

COURS 2: LE THÉORÈME DE SCHMIDT ET SUMMERER

Soient E un espace euclidien réel de dimension finie $n \geq 2$, Λ un réseau de E et \mathcal{C} un convexe symétrique de E . On note d'abord que, pour tout $T \in \text{GL}(E)$, on a

$$\lambda_i(\mathcal{C}, \Lambda) = \lambda_i(T(\mathcal{C}), T(\Lambda)) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Pour $E = \mathbb{R}^n$, on peut choisir T telle que $T(\Lambda) = \mathbb{Z}^n$.

1. Problème général.

Soit $\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ une base de \mathbb{R}^n . Pour tout $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit des parallélépipèdes $\mathcal{B}(\mathbf{q})$ et $\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{v}}}(\mathbf{q})$ de \mathbb{R}^n par

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{q}) &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_1| \leq e^{-q_1}, \dots, |x_n| \leq e^{-q_n}\}, \\ \mathcal{P}_{\underline{\mathbf{v}}}(\mathbf{q}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1| \leq e^{-q_1}, \dots, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n| \leq e^{-q_n}\}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{v}}}(\mathbf{q}) = T_{\underline{\mathbf{v}}}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbf{q})) = T_{\underline{\mathbf{v}, \mathbf{q}}}^{-1}(\mathcal{B}_\infty)$$

où $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}(0) = [-1, 1]^n$ est la boule unité de \mathbb{R}^n pour la norme du maximum et où $T_{\underline{\mathbf{v}}}$ et $T_{\underline{\mathbf{v}, \mathbf{q}}}$ sont les opérateurs linéaires sur \mathbb{R}^n donnés par

$$T_{\underline{\mathbf{v}}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n) \quad \text{et} \quad T_{\underline{\mathbf{v}, \mathbf{q}}}(\mathbf{x}) = (e^{q_1} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \dots, e^{q_n} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n),$$

Par suite on obtient les trois écritures suivantes des mêmes minima

$$(1.1) \quad \lambda_i(\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{v}}}(\mathbf{q})) := \lambda_i(\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{v}}}(\mathbf{q}), \mathbb{Z}^n) = \lambda_i(\mathcal{B}(\mathbf{q}), T_{\underline{\mathbf{v}}}(\mathbb{Z}^n)) = \lambda_i(\mathcal{B}_\infty, T_{\underline{\mathbf{v}, \mathbf{q}}}(\mathbb{Z}^n)) \quad (1 \leq i \leq n).$$

En systèmes dynamiques, on préfère la troisième écriture. Dans [SS2009] et [SS2013], Schmidt et Summerer utilisent plutôt la seconde écriture, tandis que [Ro2015] se base sur la première. Les différents points de vue sont questions de goût et chacun a son avantage.

Le but de la géométrie paramétrique des nombres est d'étudier les nombres (1.1) comme fonctions de \mathbf{q} dans un sous-ensemble \mathcal{S} de \mathbb{R}^n . Par exemple dans [Sc2020], Schmidt étudie le cas où

$$\mathcal{S} = \{(\nu_1 q, \dots, \nu_n q); q \geq 0\}$$

avec $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé. On pourrait aussi prendre

$$\mathcal{S} = \{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n; q_1 \geq \dots \geq q_n \geq 0\}$$

ou même $\mathcal{S} = [0, \infty)^n$.

Plus précisément, pour \mathcal{S} fixé, on définit

$$\begin{aligned} L_{\underline{\mathbf{v}}, i}: \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{q} &\longmapsto \log \lambda_i(\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{v}}}(\mathbf{q})) \quad (1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

Le problème fondamental de la théorie est de caractériser l'ensemble des fonctions

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\underline{\mathbf{v}}}: \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{q} &\longmapsto (L_{\underline{\mathbf{v}}, 1}(\mathbf{q}), \dots, L_{\underline{\mathbf{v}}, n}(\mathbf{q})) \end{aligned}$$

associées aux bases $\underline{\mathbf{v}}$ de \mathbb{R}^n modulo le groupe additif des fonctions bornées de \mathcal{S} dans \mathbb{R}^n .

