots, P_{r-1} . La position finale de chacun de ces joueurs P_i au temps s' est donc supérieure ou égale à celle qu'occupait le joueur P_{i+1} au temps s . Sur la figure 1, cela se traduit par les inégalités $a'_i \geq a_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, r-1$.

Démonstration du théorème 4.1, partie 1). On suppose au contraire que les inégalités (4.1) admettent un nombre fini de solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ avec $\rho = \rho_m$. Alors, il existe une constante c telle que tout point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n avec $\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \delta$ satisfasse

$$(4.5) \quad \log |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| > c - \rho \log \|\mathbf{x}\|.$$

On choisit un intervalle $[s, s']$ comme au lemme 4.5, avec s arbitrairement grand. On note q le point de (s, s') où M_r change de pente de 0 à 1, et on pose

$$a_i = P_i(s) \quad \text{et} \quad a'_i = P_i(s') \quad \text{pour } i = 1, \dots, n,$$

comme illustré sur la figure 1. En vertu du lemme 4.5 et du choix de $r = n - m$, on a

$$(4.6) \quad a'_{r+1} = a'_r,$$

$$(4.7) \quad s' = a'_1 + \dots + a'_n \geq a'_1 + \dots + a'_{r-1} + (m+1)a'_r \geq a_2 + \dots + a_r + (m+1)a'_r,$$

$$(4.8) \quad q = a_1 + \dots + a_r + a'_{r+1} + \dots + a'_n \geq a_1 + \dots + a_r + ma'_r,$$

$$(4.9) \quad q - s \geq P_{r+1}(q) - P_{r+1}(s) = a'_r - a_r.$$

Le lemme 4.3 appliqué au point s' fournit un point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n avec

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \delta, \quad \log \|\mathbf{x}\| \leq a'_r + c_1 \quad \text{et} \quad \log |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq a'_r - s' + c_1.$$

grâce à (4.6). Pour ce point l'inégalité (4.5) se traduit donc par

$$a'_r - s' + c_1 \geq c - \rho(a'_r + c_1) \quad \implies \quad (\rho + 1)a'_r \geq s' + \mathcal{O}(1).$$

Grâce à (4.7), on en déduit

$$(4.10) \quad (\rho - m)a'_r \geq a_2 + \dots + a_r + \mathcal{O}(1).$$

Comme $\rho \in (m, m+1)$, cela implique, grâce à (4.9), que $q - s$ tend vers l'infini avec s . Comme M_r est constante sur $[s, q]$, le lemme 4.3 s'applique à cet intervalle pour s assez grand et fournit un point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n avec

$$\text{dist}(\mathbf{x}, V) \leq \delta, \quad \log \|\mathbf{x}\| \leq a_r + c_2 \quad \text{et} \quad \log |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq a_r - q + c_2.$$

Pour ce point l'inégalité (4.5) se traduit donc par

$$a_r - q + c_2 \geq c - \rho(a_r + c_2) \quad \implies \quad (\rho + 1)a_r \geq q + \mathcal{O}(1).$$

Grâce à (4.8) puis à (4.10), on en déduit

$$(4.11) \quad (\rho + 1)a_r \geq a_1 + \dots + a_r + ma'_r + \mathcal{O}(1) \geq a_1 + \left(1 + \frac{m}{\rho - m}\right)(a_2 + \dots + a_r) + \mathcal{O}(1).$$

Comme $m/(\rho - m) = \rho$ et que $a_1 = P_1(s)$ tend vers l'infini avec s , c'est une contradiction.

Conséquences pour la partie 2) du théorème 4.1. L'argument ci-dessus montre que pour construire un contre-exemple à la partie 1) avec $\rho > \rho_m$ proche de ρ_m , il faut que, sur chacun des intervalles $[s, s']$, les nombres $a'_r = a'_{r+1}, \dots, a'_n$ soient comparables à $(\rho/m)a_r$ et beaucoup plus grands que a_1, \dots, a_{r-1} .

Cela suggère de choisir une suite de nombres positifs $(a_i)_{i \geq 1}$ qui croît arbitrairement vite et de chercher pour contre-exemple un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n tel que le graphe conjoint de $\mathbf{L}_\mathbf{u}$ épouse celui de la fonction $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n): [s_1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ illustré sur la figure 2, avec les propriétés

$$\tilde{P}_1(q) \leq \dots \leq \tilde{P}_n(q) \quad \text{et} \quad \tilde{P}_1(q) + \dots + \tilde{P}_n(q) = q$$

pour tout $q \geq s_1$. Cette fonction n'est pas un n -système mais on peut l'approcher à différence bornée près par un n -système en procédant comme au cours 3, section 5. On y reviendra au cours 5.

