

COURS 3: THÉORÈME PRINCIPAL ET APPLICATIONS

1. Graphe conjoint.

Soit $\mathbf{P} := (P_1, \dots, P_n): [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un n -système. Le *graphe conjoint* de \mathbf{P} sur un sous-intervalle I de $[q_0, \infty)$ est l'union des graphes de P_1, \dots, P_n sur I . Comme on va voir, il est plus simple que le graphe de chacune de ses composantes. C'est une autre belle observation de Schmidt et Summerer que Nikolay Moshchevitin exprime joliment en disant qu'elle permet de raisonner en deux dimensions sur des problèmes en n dimensions!

a) *Comportement local.* Rappelons d'abord que chaque composante P_j de \mathbf{P} est continue et affine par morceaux de pentes 0 et 1 avec

$$0 \leq P_1(q) \leq \dots \leq P_n(q) \quad \text{et} \quad P_1(q) + \dots + P_n(q) = q \quad \text{pour tout } q \geq q_0.$$

On en déduit que, pour chaque $q \geq q_0$, il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que P_1, \dots, P_n aient pente constante 0 ou 1 sur $[q, q + \epsilon]$. La somme de ces pentes étant égale à 1, il existe un unique indice k tel que P_k ait pente 1 sur $[q, q + \epsilon]$ tandis que les autres composantes sont constantes sur cet intervalle. De même si $q > q_0$, il existe $\epsilon > 0$ et un indice ℓ tels que P_ℓ ait pente 1 sur $[q - \epsilon, q]$, tandis que les autres composantes sont constantes sur cet intervalle.

La figure 1 montre les différentes possibilités pour le graphe conjoint de \mathbf{P} sur un intervalle $[q - \epsilon, q + \epsilon]$ avec $q > q_0$ et $\epsilon > 0$ assez petit.

- Si $k < \ell$, la fonction P_k passe de la pente 0 à la pente 1 au point q , tandis que P_ℓ passe de la pente 1 à la pente 0 en ce point. Les autres composantes de \mathbf{P} sont constantes sur $[q - \epsilon, q + \epsilon]$ quoique certaines puissent être confondues (égales sur tout l'intervalle). En particulier, P_1, \dots, P_{k-1} sont constantes sur l'intervalle et par suite $M_k = P_1 + \dots + P_k$ passe de la pente 0 à la pente 1 au point q . Donc, si $k < \ell$, le point q est un point d'échange de \mathbf{P} .

- Si $k = \ell$, la fonction $P_k = P_\ell$ est de pente 1 sur $[q - \epsilon, q + \epsilon]$, tandis que les autres composantes de \mathbf{P} sont constantes sur cet intervalle. Dans ce cas, la fonction \mathbf{P} est différentiable au point q , et les sommes $M_j = P_1 + \dots + P_j$ sont de pente constante sur tout l'intervalle. C'est la situation générique.

- Enfin, si $k > \ell$, la fonction P_ℓ passe de la pente 1 à la pente 0 au point q , tandis que P_k passe de la pente 0 à la pente 1. Les autres composantes de \mathbf{P} sont constantes sur $[q - \epsilon, q + \epsilon]$. Alors pour $j = \ell, \dots, k - 1$, la somme $M_j = P_1 + \dots + P_j$ passe de la pente 1 à la pente 0 au point q et par suite $P_j(q) = P_{j+1}(q)$. Comme dans le cas où $k = \ell$, le graphe conjoint de \mathbf{P} sur l'intervalle est la réunion d'un segment de droite oblique de pente 1 et d'au plus $n - 1$ segments de droite horizontaux.

b) *Interprétation sous forme de jeu de ballon.* Comme l'ont remarqué Luca Ghidelli et Martin Rivard-Cooke, lorsque $q_0 = 0$, on peut voir \mathbf{P} comme la fonction des positions de n joueurs de ballon P_1, \dots, P_n qui se déplacent sur une ligne droite, en fonction du temps $q \geq 0$, en suivant les règles suivantes.

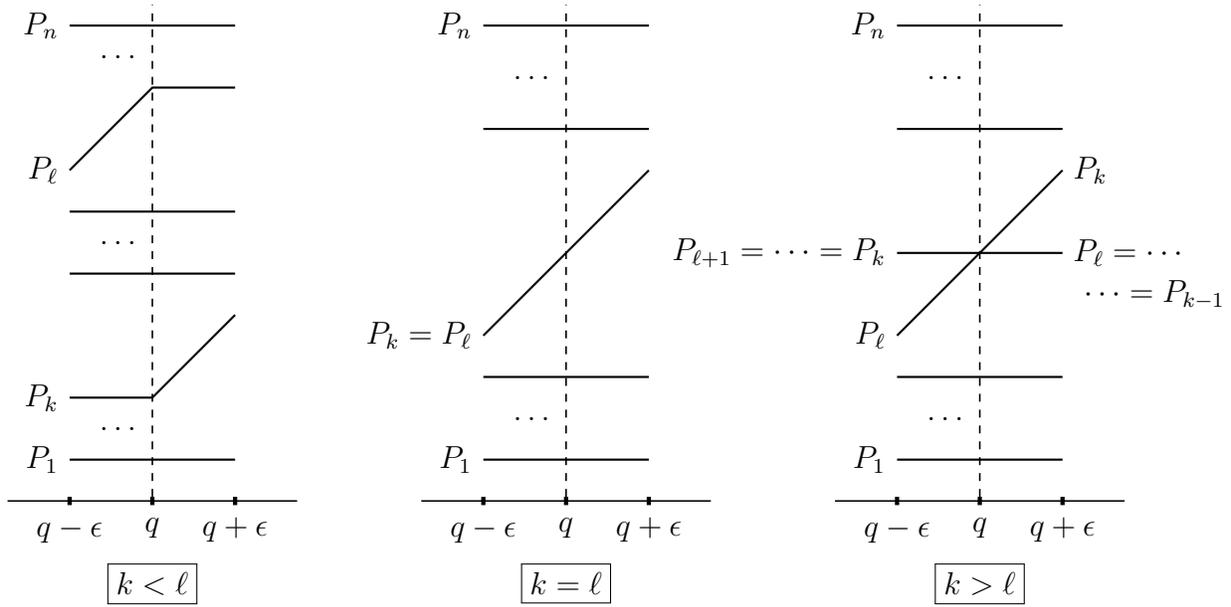


FIGURE 1. Graphe conjoint de \mathbf{P} sur $[q - \epsilon, q + \epsilon]$.

Règles du jeu

- Au temps $q = 0$, les joueurs occupent la position 0.
- Ils conservent toujours le même ordre $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_n$. Aucun ne peut en dépasser un autre.
- En tout temps, seul le joueur qui a la balle peut bouger et alors il court à vitesse constante égale à 1.
- Le joueur qui a la balle peut seulement la passer à un joueur qui est derrière lui ou à un joueur qu'il a rejoint. Il ne peut pas faire de longue passe avant.

Dans ce modèle idéalisé, les passes arrières se font instantanément. Les moments q auxquels elles ont lieu sont les points d'échange de \mathbf{P} . Dans les notations de la figure 1, cela correspond au graphe de gauche avec $k < \ell$. Dans ce cas, le joueur P_ℓ fait une passe arrière au joueur P_k (par dessus les joueurs P_j avec $k < j < \ell$). Le graphe central représente la situation où P_k court avec le ballon tandis que les autres joueurs sont immobiles. Enfin le graphe de droite montre P_ℓ qui court avec le ballon rejoindre $P_{\ell+1}, \dots, P_k$ immobiles à l'attendre tous au même endroit. Il les rejoint au temps q . Alors le ballon passe aux mains de P_k qui part avec, laissant derrière lui les joueurs P_ℓ, \dots, P_{k-1} exactement là où a eu lieu l'échange.