2. Un cas particulier.

On va développer la théorie pour le choix de $\mathcal{S} = \{(q, 0, \dots, 0); q \geq 0\}$ comme c'est fait dans [Ro2015]. On a donc un seul paramètre q . On simplifie d'abord les notations en posant

$$\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{v}}}(q) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1| \leq e^{-q}, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2| \leq 1, \dots, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n| \leq 1\}$$

pour toute base $\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ de \mathbb{R}^n et tout $q \geq 0$. Puis on note que

$$\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{v}}}(q) \asymp \mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq e^{-q}, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$

où $\mathbf{u} = \|\mathbf{v}_1\|^{-1}\mathbf{v}_1$ est un vecteur unitaire parallèle à \mathbf{v}_1 . Comme les constantes implicites dans la notation \asymp ne dépendent pas de q , on est ramené à la question suivante.

Problème 2.1. Caractériser l'ensemble des fonctions

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{u}}: [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ q &\longmapsto (L_{\mathbf{u},1}(q), \dots, L_{\mathbf{u},n}(q)) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 et $L_{\mathbf{u},i}(q) = \log \lambda_i(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))$ ($1 \leq i \leq n$, $q \geq 0$), modulo le groupe additif des fonctions bornées de $[0, \infty)$ dans \mathbb{R}^n .

On note d'abord que, pour tout vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n et tout $q \geq 0$, on a

$$0 \leq L_{\mathbf{u},1}(q) \leq \dots \leq L_{\mathbf{u},n}(q)$$

car la suite des minima d'un convexe est croissante et que si $\lambda\mathcal{C}(q)$ contient un point entier non nul \mathbf{x} pour un nombre $\lambda > 0$, alors $\lambda \geq \|\mathbf{x}\| \geq 1$, donc $\lambda_1(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)) \geq 1$. Comme $\text{vol}(\mathcal{C}(q)) \asymp_n e^{-q}$, le théorème de Minkowski livre aussi

$$L_{\mathbf{u},1}(q) + \dots + L_{\mathbf{u},n}(q) = q + \mathcal{O}_n(1),$$

où $\mathcal{O}_n(1)$ représente une fonction de q de valeur absolue bornée par une constante qui ne dépend que de n .

3. Trajectoire d'un point.

On fixe un vecteur unitaire \mathbf{u} de \mathbb{R}^n . La trajectoire d'un point entier non nul $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ est la fonction $L_{\mathbf{x}}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$L_{\mathbf{x}}(q) := L(\mathbf{x}, q) := \min\{t \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \in e^t \mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)\} \quad (q \geq 0),$$

c'est-à-dire le logarithme de la norme de \mathbf{x} relative à $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$ (voir cours 1, §3). Comme

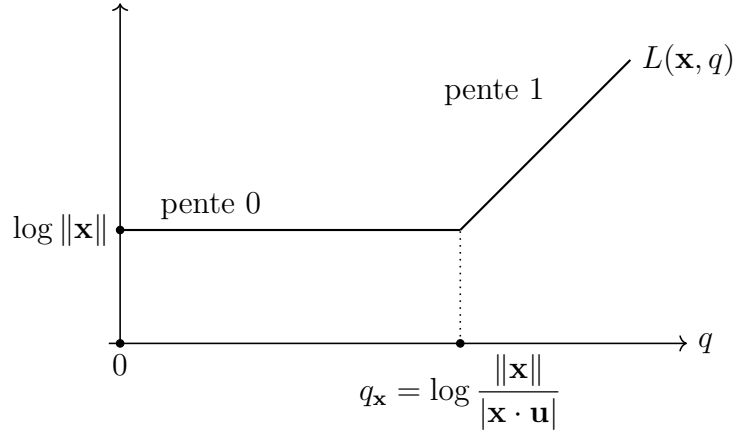
$$\mathbf{x} \in e^t \mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q) \iff \|\mathbf{x}\| \leq e^t \quad \text{et} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq e^{t-q},$$

on obtient la formule explicite

$$L(\mathbf{x}, q) = \max\{\log \|\mathbf{x}\|, q + \log |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|\} \quad (q \geq 0)$$

qui montre que $L_{\mathbf{x}}$ est une fonction continue, affine par morceaux et convexe, de pente 0 puis 1, qui change de pente au point $q_{\mathbf{x}} = \log(\|\mathbf{x}\|/|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|)$ si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \neq 0$, comme illustré sur la figure 1.

