MAT 1739 Vecteurs

Chapitre 1

Objectifs

- comprendre la différence entre scalaires et vecteurs
- comprendre les différentes façons de décrire la direction d'un vecteur (et être capable de les convertir de l'une vers l'autre)
- être capable d'additionner (soustraire) des vecteurs géométriquement et comprendre les propriétés de l'addition
- comprendre la multiplication d'un vecteur par un scalaire et ses propriétés
- être capable d'utiliser l'addition des vecteurs pour résoudre certains problèmes physiques
- être capable de décomposer un vecteur en deux vecteurs perpendiculaires

Introduction aux vecteurs

La première chose qu'on doit faire est de savoir distinguer des vecteurs et des scalaires.

Un scalaire est une quantité qui ne décrit qu'une norme ou dimension concrète, comme des nombres (*eg* $\sqrt{2}$, $1/3$, -7), une température (*eg* 12°C), une aire (*eg* l'aire d'un rectangle avec des côtés de 2 cm et 4 cm est 8 cm^2), une vitesse (*eg* 80 km/h) ou une distance (*eg* la maison de mon ami est à 600 m de la mienne).

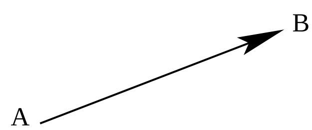
Un vecteur est une quantité qui a *à la fois* une norme *et* une direction, comme la vitesse (*eg* 80 km/h vers l'est), le déplacement (*eg* la maison de mon ami est à 600 m vers le nord de la mienne) ou la force (*eg* 20 N vers le bas).

Exemple:
Regardons si vous savez déterminer si les exemples suivants sont des scalaires ou des vecteurs:
(i) la masse de mon chat est 4.6 kg
(ii) l'accélération gravitationnelle est $g = 9.8$ m/s^2 vers le bas
(iii) un bateau file 10 noeuds vers l'ouest
(iv) mon neveu a 37 jeux vidéo

(i) la masse est un scalaire – mais soyez attentifs, si je disais que mon chat pèse 45 N, ce serait une force et donc un vecteur (la direction serait vers le bas)

(ii) un vecteur comme cette quantité a une norme et une direction
(iii) un vecteur comme cette quantité a une norme et une direction
(iv) ce n'est qu'un nombre, donc un scalaire

On peut représenter un vecteur de plusieurs façons:
(i) en mots, comme 5 km vers l'est
(ii) à l'aide d'un diagramme comme un vecteur géométrique

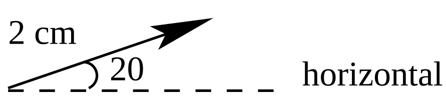


(iii) de façon symbolique comme $\vec{v}$ (une flèche au-dessus de la lettre dénote que v est un vecteur, *pas* un scalaire)

Si on veut dire un segment orienté d'un point A (appelé point initial ou point de départ ou l'origine) au point B (appelé l'extrémité ou point d'arrivé ou fin) comme dans le diagramme ci-dessus, on écrit $\vec{AB}$.

La norme ou dimension ou longueur d'un vecteur est écrite en utilisant la notation de la valeur absolue, donc la norme du vecteur $\vec{v}$ est $|\vec{v}|$.

Exemple:
La norme du vecteur 2 cm avec un angle 20° à l'horizontale est sa longueur, 2 cm.

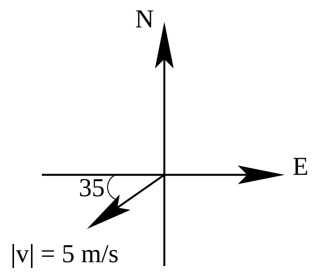


La direction d'un vecteur peut être exprimée de plusieurs façons. Dans l'exemple ci-dessus, la direction était exprimée par un angle, qui est mesuré dans le sens antihoraire (ccw) par rapport à l'horizontale.

On peut utiliser le relèvement azimuth, qui est l'angle noté par trois chiffres (avec des zéros au début si on en a besoin) mesuré dans le sens horaire (cw) à partir du nord. Donc le nord est à 000°, l'est à 090°, le sud à 180° et l'ouest à 270°. Notre exemple ci-dessus donne 2 cm 070°.