Dans le cas général, on peut donner la même interprétation pour la fonction \mathbf{P} sauf qu'on demande qu'au temps $q = q_0$ la somme des positions des joueurs soit égale à q_0 . Alors, en tout temps $q \geq q_0$, cette somme vaut q .

c) *Cas d'un système rigide.* Supposons maintenant que \mathbf{P} soit rigide de maille $\delta > 0$ et notons $(q_i)_{0 \leq i < s}$ la suite des points d'échange de \mathbf{P} . En termes de la partie de balle, cela signifie qu'aux moments des passes arrières q_i , les joueurs occupent des positions distinctes,

multiples positifs de δ . Sur l'intervalle (q_i, q_{i+1}) entre deux points d'échange consécutifs, il n'y a pas de passe arrière. On imagine une remontée du ballon porté par un ou plusieurs joueurs successivement. L'ensemble des positions des joueurs ne change pas sauf pour celui qui porte la balle de sorte que le graphe conjoint sur $[q_i, q_{i+1}]$ consiste d'exactlyement $n - 1$ segments de droite horizontaux et d'un segment oblique de pente 1 comme l'illustre la figure 2 pour $n = 6$.

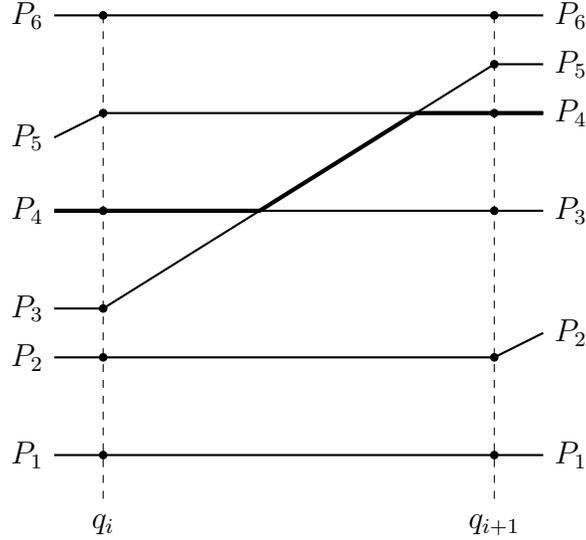


FIGURE 2. Exemple de graphe conjoint au voisinage de $[q_i, q_{i+1}]$ pour $n = 6$, avec le graphe de P_4 en traits gras.

d) *Points idéaux.* Sur la figure 2, on a fait ressortir en gras le graphe de P_4 . On voit qu'il change deux fois de pentes sur $[q_i, q_{i+1}]$, passant successivement de la pente 0 à la pente 1, puis à la pente 0. Cette complexité des graphes individuels des composantes de \mathbf{P} s'explique en général si on imagine, pour chaque i avec $1 \leq i < s$, une base $\underline{\mathbf{x}}^{(i)} = (\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)})$ de \mathbb{Z}^n dont l'union des trajectoires épouse le graphe conjoint de \mathbf{P} sur $[q_i, q_{i+1}]$ avec un écart petit relativement à δ . Cela signifie que, pour chaque $q \in [q_i, q_{i+1}]$, il existe une permutation de $(\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)})$ qui réalise à peu de différence près les minima de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$, mais que cette permutation varie avec q .

Dans la situation de la figure 2, supposons que $(\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_6^{(i)})$ réalise dans l'ordre une bonne approximation des minima de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$ en $q = q_i$. Alors, sur presque tout $[q_i, q_{i+1}]$, la trajectoire de $\mathbf{x}_3^{(i)}$ est oblique de pente 1 tandis que celle des autres points est horizontale. Donc, à gauche du point $q = q_{i+1}$, c'est la permutation $(\mathbf{x}_1^{(i)}, \mathbf{x}_2^{(i)}, \mathbf{x}_4^{(i)}, \mathbf{x}_5^{(i)}, \mathbf{x}_3^{(i)}, \mathbf{x}_6^{(i)})$ qui approxime dans l'ordre les minima de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$. Passé q_{i+1} , la trajectoire de $\mathbf{x}_3^{(i)}$ demeure de pente 1 et par suite s'écarte du graphe conjoint. Pour la prochaine base $\underline{\mathbf{x}}^{(i+1)}$ associée à l'intervalle $[q_{i+1}, q_{i+2}]$ (en supposant $i + 2 < s$), on doit donc remplacer le point $\mathbf{x}_3^{(i)}$. En mettant les choses aux mieux, on pourrait conserver les autres points de sorte que la nouvelle base $\underline{\mathbf{x}}^{(i+1)} = (\mathbf{x}_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_3^{(i+1)}})$ satisfasse

$$(\mathbf{x}_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_5^{(i+1)}}, \dots, \mathbf{x}_6^{(i+1)}) = (\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_3^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_6^{(i)}).$$

Sur $[q_{i+1}, q_{i+2}]$, c'est la trajectoire de $\mathbf{x}_2^{(i+1)} = \mathbf{x}_2^{(i)}$ qui change de pente de 0 à 1, et ainsi de suite. La figure 3 illustre cette hypothèse. On y reviendra plus tard.

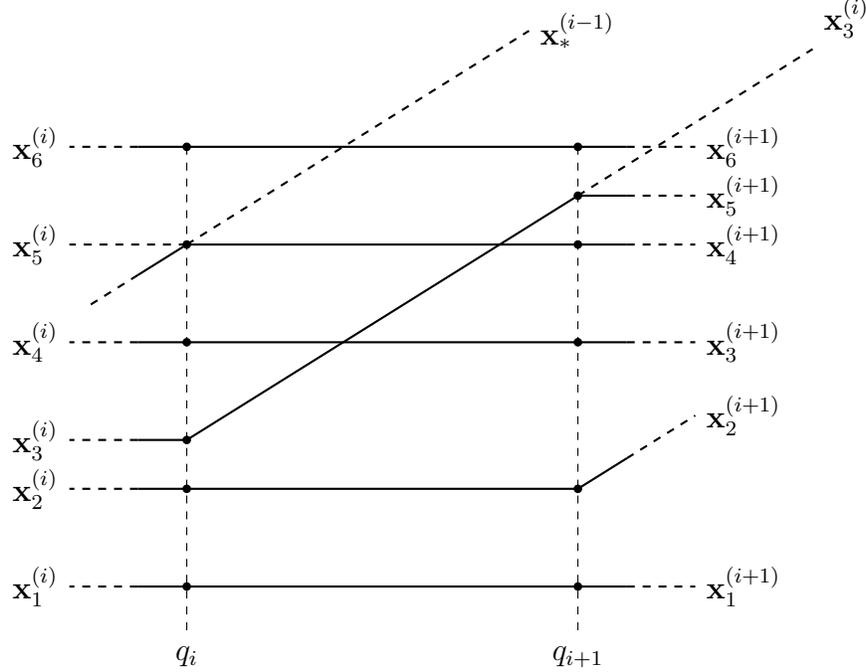


FIGURE 3. Trajectoires de points idéaux.

2. Canevas. Référence: [Ro2015, §1]

On note

$$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq \dots \leq x_n\}$$

l'ensemble des n -uplets de nombres réels en ordre croissant, et

$$\Phi_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \Delta_n$$

la fonction qui envoie tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n sur sa permutation dans Δ_n .