On rappelle qu'une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est *convexe* si elle satisfait la condition $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ quels que soient $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$. Pour une fonction continue et affine par morceaux sur un intervalle I , cette condition est remplie si et seulement si les pentes de f vont en croissant.

FIGURE 1. Trajectoire d'un point \mathbf{x} .

Suivant Schmidt et Summerer dans [SS2013], on utilise ce concept pour établir deux propriétés importantes des fonctions $L_{\mathbf{u},i}$.

Lemme 3.1. *Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. La fonction $L_{\mathbf{u},i}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et affine par morceaux de pentes 0 et 1.*

Démonstration. Fixons un nombre $b > 0$. Pour tout $q \in [0, b]$, on a

$$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in e^b \mathcal{C}_{\mathbf{u}}(b) \subseteq e^b \mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$$

où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{Z}^n$ sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n . On en déduit que $L_{\mathbf{u},i}(q) \leq b$ et par suite

$$L_{\mathbf{u},i}(q) = \min \left\{ \max\{L(\mathbf{x}_1, q), \dots, L(\mathbf{x}_i, q)\} ; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i \in \mathbb{Z}^n \text{ sont linéairement indépendants de norme au plus } e^b \right\}.$$

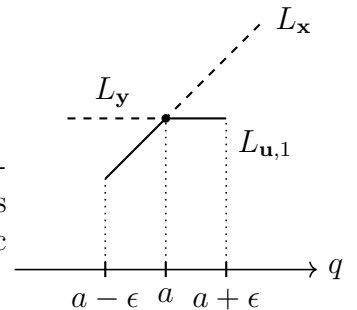
Comme \mathbb{Z}^n contient un nombre fini de points de norme au plus e^b , et que le maximum et le minimum de fonctions continues et affines par morceaux sur un même intervalle sont eux-aussi continues et affines par morceaux sur cet intervalle, avec les mêmes pentes, on conclut que $L_{\mathbf{u},i}$ est continue et affine par morceaux de pentes 0 et 1 sur $[0, b]$. Le choix de $b > 0$ étant arbitraire, cette propriété s'étend à tout $[0, \infty)$. \square

Lemme 3.2. *Si $L_{\mathbf{u},1}$ n'est pas convexe en un point $a > 0$, c'est-à-dire si elle passe de la pente 1 à la pente 0 au point a , alors $L_{\mathbf{u},1}(a) = L_{\mathbf{u},2}(a)$.*

Démonstration. Il existe $\epsilon > 0$ et des points non nuls \mathbf{x}, \mathbf{y} de \mathbb{Z}^n tels que

$$L_{\mathbf{u},1}(q) = \begin{cases} L(\mathbf{x}, q) & \text{si } a - \epsilon \leq q \leq a, \\ L(\mathbf{y}, q) & \text{si } a \leq q \leq a + \epsilon. \end{cases}$$

Donc $L_{\mathbf{x}}$ est de pente 1 sur $[a - \epsilon, \infty)$ et $L_{\mathbf{y}}$ est de pente 0 c'est-à-dire constante sur $[0, a + \epsilon]$. En particulier, $L_{\mathbf{x}} - L_{\mathbf{y}}$ n'est pas constante. Par suite \mathbf{x} et \mathbf{y} sont linéairement indépendants, donc $L_{\mathbf{u},2}(a) \leq \max\{L(\mathbf{x}, a), L(\mathbf{y}, a)\} = L_{\mathbf{u},1}(a)$ et la conclusion suit.

 \square

4. Contraintes additionnelles.

Pour étendre le lemme 3.2 aux autres minima, on applique le théorème de Mahler aux puissances extérieures de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$ comme font Schmidt et Summerer dans [SS2013]. On commence par donner des approximations de celles-ci, comme dans [Ro2015, §2] et dans [PR2023, §7].