De plus, on peut utiliser le relèvement quadrant, qui est un angle entre 0° et 90° à l'est ou l'ouest de l'axe nord-sud. Notre exemple devient 2 cm N70°E.

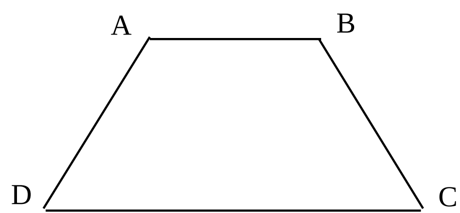
Exemple:



Ce vecteur est 5 m/s à 215° par rapport à l'horizontale (ou 5 m/s à $-145°$ par rapport à l'horizontale) ou 5 m/s au relèvement azimuth de 235° ou 5 m/s S55°W.
Est-ce que vous voyez d'où ces angles viennent ?

Les deux vecteurs sont dits parallèles s'ils ont les mêmes directions ou des directions opposées (mais pas nécessairement la même norme).

Exemple:
Dans le trapèze $ABCD$,



$\vec{AB} \parallel \vec{DC}$ (*et* $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$).

Les deux vecteurs qui ont la même direction *et* norme sont dits égaux (leur position dans l'espace n'est pas importante).

Exemple:
Dans le parallélogramme $PQRS$,

les vecteurs $\vec{PS}$ et $\vec{QR}$ sont égaux, qu'on note comme $\vec{PS} = \vec{QR}$.
On a aussi que $\vec{SP} = \vec{RQ}$, $\vec{PQ} = \vec{SR}$ et $\vec{QP} = \vec{RS}$.

Les vecteurs opposés ont la même norme mais des directions opposées (la position n'est pas importante). L'opposé d'un vecteur $\vec{v}$ s'écrit comme $-\vec{v}$.

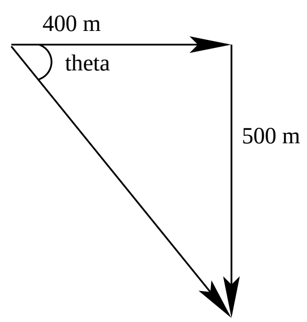
Donc, dans le parallélogramme au-dessus, $\vec{PS} = -\vec{RQ}$, $\vec{PQ} = -\vec{RS}$, $\vec{QR} = -\vec{SP}$ et $\vec{SR} = -\vec{QP}$.

Addition et soustraction des vecteurs

Si on additionne deux (ou plus) vecteurs, on obtient un seul vecteur, souvent appelé le résultant, qui est le même vecteur que les deux vecteurs initiaux placés l'un après l'autre.

Regardons avec un exemple.

Exemple:
Supposons qu'une personne a marché 400 m vers l'est et puis 500 m vers le sud.

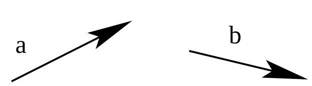


$\tan\theta = \dfrac{500}{400} = \dfrac{5}{4}, \quad \text{donc } \theta = \arctan(5/4) \approx 51.3°.$

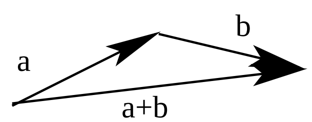
Alors, à l'aide du théorème de Pythagore et de la trigonométrie, on sait que c'est équivalent à marcher $\sqrt{(400)^2 + (500)^2} \approx 640.3$ m dans la direction S38.7°E.

Cela nous montre comment on peut additionner des vecteurs – en plaçant l'origine d'un vecteur sur le point d'arrivée de l'autre.

Supposons qu'on a des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

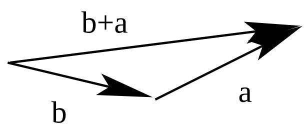


Pour les additionner et avoir le vecteur $\vec{a} + \vec{b}$, on déplace $\vec{b}$ de telle façon que son origine touche le point d'arrivée du vecteur $\vec{a}$



Le vecteur $\vec{a} + \vec{b}$ est le vecteur qui passe par l'origine de $\vec{a}$ et le point d'arrivée de $\vec{b}$.
Est-ce que vous voyez que c'est exactement ce qu'on a fait dans l'exemple précédent ?