Définition 2.1. Soit $\delta \in (0, \infty)$. Un *canevas de maille δ* dans \mathbb{R}^n est un triplet de suites

$$(\mathbf{a}^{(i)})_{0 \leq i < s}, \quad (k_i)_{0 \leq i < s}, \quad (\ell_i)_{0 \leq i < s}$$

de même cardinalité $s \in \{\infty, 1, 2, 3, \dots\}$ tel que, pour tout indice i avec $0 \leq i < s$, on ait

(C1) $\mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}) \in \Delta_n$ avec $0 < a_1^{(i)} < \dots < a_n^{(i)}$ multiples de δ ,

(C2) $k_i, \ell_i \in \{1, \dots, n\}$ avec $1 \leq k_0 \leq \ell_0 = n$ et $1 \leq k_i < \ell_i \leq n$ si $i \geq 1$,

(C3) si $i + 1 < s$, alors $\ell_{i+1} \geq k_i$, $a_{\ell_{i+1}}^{(i+1)} \geq a_{k_i}^{(i)} + \delta$ et

$$(a_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{a_{\ell_{i+1}}^{(i+1)}}, \dots, a_n^{(i+1)}) = (a_1^{(i)}, \dots, \widehat{a_{k_i}^{(i)}}, \dots, a_n^{(i)}).$$

Ainsi, dans la suite $(\mathbf{a}^{(i)})_{0 \leq i < s}$, chaque point $\mathbf{a}^{(i+1)}$ d'indice $1 \leq i+1 < s$ est obtenu à partir du point précédant $\mathbf{a}^{(i)}$ en remplaçant une de ses coordonnées par un multiple plus grand de δ , différent des autres coordonnées de $\mathbf{a}^{(i)}$, puis en réordonnant le nouveau n -tuplet. Cette suite détermine uniquement la suite $(k_i)_{0 \leq i < s}$ sauf son dernier élément k_{s-1} si $s < \infty$. Par contre, elle détermine la suite $(\ell_i)_{0 \leq i < s}$ toute entière grâce à la convention $\ell_0 = n$. Dans la condition (C3), on peut remplacer la contrainte $a_{\ell_{i+1}}^{(i+1)} \geq a_{k_i}^{(i)} + \delta$ par la condition équivalente $a_{\ell_{i+1}}^{(i+1)} \geq a_{\ell_{i+1}}^{(i)} + \delta$.

Exemple 2.2. Un canevas de cardinalité $s = 3$ dans \mathbb{R}^5 :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}^{(0)} = (1, 2, 4, \underline{5}, \overline{8}), & \mathbf{a}^{(1)} = (1, \underline{2}, 4, \overline{7}, 8), & \mathbf{a}^{(2)} = (\underline{1}, 4, \overline{5}, 7, 8), \\ k_0 = 4, & k_1 = 2, & k_2 = 1, \\ \ell_0 = 5, & \ell_1 = 4, & \ell_2 = 3. \end{array}$$

Dans chaque 5-uplet $\mathbf{a}^{(i)}$, on a souligné sa coordonnée d'indice k_i et surligné celle d'indice ℓ_i .

Les observations de la section précédente se traduisent ainsi.

Proposition 2.3. *Soit $\delta \in (0, \infty)$. On a une bijection*

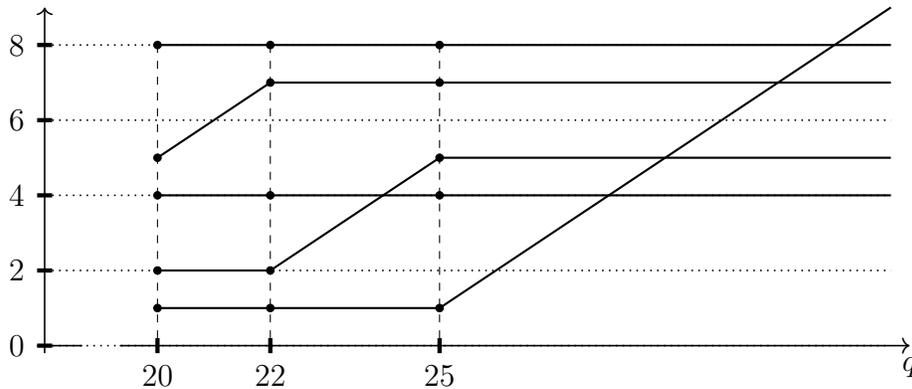
$$\{\text{canevas de maille } \delta \text{ dans } \mathbb{R}^n\} \longrightarrow \{n\text{-systèmes de maille } \delta\}$$

qui procède comme suit. Le n -système associé à un canevas comme dans la définition 2.1 a pour points d'échange la suite des nombres $q_i = a_1^{(i)} + \dots + a_n^{(i)}$ avec $0 \leq i < s$. C'est la fonction $\mathbf{R}: [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par

$$\mathbf{R}(q) = \Phi_n(a_1^{(i)}, \dots, \widehat{a_{k_i}^{(i)}}, \dots, a_n^{(i)}, a_{k_i}^{(i)} + q - q_i) \quad (0 \leq i < s, q_i \leq q < q_{i+1}),$$

avec la convention que $q_s = \infty$ si $s < \infty$.

Exemple 2.4. Le 5-système \mathbf{R} qui correspond au canevas de l'exemple 2.2 admet les points d'échange $q_0 = 20$, $q_1 = 22$ et $q_2 = 25$. La figure ci-dessous montre son graphe conjoint.



3. Théorème principal.

Le résultat suivant reprend [Ro2015, Theorem 1.3] et répond au problème formulé au cours 2, section 2. On suppose $n \geq 2$.

Théorème 3.1. *Soit $\delta > 0$.*

1) *Pour tout vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n , il existe un n -système rigide $\mathbf{R}: [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de maille δ tel que la différence $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{R}$ soit bornée sur $[q_0, \infty)$.*

2) *Réciproquement, pour tout n -système rigide $\mathbf{R}: [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de maille δ , il existe un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n tel que $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{R}$ soit bornée sur $[q_0, \infty)$.*

En vertu du théorème de Schmidt et Summerer démontré au cours 2, la partie 1) du théorème 3.1 découle de l'énoncé suivant.

Proposition 3.2. *Soit $\mathbf{P}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un (n, γ) -système pour un nombre $\gamma \geq 0$ et soit $\delta > 0$. Il existe un n -système rigide $\mathbf{R}: [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de maille δ tel que $\mathbf{P} - \mathbf{R}$ soit borné sur $[q_0, \infty)$.*

Le cas général est démontré en deux étapes dans [Ro2015, §§6–7]. Le cas particulier démontré ci-dessous reprend la même idée en plus simple.

Démonstration de la proposition 3.2 lorsque $\gamma = 0$ et $\delta = 1$. Alors, $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ est simplement un n -système sur $[0, \infty)$. Soit

$$\Delta_+ = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n; 0 < a_1 < \dots < a_n\}$$

l'ensemble des n -uplets strictement croissants d'entiers positifs. On commence par approcher \mathbf{P} par la fonction $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_n): [0, \infty) \rightarrow \Delta_+$ définie, pour tout $q \geq 0$, par

$$\begin{aligned} E_1(q) &= \lfloor P_1(q) \rfloor + 1, \\ E_{j+1}(q) &= \max\{E_j(q) + 1, \lfloor P_{j+1}(q) \rfloor + 1\} \quad (1 \leq j < n). \end{aligned}$$

On note que

$$(3.1) \quad P_j(q) \leq E_j(q) \leq P_j(q) + j \quad (q \geq 0, 1 \leq j \leq n),$$

donc

$$(3.2) \quad \|\mathbf{P}(q) - \mathbf{E}(q)\|_\infty \leq n \quad (q \geq 0).$$

Il reste maintenant à approcher \mathbf{E} par un n -système rigide de maille 1.

Comme chaque P_j est continue et affine par morceaux de pentes 0 et 1, sa partie entière $\lfloor P_j \rfloor$ admet au plus une discontinuité sur tout sous-intervalle de $[0, \infty)$ de longueur < 1 . Par suite, \mathbf{E} admet au plus n discontinuités sur un tel intervalle. En particulier les discontinuités de \mathbf{E} forment un sous-ensemble discret de $[0, \infty)$. Comme \mathbf{E} n'est pas borné, cet ensemble est infini. Soit

$$0 = c_0 < c_1 < c_2 < \dots$$

la suite croissante formée de 0 et des discontinuités de \mathbf{E} . Comme \mathbf{E} est continue à droite, elle est continue en $c_0 = 0$ et constante sur l'intervalle $[c_{i-1}, c_i)$ pour chaque $i \geq 1$. On pose

$$q_i = E_1(c_i) + \dots + E_n(c_i) \quad (i \geq 0).$$

Comme $\mathbf{E}(0) = (1, 2, \dots, n)$, on a $q_0 = \binom{n+1}{2}$. On va montrer qu'il existe un et un seul n -système $\mathbf{R}: [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{R}(q_i) = \mathbf{E}(c_i)$ pour chaque $i \geq 0$, qu'il est rigide de maille 1 et que $\|\mathbf{R}(q) - \mathbf{P}(q)\| \leq q_0 + 3n$ pour tout $q \geq q_0$. De plus, ses points d'échange forment une sous-suite de $(q_i)_{i \geq 0}$.