Pour chaque $k = 1, \dots, n$, il existe une et une seule application bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \bigwedge^k \mathbb{R}^n &\longrightarrow \bigwedge^{k-1} \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{y}, X) &\longmapsto \mathbf{y} \lrcorner X \end{aligned}$$

appelée *contraction* telle que

$$(4.1) \quad \mathbf{y} \lrcorner (\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{x}_i} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$$

quels que soient $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Si $k = 1$, c'est simplement le produit scalaire $\mathbf{y} \lrcorner \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ de \mathbb{R}^n . On pose

$$\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q) = \{X \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n; \|X\| \leq 1 \text{ et } \|\mathbf{u} \lrcorner X\| \leq e^{-q}\} \quad (q \geq 0).$$

En particulier, pour tout $q \geq 0$, on a

$$(4.2) \quad \mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(1)}(q) = \mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(n)}(q) = \{X \in \bigwedge^n \mathbb{R}^n; \|X\| \leq e^{-q}\}.$$

La seconde formule découle du fait que $\|\mathbf{u} \lrcorner X\| = \|X\|$ pour tout $X \in \bigwedge^n \mathbb{R}^n$.

Bien que la définition des convexes symétriques $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q)$ donnée ici soit sensiblement différente de celle de [Ro2015, §2.4], on peut montrer sans peine que, pour $Q = e^q$, ils coïncident avec les convexes notés $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(Q)$ dans ce texte.

On rappelle que, par définition, $(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))^{(k)}$ est l'enveloppe convexe dans $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ des produits de k éléments de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$. Le lemme suivant compare celle-ci à $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q)$.

Lemme 4.1. *Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et soit $q \geq 0$. On a*

$$(4.3) \quad N^{-1} \mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q) \subseteq (\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))^{(k)} \subseteq k \mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q) \quad \text{où} \quad N = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Pour démontrer la première inclusion, on choisit une base orthonormée $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ de \mathbb{R}^n qui commence par $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$. Un point $X \in \mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q)$ s'écrit

$$X = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} \mathbf{u}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{i_k}$$

avec coefficients $a_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$. Par définition de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q)$, on a

$$\begin{aligned} 1 \geq \|X\| &= \left(\sum a_{i_1, \dots, i_k}^2 \right)^{1/2} \geq \max\{|a_{i_1, \dots, i_k}|; 1 \leq i_1 < \cdots < i_k\}, \\ e^{-q} \geq \|\mathbf{u} \lrcorner X\| &= \left(\sum_{i_1=1} a_{i_1, \dots, i_k}^2 \right)^{1/2} \geq \max\{|a_{1, i_2, \dots, i_k}|; 1 < i_2 < \cdots < i_k\}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout choix d'entiers $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, le convexe symétrique $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$ contient les points $a_{i_1, \dots, i_k} \mathbf{u}_{i_1}$ et $\mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_k}$. Par définition, le convexe $(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))^{(k)}$ contient leur produit $a_{i_1, \dots, i_k} \mathbf{u}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{i_k}$. Donc, il contient $N^{-1}X$.

Soit $X = \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$ le produit de k éléments $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$. On trouve

$$\|X\| \leq \|\mathbf{x}_1\| \cdots \|\mathbf{x}_k\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u} \lrcorner X\| \leq \sum_{i=1}^k |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_i| \|\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{x}}_i \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k\| \leq ke^{-q},$$

donc $X \in k\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q)$. Cela implique la seconde inclusion de (4.3). \square

Pour $j = 1, \dots, N$, on définit

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{u},j}^{(k)}: [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \log \lambda_j(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q), \Lambda^{(k)}) \end{aligned}$$

où $\Lambda^{(k)} = (\mathbb{Z}^n)^{(k)} = \langle \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k}; 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \rangle_{\mathbb{Z}}$. Ce réseau $\Lambda^{(k)}$ s'identifie donc à \mathbb{Z}^N , en identifiant $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ à \mathbb{R}^N via l'isométrie qui applique tout élément de $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ sur le N -uplet de ses coordonnées dans la base $(\mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$ dans l'ordre lexicographique.