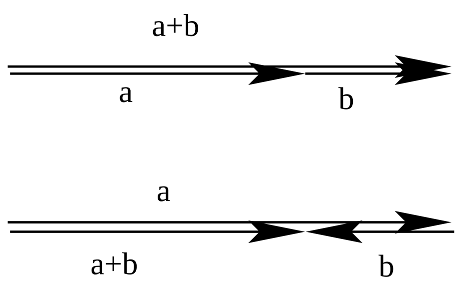
De plus, notez que



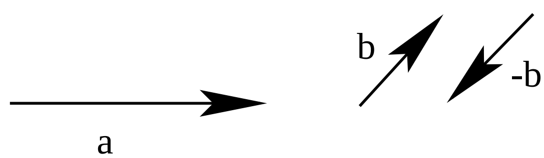
ie $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ et donc l'addition des vecteurs est <u>commutative</u>.

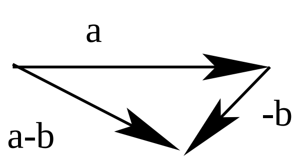
L'addition des vecteurs est aussi <u>associative</u>, *ie* $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ et donc l'ordre dans lequel on additionne des vecteurs n'est pas important (mais il le sera lorsqu'on va soustraire des vecteurs ci-dessous).

Est-ce qu'on fait quelque chose de spécial quand les vecteurs sont parallèles ? Non, on fait exactement la même chose.

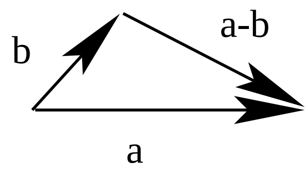


Pour soustraire des vecteurs, on considère tout simplement la soustraction comme l'addition d'une valeur négative, qui est l'opposé quand on travaille avec des vecteurs, donc $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

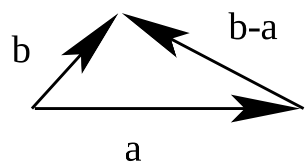




Notez qu'on peut aussi faire comme ceci

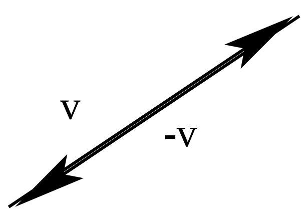


On peut trouver $\vec{a}-\vec{b}$ en plaçant les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ origine à origine et puis on relie le point d'arrivée de $\vec{a}$ à celui de $\vec{b}$.



Mais alors le vecteur $\vec{b}-\vec{a}$ est l'opposé de $\vec{a}-\vec{b}$ et donc l'ordre dans la soustraction est essentiel (comme avec les scalaires).

Supposons qu'on prend un vecteur quelconque $\vec{v}$ et le soustrait de lui-même,

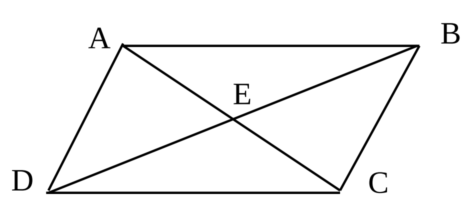


le résultant est $\vec{v}-\vec{v}=\vec{0}$, appelé <u>vecteur nul</u>, qui a longueur ou norme égale à 0 et n'a pas de direction particulière.

La <u>propriété d'identité</u> pour l'addition des vecteurs est alors claire, $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}=\vec{0}+\vec{v}$.

Est-ce que vous voyez que les propriétés de l'addition des vecteurs ressemblent très fortement à celles de l'addition des scalaires (nombres) ?

Exemple:
Considérez le parallélogramme $ABCD$ avec des diagonales AC et BD qui se croisent en E.