Fixons un indice $i \geq 1$. Comme \mathbf{P} est un n -système, il existe un et un seul indice $k = k_{i-1}$ pour lequel P_k est de pente 1 immédiatement à gauche de c_i . Les autres composantes de \mathbf{P} étant constantes sur un court intervalle $[c_i - \epsilon, c_i]$ à gauche de c_i , cette composante P_k est la seule source de discontinuité de \mathbf{E} au point c_i . Donc $P_k(c_i)$ est forcément l'entier $E_k(c_{i-1})$, la valeur constante de E_k sur $[c_{i-1}, c_i]$. Soit $\ell = \ell_i$ l'indice maximal avec $k \leq \ell \leq n$ pour lequel $E_k(c_{i-1}), \dots, E_\ell(c_{i-1})$ forment une suite d'entiers consécutifs. On trouve que

$$E_j(c_i) = \begin{cases} E_j(c_{i-1}) + 1 & \text{si } k \leq j \leq \ell, \\ E_j(c_{i-1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$(E_1(c_i), \dots, \widehat{E_\ell(c_i)}, \dots, E_n(c_i)) = (E_1(c_{i-1}), \dots, \widehat{E_k(c_{i-1})}, \dots, E_n(c_{i-1})), \\ E_\ell(c_i) = E_k(c_{i-1}) + \ell - k + 1,$$

et $q_i = q_{i-1} + \ell - k + 1$. On note $\mathbf{R}_i: [q_{i-1}, q_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction donnée par

$$\mathbf{R}_i(q) = \Phi_n(E_1(c_{i-1}), \dots, \widehat{E_k(c_{i-1})}, \dots, E_n(c_{i-1}), E_k(c_{i-1}) + q - q_{i-1}) \quad (q_{i-1} \leq q \leq q_i).$$

Elle satisfait $\mathbf{R}_i(q_{i-1}) = \mathbf{E}(c_{i-1})$ et $\mathbf{R}_i(q_i) = \mathbf{E}(c_i)$.

Les fonctions \mathbf{R}_i avec $i \geq 1$ se recollent en une fonction continue $\mathbf{R}: [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont les composantes sont affines par morceaux de pentes 0 et 1. Pour montrer que c'est un n -système, il suffit d'établir que $k_i \leq \ell_i$ pour chaque $i \geq 1$, de sorte que le graphe conjoint de \mathbf{R} sur un intervalle petit autour de q_i soit comme sur la figure 1.

Pour cela, on fixe de nouveau un entier $i \geq 1$. On pose $k = k_{i-1}$, $\ell = \ell_i$ et $m = k_i$. On va montrer que $m \leq \ell$. Si $\ell = n$, c'est automatique. Supposons donc $\ell < n$. En vertu du choix de ℓ , on a $E_{\ell+1}(c_{i-1}) \geq E_\ell(c_{i-1}) + 2$, donc $E_{\ell+1}(c_{i-1}) = \lfloor P_{\ell+1}(c_{i-1}) \rfloor + 1$ et par suite pour tout $q \in [c_{i-1}, c_{i+1})$, on obtient

$$P_{\ell+1}(q) \geq P_{\ell+1}(c_{i-1}) \geq E_\ell(c_{i-1}) + 1 \geq E_\ell(q) > P_\ell(q).$$

Donc, la somme $M_\ell = P_1 + \dots + P_\ell$ est convexe sur $[c_{i-1}, c_{i+1})$. Comme P_k est de pente 1 à gauche de c_i , on en déduit que M_ℓ est de pente 1 sur $[c_i, c_{i+1})$ et par suite les fonctions P_j avec $j > \ell$ sont constantes sur $[c_i, c_{i+1})$. Donc on a forcément $m \leq \ell$, comme annoncé.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que \mathbf{R} est le seul n -système sur $[q_0, \infty)$ tel que $\mathbf{R}(q_i) = \mathbf{E}(c_i)$ pour chaque $i = 0$. L'analyse qui précède montre que ses points d'échanges sont q_0 et les q_i avec $i \geq 1$ et $k_i < \ell_i$. En ces points on a $\mathbf{R}(q_i) \in \Delta_+$, donc \mathbf{R} est rigide de maille 1.

Enfin, pour tout $i \geq 0$, les inégalités (3.1) appliquées en $q = c_i$ livrent

$$\sum_{j=1}^n P_j(c_i) < \sum_{j=1}^n E_j(c_i) \leq \sum_{j=1}^n (P_j(c_i) + j).$$

On en déduit que $c_i < q_i \leq c_i + q_0$, puis que

$$\|\mathbf{P}(q_i) - \mathbf{R}(q_i)\|_\infty = \|\mathbf{P}(q_i) - \mathbf{E}(c_i)\|_\infty \leq \|\mathbf{P}(q_i) - \mathbf{P}(c_i)\|_\infty + \|\mathbf{P}(c_i) - \mathbf{E}(c_i)\|_\infty \leq q_0 + n,$$

grâce à (3.2). Comme $q_{i+1} - q_i = \ell_{i+1} - k_i + 1 \leq n$, on conclut que, pour tout $q \in [q_i, q_{i+1}]$, on a

$$\|\mathbf{P}(q) - \mathbf{R}(q)\|_\infty = \|\mathbf{P}(q) - \mathbf{P}(q_i)\|_\infty + \|\mathbf{P}(q_i) - \mathbf{R}(q_i)\|_\infty + \|\mathbf{R}(q_i) - \mathbf{R}(q)\|_\infty \leq q_0 + 3n. \quad \square$$

Le triplet de suites $((\mathbf{E}(c_i))_{i \geq 0}, (k_i)_{i \geq 0}, (\ell_i)_{i \geq 0})$ (avec $\ell_0 = n$) qui apparaît dans l’argument ci-dessus satisfait les conditions d’un canevas de maille 1, sauf pour (C2) qui doit être remplacée par la condition plus faible

(C2*) $k_i, \ell_i \in \{1, \dots, n\}$ avec $1 \leq k_i \leq \ell_i \leq n$ et $\ell_0 = n$.

On dit que c’est un *pré-canevas*. On obtient un canevas de maille 1 en retirant les indices $i > 0$ pour lesquels $k_i = \ell_i$. Alors, les formules de la proposition 2.3 fournissent le même n -système rigide \mathbf{R} tant pour ce canevas que pour le pré-canevas.

En vertu de la proposition 3.2, on peut supposer δ arbitrairement grand pour la preuve de la partie 2) du théorème 3.1. Cela utilise précisément le cas particulier où $\gamma = 0$ démontré ci-dessus (on se ramène facilement au cas où $\delta = 1$). On remet à plus tard la démonstration de cette partie 2). On va d’abord donner un exemple d’application du théorème.

4. Exposants d’approximation.

Soit \mathbf{u} un point non nul de \mathbb{R}^n pour un entier $n \geq 2$.

- On note $\alpha(\mathbf{u})$ (resp. $\widehat{\alpha}(\mathbf{u})$) le suprémum des nombres réels α tels que les conditions

$$(4.1) \quad \|\mathbf{x}\| \leq Q \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}\| \leq Q^{-\alpha}$$

admettent une solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ pour des valeurs de Q arbitrairement grandes (resp. pour toute valeur de Q assez grande).

- On note $\omega(\mathbf{u})$ (resp. $\widehat{\omega}(\mathbf{u})$) le suprémum des nombres réels ω tels que les conditions

$$(4.2) \quad \|\mathbf{x}\| \leq Q \quad \text{et} \quad |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| \leq Q^{-\omega}$$

admettent une solution non nulle $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ pour des valeurs de Q arbitrairement grandes (resp. pour toute valeur de Q assez grande).