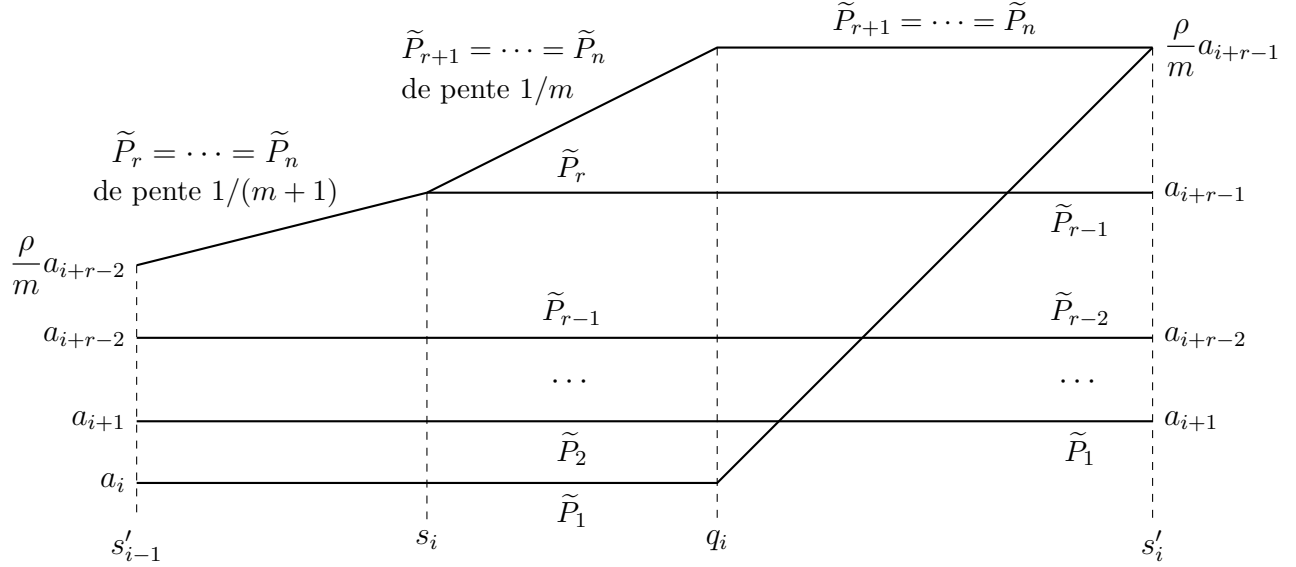


FIGURE 2. Graphe conjoint d'une fonction $\tilde{\mathbf{P}}$.

REFERENCES

- [BL2010] Y. Bugeaud, M. Laurent, On transfer inequalities in Diophantine approximation, II *Math. Z.* **265** (2010), 249–262.
- [BK2009] Y. Bugeaud and S. Kristensen, Diophantine exponents for mildly restricted approximation, *Ark. Mat.* **47** (2009), 243–266.
- [Ch2021] J. Champagne, Approximation diophantienne avec contrainte d'angles, M.Sc. thesis, University of Ottawa, 2021, 102 pages; <http://hdl.handle.net/10393/42504>.
- [CR2023] J. Champagne and D. Roy, Diophantine approximation with constraints, *Acta Arith.* **207** (2023), 57–99.
- [La2009b] M. Laurent, On transfer inequalities in Diophantine approximation, in: *Analytic Number Theory, Essays in honour of Klaus Roth*, Cambridge U. Press (2009), 306–314.
- [Mo2012] N. Moshchevitin, Positive integers: counterexample to W. M. Schmidt's conjecture, *Mosc. J. Comb. Number Theory* **2** (2012), 151–172.
- [Ro2014] D. Roy, Diophantine approximation with sign constraints, *Monatsh. Math.* **173** (2014), 417–432.
- [Ro2015] D. Roy, On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers, *Ann. of Math.* **182** (2015), 739–786.
- [Sc1967] W. M. Schmidt, On heights of algebraic subspaces and Diophantine approximations, *Ann. of Math.* **85** (1967), 430–472.
- [Sc1976] W. M. Schmidt, Two questions in Diophantine approximation, *Monatsh. Math.* **82** (1976), 237–245.
- [Sc1983] W. M. Schmidt, Open problems in Diophantine approximation, In: *Diophantine approximations and transcendental numbers (Luminy, 1982)*, 271–287, Progr. Math. **31**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [Th1990] P. Thurnheer, On Dirichlet's theorem concerning Diophantine approximation, *Acta Arith.* **54** (1990), 241–250.