Le théorème 4.6 de Mahler présenté au cours 1 permet d'estimer les minima de $(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))^{(k)}$ par rapport à $\Lambda^{(k)}$ en termes de ceux de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$ par rapport à $\Lambda = \mathbb{Z}^n$. En particulier son corollaire 4.7 donne des estimations entièrement explicites pour le premier minimum de $(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))^{(k)}$ par rapport à $\Lambda^{(k)}$ ainsi que pour son second minimum si $k < n$. Comme le lemme 4.1 montre que $(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q))^{(k)} \asymp_n \mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q)$ pour tout $q \geq 0$ et tout $k = 1, \dots, n$ on en déduit la conséquence suivante.

Corollaire 4.2. *Il existe une constante $c_1 = c(n) > 0$ telle que, pour tout $q \geq 0$,*

$$(4.4) \quad L_{\mathbf{u},1}^{(k)}(q) = L_{\mathbf{u},1}(q) + \cdots + L_{\mathbf{u},k}(q) \pm c_1 \quad \text{pour } k = 1, \dots, n,$$

$$(4.5) \quad L_{\mathbf{u},2}^{(k)}(q) = L_{\mathbf{u},1}(q) + \cdots + L_{\mathbf{u},k-1}(q) + L_{\mathbf{u},k+1}(q) \pm c_1 \quad \text{pour } k = 1, \dots, n-1.$$

Ici, la notation $\pm c_1$ représente un terme d'erreur : la condition $a = b \pm c_1$ signifie $|a - b| \leq c_1$.

Par ailleurs, les considérations de la section 3 se généralisent aisément à la famille des convexes symétriques $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q)$ avec $q \in [0, \infty)$. La trajectoire d'un point non nul X de $\Lambda^{(k)}$ par rapport à cette famille est la fonction $L_X: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$L_X(q) = \min\{t \in \mathbb{R}; \mathbf{x} \in e^t \mathcal{C}_{\mathbf{u}}^{(k)}(q)\} = \max\{\log \|X\|, q + \log \|\mathbf{u} \lrcorner X\|\}$$

pour tout $q \geq 0$. Elle est continue, convexe et affine par morceaux de pentes 0 et 1. On en déduit de la même façon les conséquences suivantes.

Lemme 4.3. *Pour $j = 1, \dots, N$, la fonction $L_{\mathbf{u},j}^{(k)}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et affine par morceaux de pentes 0 et 1. Si $k < n$ et si $L_{\mathbf{u},1}^{(k)}$ n'est pas convexe en un point $q > 0$, alors $L_{\mathbf{u},1}^{(k)}(q) = L_{\mathbf{u},2}^{(k)}(q)$.*

Cela généralise les lemmes 3.1 et 3.2 car, pour $k = 1$, les égalités (4.2) impliquent

$$(4.6) \quad L_{\mathbf{u},j}^{(1)} = L_{\mathbf{u},j} \quad \text{pour } j = 1, \dots, n.$$

Par ailleurs, pour $k = n$, elles livrent

$$(4.7) \quad L_{\mathbf{u},1}^{(n)}(q) = q \quad \text{pour tout } q \geq 0.$$

Par suite, la fonction $L_{\mathbf{u},1}^{(n)}$ est convexe.

En combinant la seconde assertion du lemme 4.3 aux estimations du corollaire 4.2, on obtient la conséquence suivante.

Corollaire 4.4. *Soit c_1 comme dans le corollaire 4.2. Si $k < n$ et si $L_{\mathbf{u},1}^{(k)}$ n'est pas convexe en un point $a > 0$, alors $|L_{\mathbf{u},k+1}(a) - L_{\mathbf{u},k}(a)| \leq 2c_1$*

5. Le théorème de Schmidt et Summerer.

Les observations élégantes des sections précédentes sont dues à Schmidt et Summerer [SS2013, §2]. On les a seulement transposées sous une forme équivalente car ces auteurs travaillent plutôt avec la famille duale de convexes et une paramétrisation différente qui assure que leurs volumes soient bornés. Pour reformuler leur conclusion dans le contexte présent (celui de [Ro2015, §2]), on emploie la définition suivante adaptée de la leur.