Ces nombres sont des invariants projectifs de \mathbf{u} : ils ne dépendent que de la classe de \mathbf{u} dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. On peut donc supposer $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Pour un point non nul $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$, le nombre $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}\|$ représente l’aire du parallélogramme engendré par \mathbf{u} et \mathbf{x} . Donc $\|\mathbf{x}\|^{-1} \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}\|$ est le sinus de l’angle aigu entre \mathbf{u} et la droite $E = \langle \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}}$. Par ailleurs, $\|\mathbf{x}\|^{-1} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}|$ est le sinus de l’angle aigu entre \mathbf{u} et l’hyperplan E^\perp perpendiculaire à \mathbf{x} . Ainsi les nombres $\alpha(\mathbf{u})$ et $\widehat{\alpha}(\mathbf{u})$ sont des mesures d’approximation de \mathbf{u} par les sous-espaces de \mathbb{R}^n définis sur \mathbb{Q} de dimension 1 tandis que $\omega(\mathbf{u})$ et $\widehat{\omega}(\mathbf{u})$ sont des mesures d’approximation de \mathbf{u} par les sous-espaces de \mathbb{R}^n définis sur \mathbb{Q} de dimension $n - 1$. Motivés par les travaux de Schmidt dans [Sc1967], Laurent [La2009b] puis Bugeaud et Laurent [BL2010] ont généralisé ces paires d’exposants en toute dimension d avec $1 \leq d \leq n - 1$ (voir le cours 4).

Les invariants sans chapeau sont appelés *exposants de meilleure approximation* et ceux avec chapeau, *exposants uniformes d’approximation*. La notation “chapeau” a été introduite par Bugeaud et Laurent dans [BL2005]. Par contre, l’emploi du symbole α est une suggestion de Schmidt. Comme α et ω sont respectivement la première et la dernière lettre de l’alphabet grec, cela souligne le fait que les exposants d’approximation notés de cette façon proviennent de problèmes duaux.

On note d’abord les inégalités suivantes qui remontent à Dirichlet.

Lemme 4.1. On a $\frac{1}{n-1} \leq \widehat{\alpha}(\mathbf{u}) \leq \alpha(\mathbf{u})$ et $n-1 \leq \widehat{\omega}(\mathbf{u}) \leq \omega(\mathbf{u})$.

Démonstration. Si $\alpha < 1/(n-1)$, le volume du convexe symétrique de \mathbb{R}^n défini par les conditions (4.1) tend vers l'infini avec Q . Alors, pour tout Q assez grand, ce convexe contient un point entier non nul. La même remarque s'applique au convexe symétrique de \mathbb{R}^n défini par (4.2) si $\omega < n-1$. \square

Les exposants $\alpha(\mathbf{u})$ et $\omega(\mathbf{u})$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. Khintchine a obtenu des inégalités générales qui lient ces nombres. Elles impliquent par exemple que $\alpha(\mathbf{u}) = 1/(n-1)$ si et seulement si $\omega(\mathbf{u}) = n-1$. On va voir que les inégalités de Khintchine décrivent en fait le *spectre* du couple d'exposants (α, ω) , c'est-à-dire l'ensemble des couples $(\alpha(\mathbf{u}), \omega(\mathbf{u}))$ associés aux points \mathbf{u} de \mathbb{R}^n à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . On peut aussi demander que \mathbf{u} soit unitaire. Cela ne change rien.

On connaît aussi le spectre des paires $(\widehat{\alpha}, \widehat{\omega})$, $(\alpha, \widehat{\alpha})$ et $(\omega, \widehat{\omega})$ grâce aux travaux de Jarník, German, Marnat et Moshchevitin [Ge2012, Ma2016, MM2020]. Le spectre des quatre exposants $(\alpha, \widehat{\alpha}, \omega, \widehat{\omega})$ est connu en dimension $n = 3$ grâce à Laurent [La2009a], mais c'est un problème ouvert pour $n \geq 4$.

La géométrie paramétrique des nombres est un outil puissant pour le calcul des spectres d'exposants d'approximation. Cela découle du résultat suivant qui transpose à notre contexte les formules (1.8) et (1.9) de [SS2013].

Lemme 4.2 (Schmidt et Summerer, 2013). Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ avec $\|\mathbf{u}\| = 1$. On a

$$(4.3) \quad \omega(\mathbf{u}) = \frac{1}{\varphi_1(\mathbf{u})} - 1, \quad \widehat{\omega}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\bar{\varphi}_1(\mathbf{u})} - 1,$$

$$(4.4) \quad \alpha(\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{\bar{\varphi}_n(\mathbf{u})} - 1 \right)^{-1}, \quad \widehat{\alpha}(\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{\varphi_n(\mathbf{u})} - 1 \right)^{-1}.$$

où $\varphi_j(\mathbf{u}) = \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathbf{u},j}(q)}{q}$ et $\bar{\varphi}_j(\mathbf{u}) = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathbf{u},j}(q)}{q}$ pour $j = 1, \dots, n$.

Démonstration. Soient $Q > 1$ et $\omega \geq 0$. On pose $q = \log(Q^{\omega+1})$ de sorte que

$$\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\mathbf{x}\| \leq 1 \text{ et } |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| \leq Q^{-\omega-1} \}.$$

Alors les conditions (4.2) admettent une solution non nulle \mathbf{x} dans \mathbb{Z}^n

$$\iff \lambda_1(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)) \leq Q \iff L_{\mathbf{u},1}(q) \leq \frac{q}{\omega+1} \iff \frac{L_{\mathbf{u},1}(q)}{q} \leq \frac{1}{\omega+1}.$$

On en déduit les formules (4.3) pour $\omega(\mathbf{u})$ et $\widehat{\omega}(\mathbf{u})$.

Pour l'autre paire d'exposants, on note (exercice) que les familles de convexes symétriques

$$\mathcal{K}(X, Y) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\mathbf{x}\| \leq X \text{ et } |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| \leq Y^{-1} \},$$

$$\mathcal{K}^*(Y, X) := \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n ; \|\mathbf{y}\| \leq Y \text{ et } |\mathbf{u} \wedge \mathbf{y}| \leq X^{-1} \}$$

de paramètres $X, Y \geq 1$ sont essentiellement duales au sens où il existe une constante $c_1 = c_1(n) > 1$ telle que

$$c_1^{-1} \mathcal{K}^*(Y, X) \subseteq \mathcal{K}(X, Y)^* \subseteq c_1 \mathcal{K}^*(Y, X) \quad (X, Y \geq 1).$$

En vertu du théorème de dualité de Mahler, il existe donc $c_2 = c_2(n) > 1$ telle que

$$(4.5) \quad c_2^{-1} \leq \lambda_1(\mathcal{K}^*(Y, X))\lambda_n(\mathcal{K}(X, Y)) \leq c_2 \quad (X, Y \geq 1)$$

Par définition, $\alpha(\mathbf{u})$ (resp. $\widehat{\alpha}(\mathbf{u})$) est le suprémum des $\alpha \geq 0$ tels que

$$\lambda_1(\mathcal{K}^*(Q, Q^\alpha)) \leq 1$$

pour des valeurs de Q arbitrairement grandes (resp. pour toute valeur de Q assez grande). Ces quantités ne changent pas si on remplace cette condition par

$$\lambda_1(\mathcal{K}^*(Q, Q^\alpha)) \leq Q^{o(Q)}$$

où $o(Q)$ désigne une fonction qui tend vers 0 lorsque $Q \rightarrow \infty$. Grâce aux estimations (4.5), elles ne changent donc pas si on la remplace par

$$\lambda_n(\mathcal{K}(Q^\alpha, Q)) \geq 1.$$

En posant $q = \log(Q^{\alpha+1})$, on trouve que cette dernière condition est équivalente à

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} \leq \frac{L_{\mathbf{u}, n}(q)}{q},$$

et on en déduit les formules (4.4). □

Exercice 4.1. Montrer que les nombres $\alpha(\mathbf{u})$, $\widehat{\alpha}(\mathbf{u})$, $\omega(\mathbf{u})$ et $\widehat{\omega}(\mathbf{u})$ ne changent pas si on remplace \mathbf{u} par $T(\mathbf{u})$ pour un opérateur linéaire $T \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$. En particulier, ces exposants ne changent pas si on permute les coordonnées de \mathbf{u} .