On peut écrire les vecteurs dans la figure comme des sommes et différences des autres, par exemple $\vec{DB}=\vec{DA}+\vec{AB}$, $\vec{DC}=\vec{DE}+\vec{EC}$, $\vec{AE}=\vec{DE}-\vec{DA}$, et ainsi de suite...

Essayez d'écrire les autres vecteurs de la figure de la même manière.

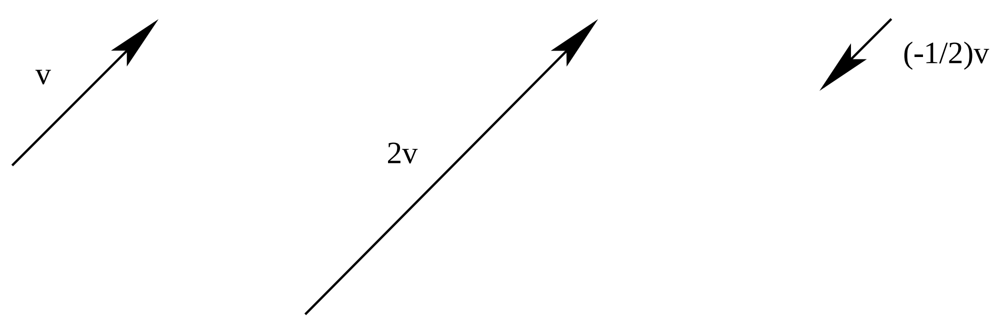
Exemple:
On peut simplifier les expressions comme suit:
$((\vec{u}+\vec{v})-\vec{u})-\vec{v}$
$=((\vec{v}+\vec{u})-\vec{u})-\vec{v}$ *(commutativité)*
$=((\vec{v}+\vec{u})+(-\vec{u}))-\vec{v}$ *(soustraction est l'opposé de l'addition)*
$=(\vec{v}+(\vec{u}+(-\vec{u}))-\vec{v}$ *(associativité)*
$=(\vec{v}+\vec{0})-\vec{v}$ *(l'addition des opposés donne le vecteur nul)*
$=\vec{v}-\vec{v}$ *(propriété d'identité)*
$=\vec{v}+(-\vec{v})$
$=\vec{0}$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

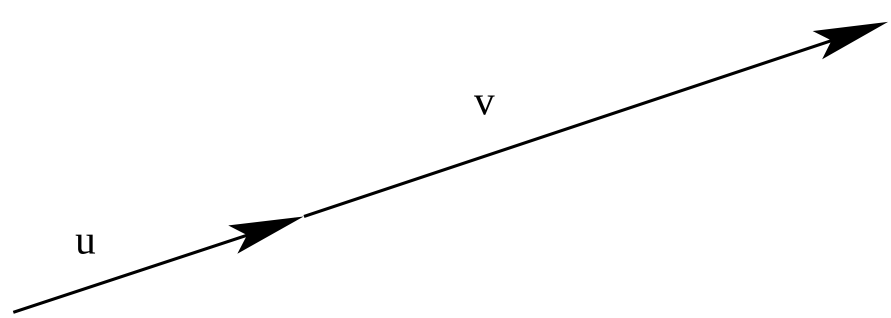
Si on prend un vecteur $\vec{v}$ et le multiplie par un scalaire k (un nombre réel), on est en train de faire la multiplication par un scalaire et on produit un multiple scalaire $k\vec{v}$. Le vecteur $k\vec{v}$ sera $|k|$ fois long que $\vec{v}$ et il sera parallèle à $\vec{v}$.

La norme de $k\vec{v}$ est $|k\vec{v}|=|k||\vec{v}|$.
Si $k>0$, $k\vec{v}$ pointe dans la même direction que $\vec{v}$.
Si $k<0$, $k\vec{v}$ pointe dans la direction opposée à $\vec{v}$.
Si $|k|>1$, $k\vec{v}$ est plus long que $\vec{v}$.
Si $|k|<1$, $k\vec{v}$ est plus court que $\vec{v}$.

Exemple:



Les vecteurs qui sont parallèles sont aussi dits collinéaires parce qu'ils formeraient une droite étant placés bout à bout. Ils sont alors des multiples scalaires l'un de l'autre.