Définition 5.1. Soient $\gamma, q_0 \geq 0$. Un (n, γ) -système sur l'intervalle $[q_0, \infty)$ est une fonction $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n) : [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui remplit les conditions suivantes.

- (S1) $-\gamma \leq P_k(q) \leq P_{k+1}(q) + \gamma \quad (1 \leq k < n, q_0 \leq q)$.
- (S2) $P_k(q_1) \leq P_k(q_2) + \gamma \quad (1 \leq k \leq n, q_0 \leq q_1 \leq q_2)$.
- (S3) Pour $k = 1, \dots, n$, la fonction $M_k := P_1 + \dots + P_k : [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et affine par morceaux de pentes 0 et 1.
- (S4) $M_n(q) = q \quad (q_0 \leq q)$.
- (S5) Si, pour un entier $k \in \{1, \dots, n-1\}$, la fonction M_k n'est pas convexe en un point $q > q_0$, alors $P_{k+1}(q) \leq P_k(q) + \gamma$.

En vertu de (S3), chaque composante P_k d'un (n, γ) -système est continue et affine par morceaux de pentes $-1, 0$ et 1 . Par contre pour $k = 1$ et $k = n$, elle ne prend jamais la pente -1 car M_0 et M_n ont des pentes constantes égales à 0 et 1 respectivement.

Théorème 5.2 (Schmidt–Summerer, 2013). *Soit $\gamma = 6c_1$ où $c_1 = c_1(n)$ est la constante du corollaire 4.2. Pour tout vecteur unitaire \mathbf{u} of \mathbb{R}^n , il existe un (n, γ) -système $\mathbf{P} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que*

$$(5.1) \quad \sup_{q \geq 0} \|\mathbf{P}(q) - \mathbf{L}_{\mathbf{u}}(q)\|_{\infty} \leq \gamma.$$

Démonstration. On pose $M_0 := 0$, puis on définit $M_k := L_{\mathbf{u},1}^{(k)}$ et $P_k = M_k - M_{k-1}$ pour $k = 1, \dots, n$. Les estimations (4.4) du corollaire 4.2 impliquent aussitôt

$$(5.2) \quad P_k(q) = L_{\mathbf{u},k}(q) \pm 2c_1 \quad (1 \leq k \leq n, q \geq 0).$$

Donc la fonction $\mathbf{P} := (P_1, \dots, P_n)$ remplit la condition (5.1). Il reste à voir qu'elle remplit les conditions (S1) à (S5) de la définition de (n, γ) -système sur $[0, \infty)$. Pour (S1) et (S2), cela découle sans peine de (5.2). En effet, pour tout $q \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} P_k(q) &\geq L_{\mathbf{u},k}(q) - 2c_1 \geq -2c_1, \\ P_k(q) &\leq L_{\mathbf{u},k}(q) + 2c_1 \leq L_{\mathbf{u},k+1}(q) + 2c_1 \leq P_{k+1}(q) + 4c_1 \end{aligned} \quad (1 \leq k < n),$$

tandis que pour $0 \leq q_1 \leq q_2$ on trouve

$$P_k(q_1) \leq L_{\mathbf{u},k}(q_1) + 2c_1 \leq L_{\mathbf{u},k}(q_2) + 2c_1 \leq P_k(q_2) + 4c_1 \quad (1 \leq k \leq n).$$

La première assertion du lemme 4.3 implique (S3) car $P_1 + \dots + P_k = M_k - M_0 = M_k = L_{\mathbf{u},1}^{(k)}$ pour $k = 1, \dots, n$. On en déduit (S4) grâce à la formule (4.7). Enfin, (S5) découle du corollaire 4.4 car si $1 \leq k < n$ et si $M_k = L_{\mathbf{u},1}^{(k)}$ n'est pas convexe en un point $q > 0$, alors

$$|P_{k+1}(q) - P_k(q)| \leq |L_{\mathbf{u},k+1}(q) - L_{\mathbf{u},k}(q)| + 4c_1 \leq 6c_1. \quad \square$$