Exercice 4.2. Supposons $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ avec $u_1 = 1$ (on peut se ramener à cette situation en permutant les coordonnées de \mathbf{u} puis en multipliant \mathbf{u} par une constante non nulle). Montrer alors que, dans la définition des exposants $\alpha(\mathbf{u})$ et $\widehat{\alpha}(\mathbf{u})$, on peut remplacer la condition (4.1) sur $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ par

$$|x_1| \leq Q \quad \text{et} \quad \max_{2 \leq i \leq n} |x_1 u_i - x_i| \leq Q^{-\alpha}.$$

De même, dans la définition des exposants $\omega(\mathbf{u})$ et $\widehat{\omega}(\mathbf{u})$, on peut remplacer la condition (4.2) par

$$\max_{2 \leq i \leq n} |x_i| \leq Q \quad \text{et} \quad |x_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n| \leq Q^{-\omega}.$$

Exercice 4.3. Montrer que si $n \geq 3$ et si une des coordonnées de $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ est linéairement dépendante des autres sur \mathbb{Q} , disons u_n , alors le point $\mathbf{u}' = (u_1, \dots, u_{n-1})$ de \mathbb{R}^{n-1} obtenu en retirant à \mathbf{u} cette coordonnée satisfait $\alpha(\mathbf{u}') = \alpha(\mathbf{u})$ et $\widehat{\alpha}(\mathbf{u}') = \widehat{\alpha}(\mathbf{u})$. Pour ce genre de raison, on se limite généralement aux points \mathbf{u} à coordonnées linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} .

Exercice 4.4. Supposons que les coordonnées de \mathbf{u} soient linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Montrer que $\alpha(\mathbf{u})$ est le suprémum des nombres α pour lesquels il existe une infinité de points $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nuls avec $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|^{-\alpha}$, et que $\omega(\mathbf{u})$ est le suprémum des nombres ω pour lesquels il existe une infinité de points $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nuls avec $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|^{-\omega}$.

5. Spectre des exposants de meilleure approximation.

Pour toute fonction $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n) : [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, on définit

$$\varphi_j(\mathbf{P}) = \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{P_j(q)}{q} \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_j(\mathbf{P}) = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_j(q)}{q} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Ainsi, pour un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n , on a

$$\varphi_j(\mathbf{u}) = \varphi_j(\mathbf{L}_{\mathbf{u}}) \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_j(\mathbf{u}) = \bar{\varphi}_j(\mathbf{L}_{\mathbf{u}}) \quad (1 \leq j \leq n).$$

Lemme 5.1. *Le spectre de (α, ω) est*

$$\left\{ \left(\left(\frac{1}{\bar{\varphi}_n(\mathbf{u})} - 1 \right)^{-1}, \frac{1}{\varphi_1(\mathbf{u})} - 1 \right) ; \mathbf{P} \text{ est un } n\text{-système avec } P_1 \text{ non bornée} \right\}.$$

Démonstration. Pour un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n et un n -système $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ avec $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ borné, on a

$$\varphi_j(\mathbf{u}) = \varphi_j(\mathbf{P}) \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_j(\mathbf{u}) = \bar{\varphi}_j(\mathbf{P}) \quad (1 \leq j \leq n).$$

De plus, si P_1 est borné, alors $L_{\mathbf{u},1}$ l'est aussi, disons par une constante c . Alors, pour tout $q \geq 0$, il existe un point non nul \mathbf{x} de \mathbb{Z}^n avec $\|\mathbf{x}\| \leq e^c$ et $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| \leq e^{-q}$. Comme il y a un nombre fini de points entiers non nuls de norme au plus e^c , on conclut qu'il en existe un pour lequel $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$. Donc les coordonnées de \mathbf{u} sont linéairement dépendantes sur \mathbb{Q} . La réciproque est claire. La conclusion découle donc des formules du lemme 4.2 et du fait que l'ensemble des fonctions $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$ avec \mathbf{u} unitaire coïncide avec l'ensemble des n -systèmes modulo les fonctions bornées. \square

Lemme 5.2. *Soit \mathbf{P} un n -système. On a*

- (1) $0 \leq \varphi_1(\mathbf{P}) \leq \bar{\varphi}_n(\mathbf{P}) \leq 1$,
- (2) $(n-1)\varphi_1(\mathbf{P}) + \bar{\varphi}_n(\mathbf{P}) \leq \varphi_1(\mathbf{P}) + (n-1)\bar{\varphi}_n(\mathbf{P})$.

Démonstration. On va seulement démontrer la première inégalité de la partie (2). Les autres se démontrent de manière semblable. Pour cela, on note d'abord que

$$(n-1)P_1(q) + P_n(q) \leq \sum_{j=1}^n P_j(q) = q \quad \implies \quad (n-1)\frac{P_1(q)}{q} + \frac{P_n(q)}{q} \leq 1$$

pour tout $q > 0$ dans l'intervalle de définition de \mathbf{P} . On choisit une suite croissante non bornée $(q_i)_{i \geq 1}$ telle que $P_n(q_i)/q_i$ converge vers $\bar{\varphi}_n(\mathbf{P})$ pour $i \rightarrow \infty$. Alors,

$$1 \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \left((n-1)\frac{P_1(q_i)}{q_i} + \frac{P_n(q_i)}{q_i} \right) = (n-1) \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{P_1(q_i)}{q_i} + \bar{\varphi}_n(\mathbf{P}) \geq (n-1)\varphi_1(\mathbf{P}) + \bar{\varphi}_n(\mathbf{P}).$$

\square

Le domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 décrit par les inégalités du lemme est le triangle dessiné sur la figure 4. On dit qu'il est *semi-algébrique* car il est défini par des inégalités algébriques. Il est aussi compact et connexe. Dans [Ro2017], on formule une notion générale d'exposants d'approximation et on montre que, dans ce cadre, tout spectre d'exposants est compact et connexe et qu'en dimension $n = 3$ il est aussi semi-algébrique. Par contre, cette dernière

propriété ne s'étend pas en dimension $n \geq 4$. On le montre dans [RR2020] en construisant une famille de cinq exposants exotiques en dimension 4 dont le spectre n'est pas semi-algébrique. On ne sait pas si le spectre de $(\alpha, \hat{\alpha}, \omega, \hat{\omega})$ est semi-algébrique en dimension 4.

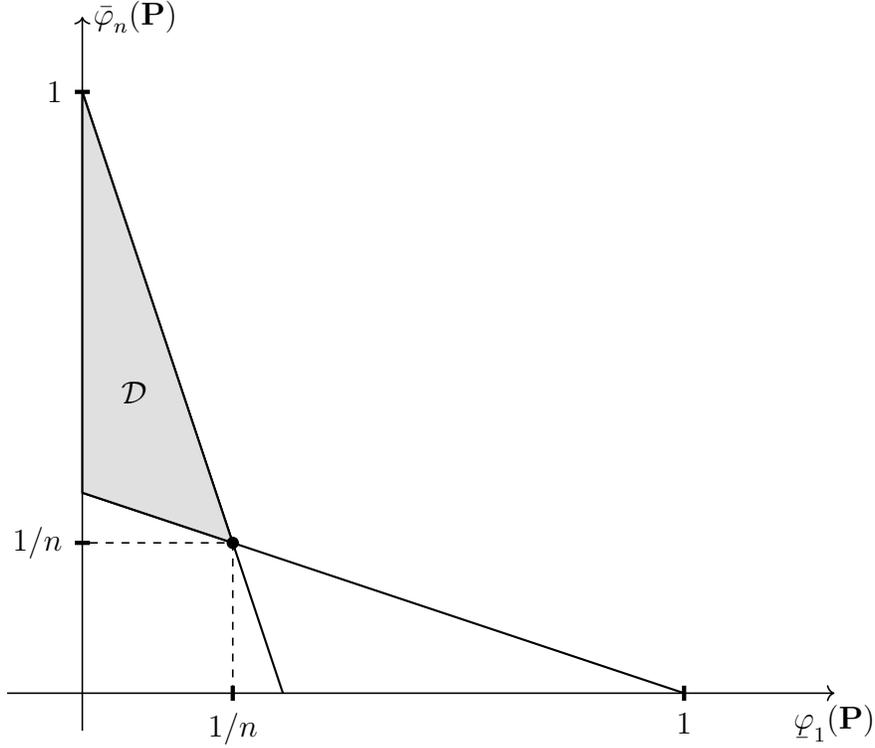


FIGURE 4. Spectre de $(\varphi_1, \bar{\varphi}_n)$ en dimension n

Lemme 5.3. *Le spectre de $(\varphi_1, \bar{\varphi}_n)$ est l'ensemble \mathcal{D} des points (a, b) de \mathbb{R}^2 avec*

$$0 \leq a \leq b \leq 1 \quad \text{et} \quad (n-1)a + b \leq 1 \leq a + (n-1)b.$$