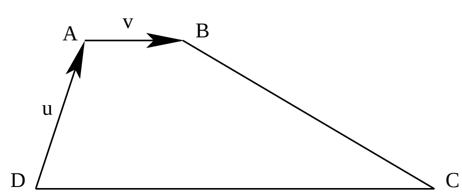
ie qu'il existe un $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Les propriétés de la multiplication par scalaire sont, pour des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et scalaires k et c quelconques,
(i) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ *(distributivité)*
(ii) $k(c\vec{v}) = (kc)\vec{v}$ *(associativité)*
(iii) $1\vec{v} = \vec{v}$ *(identité)*

Exemple:
$2(3\vec{u} - \vec{v}) + 4\vec{v}$
$= 2(3)\vec{u} + 2(-\vec{v}) + 4\vec{v}$
$= 6\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{v}$
$= 6\vec{u} + (-2 + 4)\vec{v}$
$= 6\vec{u} + 2\vec{v}$

Un vecteur de la forme $s\vec{u}+t\vec{v}$ (où s et t sont des scalaires) est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel qu'illustré dans les exemples ci-dessus et ci-dessous

Exemple:
Dans le trapèze $ABCD$, $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$ et $DC = 4AB$.



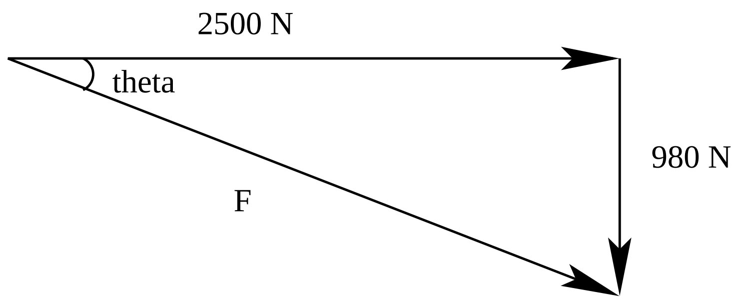
Si on pose $\vec{DA} = \vec{u}$ et $\vec{AB} = \vec{v}$, alors on peut écrire $\vec{DC} = 4\vec{v}$, $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = -\vec{u} + 4\vec{v}$ et $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DC} = -\vec{v} + (-\vec{u}) + 4\vec{v} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

Le concept de combinaison linéaire de vecteurs est crucial en algèbre linéaire.

Applications de l'addition des vecteurs

Les vecteurs qui sont perpendiculaires l'un à l'autre dont l'addition donne un vecteur $\vec{v}$ sont dits composantes perpendiculaires de $\vec{v}$.

Exemple:
Un boulet de canon de masse 100 kg est tiré horizontalement d'un canon avec la force de 2500 N. La gravitation fait son effet verticalement (vers le bas) avec une force de $(9.8\ \mathrm{m/s^2})(100\ \mathrm{kg})$ $= 980\ \mathrm{kgm/s^2} = 980$ N.
On a donc



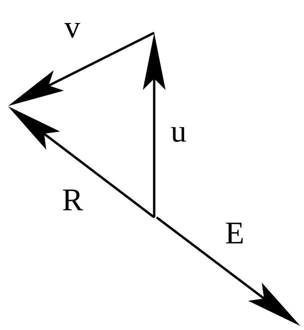
et les forces horizontale de 2500 N et verticale de 980 N sont des composantes perpendiculaires de la force résultante $\vec{F}$.

La norme de la force résultante est $|\vec{F}| = \sqrt{(2500)^2 + (980)^2} \approx 2685$ N.

La direction a un angle θ au-dessous de l'horizon, où $\tan\theta = \dfrac{980}{2500} = \dfrac{98}{250} = \dfrac{49}{125}$,

donc $\theta = \arctan(49/125) \approx 21.4°$.