6. Les n -systèmes.

La théorie précédente se généralise par exemple aux corps $K(T)$ des fonctions rationnelles en une variable sur un corps quelconque K pour la valeur absolue donnée par le degré $|p(T)/q(T)| = e^{-(\deg(p) - \deg(q))}$. Dans ce contexte le rôle de \mathbb{Z} est joué par l'anneau des polynômes $K[T]$ et celui de \mathbb{R} par le complété $K_\infty = K((1/T))$ de $K(T)$ pour la valeur absolue décrite ci-dessus. Dans ce cas, Mahler a démontré que les trois théorèmes de la géométrie des nombres présentés dans la section 4 du cours 1 deviennent des égalités. Dans ce contexte, la constante c_1 du corollaire 4.2 peut être prise égale à zéro et on en déduit que les fonctions $\mathbf{L}_\mathbf{u}$ avec $\mathbf{u} \in K_\infty^n$ de norme du maximum égale à 1 sont toutes des $(n, 0)$ -systèmes [RW2017].

Ce n'est pas le cas dans le contexte présent mais on voit par cet exemple que les $(n, 0)$ -systèmes représentent une situation idéale. Pour simplifier, on les appelle simplement les n -systèmes. Schmidt et Summerer les étudient au paragraphe 3 de leur papier [SS2013] et ils suggèrent au début du paragraphe 4 que le comportement des fonctions $\mathbf{L}_\mathbf{u}$ devrait pouvoir se déduire de celui des n -systèmes. Nous allons voir en fait que les deux familles de fonctions sont égales modulo les fonctions bornées.

On note d'abord comment se simplifie la définition des n -systèmes.

Lemme 6.1. *Soit $q_0 \geq 0$. Un n -système (i.e. un $(n, 0)$ -système) sur $[q_0, \infty)$ est une fonction $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n) : [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec les propriétés suivantes.*

- (1) $0 \leq P_1(q) \leq \dots \leq P_n(q) \quad (q_0 \leq q)$.
- (2) *Pour $k = 1, \dots, n$, les fonctions P_k et $M_k := P_1 + \dots + P_k$ sont continues et affines par morceaux de pentes 0 et 1 sur $[q_0, \infty)$.*
- (3) $M_n(q) = q \quad (q_0 \leq q)$.
- (4) *Si, pour un entier $k \in \{1, \dots, n-1\}$, la fonction M_k n'est pas convexe en un point $q > q_0$, alors $P_{k+1}(q) = P_k(q)$.*

En effet la condition (S2) avec $\gamma = 0$ signifie que chaque composante P_k de \mathbf{P} est croissante au sens large. Elle ne prend donc jamais la pente -1 et par suite elle est continue et affine par morceaux de pentes 0 et 1.

Soit $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n) : [q_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un n -système. Le point q_0 et les points $q > q_0$ où au moins une des fonctions $M_k = P_1 + \dots + P_k$ passe de la pente 0 à la pente 1 s'appellent les *points d'échange* de \mathbf{P} . Ils forment une suite strictement croissante finie ou infinie $(q_i)_{0 \leq i < s}$ avec $s \in \{\infty, 1, 2, 3, \dots\}$. On dit que \mathbf{P} est *rigide de maille* $\delta > 0$ si en chacun des points q_i les coordonnées de $\mathbf{P}(q_i)$ forment une suite strictement croissante

$$0 < P_1(q_i) < \dots < P_n(q_i)$$

de multiples positifs de δ .

REFERENCES

- [PR2023] A. Poëls and D. Roy, Parametric geometry of numbers over a number field and extension of scalars, *Bull. Soc. Math. France*, 40pp, à paraître.
- [Ro2015] D. Roy, On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers, *Ann. of Math.* **182** (2015), 739–786.
- [RW2017] D. Roy and M. Waldschmidt, Parametric geometry of numbers in function fields, *Mathematika* **63** (2017), 1114–1135.
- [SS2009] W. M. Schmidt and L. Summerer, Parametric geometry of numbers and applications, *Acta Arith.* **140** (2009), 67–91.
- [SS2013] W. M. Schmidt and L. Summerer, Diophantine approximation and parametric geometry of numbers, *Monats. Math.* **169** (2013), 51–104.
- [Sc2020] W. M. Schmidt, On parametric geometry of numbers, *Acta Arith.* **195** (2020), 383–414.