Démonstration. Le lemme 5.2 montre que le spectre de $(\varphi_1, \bar{\varphi}_n)$ est contenu dans cet ensemble \mathcal{D} . Il reste à montrer que pour tout $(a, b) \in \mathcal{D}$, il existe un n -système $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ avec P_1 non bornée tel que $\varphi_1(\mathbf{P}) = a$ et $\bar{\varphi}_n(\mathbf{P}) = b$. On va le faire dans le cas où $0 < a < b < 1$, en laissant au lecteur le soin de traiter les cas $a = 0$ et $a = b = 1/n$. Dans notre cas, on a $na < 1 < nb$. On pose $q_1 = 1$ et on définit récursivement, pour $i \geq 1$,

$$r_i = \frac{q_i}{na}, \quad s_i = \frac{1-a}{1-b} r_i \quad \text{et} \quad q_{i+1} = nbs_i$$

de sorte que $q_i < r_i < s_i < q_{i+1}$ pour tout $i \geq 1$. Soit $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n): [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction dont le graphe conjoint sur $[q_i, q_{i+1}]$ est illustré sur la figure 5.

Cette fonction $\tilde{\mathbf{P}}$ est continue, ses composantes sont affines par morceaux de pentes 0, $1/(n-1)$ et 1, et elle satisfait

$$0 \leq \tilde{P}_1(q) \leq \dots \leq \tilde{P}_n(q) \quad \text{et} \quad \tilde{P}_1(q) + \dots + \tilde{P}_n(q) = q \quad \text{pour tout } q \geq 1.$$

Si $n \geq 3$, ce n'est pas un n -système mais c'est utile d'imaginer qu'elle donne la position de n joueurs $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ en fonction du temps q . Alors, le rapport $\tilde{P}_j(q)/q$ s'interprète comme

la vitesse moyenne de \tilde{P}_j sur l'intervalle $[0, q]$ (en supposant les joueurs à l'origine au temps 0), et la somme des vitesses moyennes des joueurs est 1 en tout temps.

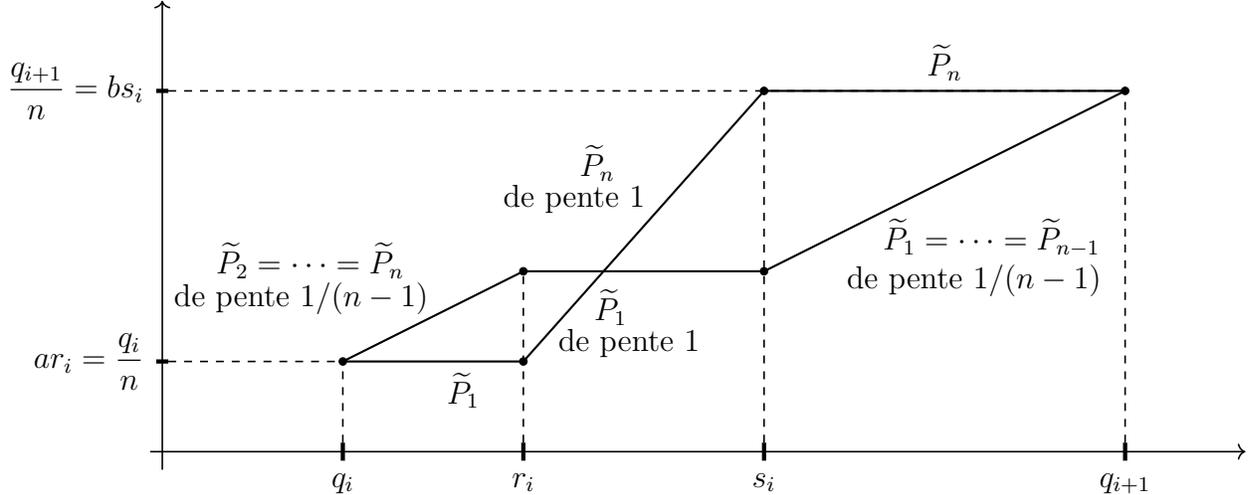


FIGURE 5. Graphe conjoint de $\tilde{\mathbf{P}}$ sur $[q_i, q_{i+1}]$

Au temps q_i , les joueurs occupent tous la même position q_i/n et leur vitesse moyenne s'établit à $1/n$. Puis $\tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n$ partent ensemble avec le ballon à la vitesse $1/(n-1)$ de sorte que la somme de leurs vitesses est 1. Ils courent ainsi jusqu'au temps $r_i = q_i/(an)$. Durant cet intervalle, leur vitesse moyenne augmente, mais celle de \tilde{P}_1 , resté sur place en q_i/n , diminue. Au temps r_i , la vitesse moyenne de \tilde{P}_1 est exactement a mais celle des autres est au plus b puisque la somme des vitesses moyennes est 1 et que $a + (n-1)b \geq 1$. A ce moment précis, $\tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n$ font une passe arrière à \tilde{P}_1 . Ils s'immobilisent et \tilde{P}_1 part avec le ballon à vitesse 1 jusqu'à ce qu'il les rejoigne, puis le ballon passe aux mains de \tilde{P}_n qui part seul à courir à vitesse 1 jusqu'au temps s_i tandis que les autres joueurs demeurent sur place. Durant l'intervalle de temps de r_i à s_i , la vitesse moyenne de \tilde{P}_n diminue puis augmente, tandis que celle de \tilde{P}_1 augmente puis diminue. Au temps s_i , la vitesse moyenne de \tilde{P}_n est exactement b et celle de $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_{n-1}$ est au moins a car $(n-1)a + b \leq 1$. A ce moment \tilde{P}_n renvoie la balle au groupe de joueurs immobiles. Il s'immobilise à son tour tandis que les autres joueurs $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_{n-1}$ partent le rejoindre en groupe avec le ballon à la vitesse $1/(n-1)$. Ils se rencontrent au point q_{i+1}/n au temps q_{i+1} . Durant cet intervalle la vitesse moyenne de \tilde{P}_n diminue donc celle des autres joueurs augmente. Au temps q_{i+1} , les n joueurs sont de nouveau ensemble, leur vitesse moyenne est $1/n$ et le cycle recommence.