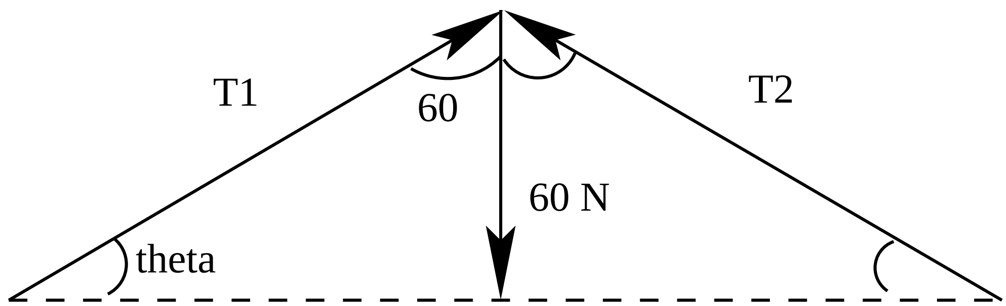
Un vecteur d'équilibre $\vec{E}$ est un vecteur qui balance un autre vecteur ou un groupe de vecteurs, sa norme est égale et sa direction est opposée au vecteur résultant $\vec{R}$.



On doit comprendre cette idée pour résoudre des problèmes de tension.

Tension est une force d'équilibre dans une corde ou chaîne qui maintient un objet à l'état stationnaire.

Exemple:
Un tableau qui pèse 60 N est suspendu par une corde (attachée au cadre) et un crochet sur le mur de telle manière que le crochet est au centre de la corde et les deux segments de la corde forment un angle de 120° entre eux.
On a donc

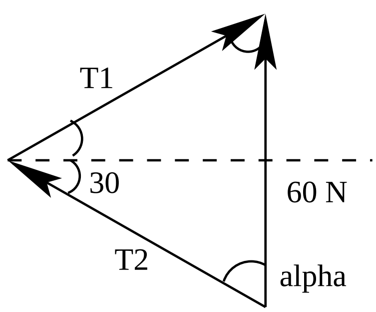


Par symétrie, les tensions dans les deux segments ont des normes égales, *ie* $|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}|$, et les angles qu'ils forment avec l'horizontale sont aussi égaux.

En fait, $\theta = 180° - 90° - 60° = 30°$.

Le poids du tableau de 60 N est la résultante du système, donc on doit avoir que $\vec{T_1} + \vec{T_2} = 60$ N vers le haut.

On peut réécrire le système comme suit

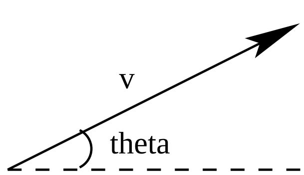


On a un triangle isoscèle où $\alpha = 60°$ et donc le triangle doit être équilatéral. Ce qui donne $|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = 60$ N.

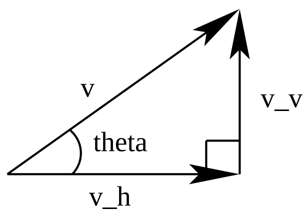
Décomposition de vecteurs en composantes perpendiculaires

Tout vecteur peut être décomposé en composantes perpendiculaires, le plus souvent horizontales et verticales.

Supposons qu'on a un vecteur $\vec{v}$ qui forme un angle θ avec l'horizontale



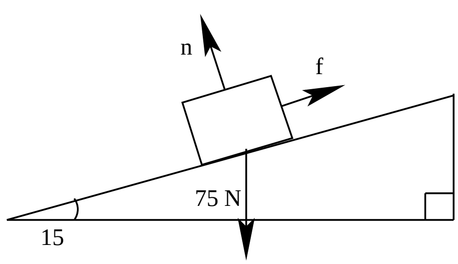
Il peut être décomposé en sa composante horizontale $\vec{v_h}$ et composante verticale $\vec{v_v}$, où $\vec{v} = \vec{v_h} + \vec{v_v}$ (*et* $\vec{v_h} \perp \vec{v_v}$).



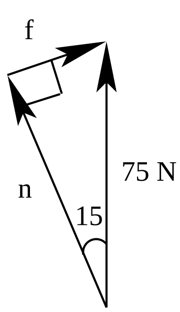
À l'aide de la trigonométrie, on obtient $|\vec{v_h}| = |\vec{v}|\cos\theta$ and $|\vec{v_v}| = |\vec{v}|\sin\theta$.

Exemple:
Un enfant tire un chariot avec une force de 40 N formant un angle de 25° avec l'horizontale. La composante horizontale a une norme $|\vec{F_h}| = |\vec{F}|\cos\theta = (40)(\cos(25°)) \approx 36.3$ N et la composante verticale a une norme $|\vec{F_v}| = |\vec{F}|\sin\theta = (40)(\sin(25°)) \approx 16.9$ N.

Exemple:
Un objet qui pèse 75 N est placé sur le plan incliné qui forme un angle de 15° avec l'horizontale.



Puisque l'objet n'est pas en mouvement, il y a une force de friction $\vec{f}$ dont l'effet est parallèle au plan et une force normale $\vec{n}$ dont l'effet est perpendiculaire au plan, donc la somme contre-balance le poids (*ie* la force due à la gravitation).
On a donc

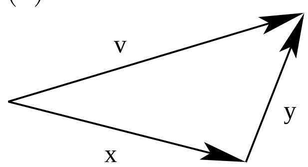


Ainsi $|\vec{f}| = (75)(\sin(15°)) \approx 19.4$ N et $|\vec{n}| = (75)(\cos(15°)) \approx 72.4$ N.

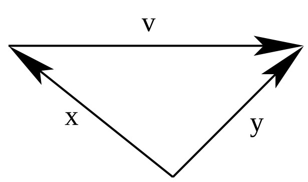
Problèmes pratiques

1. Exprimez le vecteur $\vec{v}$ comme la somme ou la différence des deux autres vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

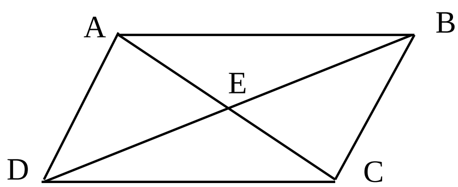
(a)



(b)

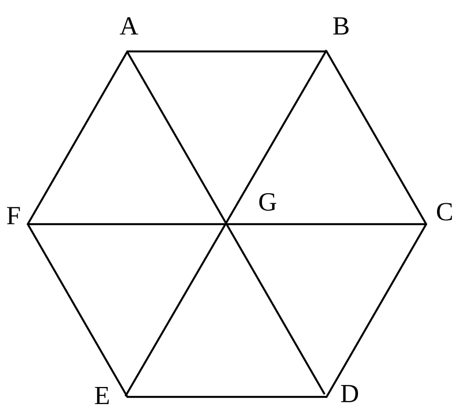


2. $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales AC et BD se croisent en E.



Exprimez les expressions suivantes comme un seul vecteur:
(a) $\vec{AB} + \vec{BC}$
(b) $\vec{BC} - \vec{BA}$
(c) $\vec{DA} + \vec{AE} - \vec{DC}$

3. $ABCDEF$ est un hexagone régulier dont le centre est G.



Exprimez les expressions suivantes comme un seul vecteur:
(a) $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GF}$
(b) $\vec{AF} - \vec{AG} + \vec{FE}$
(c) $\vec{DG} + \vec{GA} - \vec{DC} - \vec{CB}$

4. Soient X, Y, Z et O, quatre points quelconques.
(a) Exprimez $\vec{XY}$, $\vec{YZ}$ et $\vec{ZX}$ à l'aide de $\vec{OX}$, $\vec{OY}$ et $\vec{OZ}$.
(b) Exprimez $\vec{XY} + \vec{YZ}$ à l'aide de $\vec{OX}$ et $\vec{OY}$ (utilisez les réponses de (a)).
(c) Montrez que $\vec{XY} + \vec{YZ} + \vec{ZX} = \vec{0}$.