Cette description montre que la vitesse moyenne du joueur \tilde{P}_1 est toujours au moins a et égale à a aux temps $q = r_i$ tandis que celle de \tilde{P}_n est toujours au plus b et égale à b aux temps $q = s_i$. Autrement dit la fonction $\tilde{\mathbf{P}}$ satisfait

$$\underline{\varphi}_1(\tilde{\mathbf{P}}) = a \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_n(\tilde{\mathbf{P}}) = b.$$

Enfin, il est facile de construire un n -système $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ dont la différence avec $\tilde{\mathbf{P}}$ est au plus 1 en norme du suprémum. La description en termes de jeu est presque la même, on demande seulement que les joueurs portent le ballon un à la fois. Par exemple, au lieu que

P_2, \dots, P_n courent ensemble du temps q_i au temps r_i , on partitionne $[q_i, r_i]$ en sous-intervalles de temps de durée (longueur) au plus 1. Au début de chaque sous-intervalle I , les $n - 1$ joueurs occupent la même position p . A ce moment P_n part avec le ballon à vitesse 1 pour une durée égale à $|I|/(n - 1)$ jusqu'à un point p' puis renvoie le ballon au groupe. Alors P_{n-1} s'en empare et court à son tour à vitesse 1 pour la même durée. Il rejoint alors P_n au point p' et renvoie le ballon aux joueurs restés derrière. On procède ainsi de suite $n - 1$ fois jusqu'à ce que tous les joueurs soient de nouveau ensemble au point p' à la fin de l'intervalle I . La figure 6 illustre la nouvelle fonction ainsi obtenue pour $n = 4$. Comme la différence $\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}$ est bornée, P_1 est non bornée et on a $\varphi_1(\mathbf{P}) = a$ et $\bar{\varphi}_n(\mathbf{P}) = b$ comme requis. \square

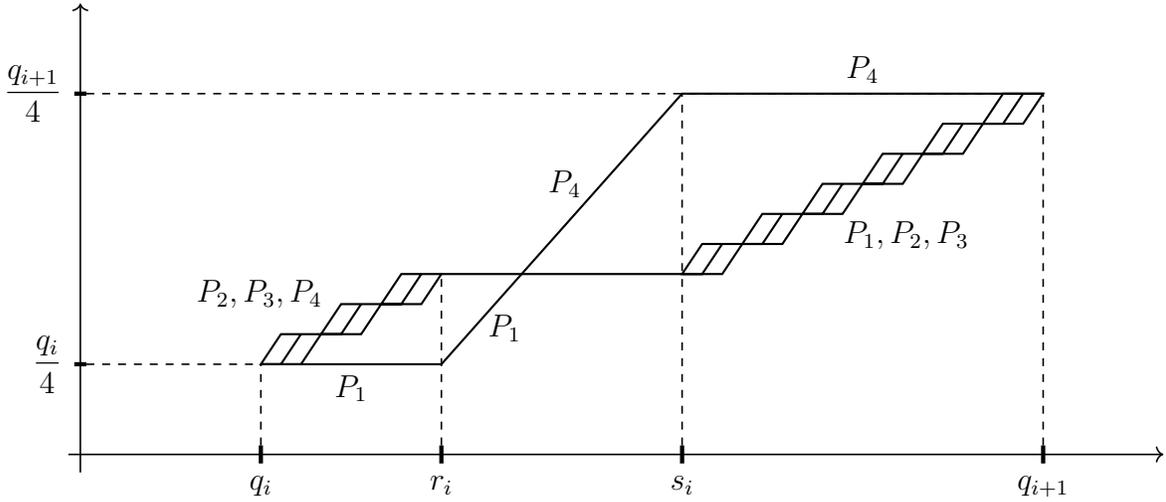


FIGURE 6. Approximation \mathbf{P} de $\tilde{\mathbf{P}}$ pour $n = 4$

La fonction $\tilde{\mathbf{P}}$ est un exemple de n -système généralisé au sens de [Ro2016, §4]. C'est aussi ce que Das, Fishman, Simmons et Urbański appellent un “ $1 \times (n - 1)$ template” [DFSU, Definition 2.1]; l'équivalence des définitions est expliquée dans [RR2020, §2]. Dans [Ro2016, §4], on montre comme ci-dessus que, pour tout n -système généralisé $\tilde{\mathbf{P}}$, il existe un n -système \mathbf{P} dont la différence avec $\tilde{\mathbf{P}}$ est bornée.

On note aussi que la fonction $\tilde{\mathbf{P}}$ construite ci-dessus satisfait $\tilde{\mathbf{P}}(\theta q) = \theta \tilde{\mathbf{P}}(q)$ pour tout $q \geq 1$, où $\theta = b(1 - a)/(a(1 - b)) > 1$. On dit qu'elle est *auto-similaire*. On en déduit

$$\frac{\tilde{\mathbf{P}}(\theta q)}{\theta q} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}(q)}{q} \quad (q \geq 1).$$

Donc $\varphi_1(\tilde{\mathbf{P}})$ est le minimum de $\tilde{P}_1(q)/q$ pour $q \in [1, \theta] = [q_1, q_2]$, et $\bar{\varphi}_n(\tilde{\mathbf{P}})$ est le maximum de $\tilde{P}_n(q)/q$ pour $q \in [q_1, q_2]$. On note de plus que les quotients $\tilde{P}_j(q)/q$ sont des fonctions monotones de q dans les intervalles où \tilde{P}_j est affine. Donc, $\varphi_1(\tilde{\mathbf{P}})$ est simplement le minimum de $\tilde{P}_1(q)/q$ avec $q \in \{q_1, r_1, s_1\}$ et $\bar{\varphi}_n(\tilde{\mathbf{P}})$, le maximum de $\tilde{P}_n(q)/q$ pour les mêmes q . Dans [Ro2017, §7], on montre que, pour toute famille finie d'exposants d'approximation, les points du spectre de la famille associés aux n -systèmes rigides auto-similaires sont denses dans le spectre de ces exposants. Comme ce spectre est compact (voir [Ro2017, §8]), on peut se limiter à ces fonctions particulières pour le calculer.

En combinant les lemmes 5.1 et 5.3, on obtient la description suivante du spectre de (α, ω) . On laisse les vérifications au lecteur.

Corollaire 5.4. *Pour tout point non nul \mathbf{u} de \mathbb{R}^n , on a*

$$(1') \quad n - 1 \leq \omega(\mathbf{u}) \leq \infty,$$

$$(2') \quad \frac{\omega(\mathbf{u})}{(n - 2)\omega(\mathbf{u}) + (n - 1)} \leq \alpha(\mathbf{u}) \leq \frac{\omega(\mathbf{u}) - (n - 2)}{n - 1}.$$

Ces inégalités, dues à Khintchine, décrivent le spectre de (α, ω) .

Quand $\omega(\mathbf{u}) = \infty$, la condition (2') s'interprète comme $1/(n - 2) \leq \alpha(\mathbf{u}) \leq \infty$.

REFERENCES

- [BL2005] Y. Bugeaud and M. Laurent, Exponents of Diophantine approximation and Sturmian continued fractions, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), 773–804.
- [BL2010] Y. Bugeaud, M. Laurent, On transfer inequalities in Diophantine approximation, II *Math. Z.* **265** (2010), 249–262.
- [DFSU] T. Das, L. Fishman, D. Simmons, and M. Urbański A variational principle in the parametric geometry of numbers, preprint, 115 pages; arXiv:1901.06602v4 [math.NT].
- [Ge2012] O. N. German, Intermediate Diophantine exponents and parametric geometry of numbers, *Acta Arith.* **154** (2012), 79–101.
- [La2009a] M. Laurent, Exponents of Diophantine approximation in dimension two, *Canad. J. Math.* **61** (2009), 165–189.
- [La2009b] M. Laurent, On transfer inequalities in Diophantine approximation, in: *Analytic Number Theory, Essays in honour of Klaus Roth*, Cambridge U. Press (2009), 306–314.
- [Ma2016] A. Marnat, About Jarník's-type relation in higher dimension, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **68** (2018) 131–150.
- [MM2020] A. Marnat and N. G. Moshchevitin, An optimal bound for the ratio between ordinary and uniform exponents of diophantine approximation, *Mathematika* **66** (2020), 818–854.
- [Ro2015] D. Roy, On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers, *Ann. of Math.* **182** (2015), 739–786.
- [Ro2016] D. Roy, Spectrum of the exponents of best rational approximation, *Math. Z.* **283** (2016), 143–155.
- [Ro2017] D. Roy, On the topology of Diophantine approximation Spectra, *Compositio Math.* **153** (2017), 1512–1546.
- [RR2020] M. Rivard-Cooke and D. Roy, Counter-examples in Parametric Geometry of Numbers, *Acta Arith.* **196.3** (2020), 303–323.
- [Sc1967] W. M. Schmidt, On heights of algebraic subspaces and Diophantine approximations, *Ann. of Math.* **85** (1967), 430–472.
- [SS2013] W. M. Schmidt and L. Summerer, Diophantine approximation and parametric geometry of numbers, *Monats. Math.* **169** (2013), 51–104.