5. Simplifiez chaque expression.
(a) $\vec{x} + \vec{y} - 2\vec{x} + 3\vec{y}$
(b) $2(\vec{x} - \vec{y}) + 4(\vec{y} - \vec{x})$
(c) $3(\vec{x} + \vec{y}) - 2(\vec{x} - \vec{y}) - 5\vec{x}$

6. Un avion vole à 300 km/h souffle depuis la direction 270°. Il y a un vent de 40 km/h qui souffle depuis la direction 000°. Quelle est la vitesse de l'avion par rapport au sol ?

7. Un objet qui pèse 250 N est suspendu à deux chaînes. La plus longue est attachée au plafond et forme un angle de 45° tandis que la plus courte est attchée au mur et forme un angle 30° avec le mur. Calculez les tensions dans ces deux chaînes.

8. Un traversier doit traverser un fleuve d'une largeur de 1 km vers le point qui est juste en face du point initial. La vitesse de traversier est 10 km/h par rapport à l'eau. Il y a un courant de 7 km/h. Quelle direction le traversier doit-il prendre ?

9. Déterminez les composantes horizontale et verticale de chaque force.
(a) 200 N avec un angle de 20° ccw à l'horizontale
(b) 18 N avec un angle de 15° cw à la verticale

10. Un avion vole à 400 km/h dans la direction N25°W. Calculez le déplacement vers l'ouest que l'avion parcourt en deux heures.

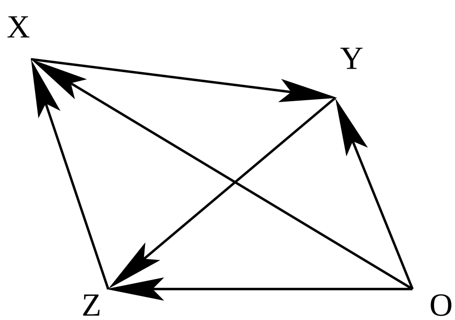
Solutions des problèmes pratiques

1. (a) $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$
(b) $\vec{v} = \vec{y} - \vec{x}$

2. (a) $\vec{AC}$
(b) $\vec{AC}$
(c) $\vec{DE} - \vec{DC} = \vec{CE}$

3. (a) $\vec{AF}$
(b) $\vec{GE}$
(c) $\vec{BA}$

4.



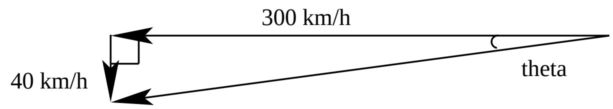
(a) $\vec{XY} = \vec{OY} - \vec{OX}$
$\vec{YZ} = \vec{OZ} - \vec{OY}$
$\vec{ZX} = \vec{OX} - \vec{OZ}$

(b) $\vec{XY} + \vec{YZ} = (\vec{OY} - \vec{OX}) + (\vec{OZ} - \vec{OY}) = \vec{OZ} - \vec{OX}$

(c) $\vec{XY} + \vec{YZ} + \vec{ZX} = (\vec{OZ} - \vec{OX}) + (\vec{OX} - \vec{OZ}) = \vec{0}$

5. (a) $4\vec{y} - \vec{x}$
(b) $2\vec{y} - 2\vec{x}$
(c) $5\vec{y} - 4\vec{x}$

6.



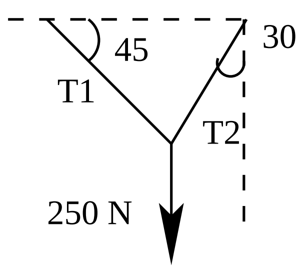
La vitesse par rapport au sol est la résultante.

La vitesse par rapport au sol est $\sqrt{(40)^2 + (300)^2} \approx 303$ km/h.

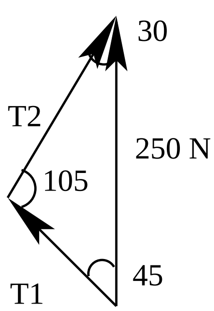
$\tan(\theta) = \dfrac{40}{300} = \dfrac{2}{15}, \quad$ donc $\theta \approx 7.6°$.

Ainsi la vitesse par rapport au terrain est 303 km/h S82.8°W ou dans la direction 262.4°

7. Le système est



qu'on peut réécrire comme

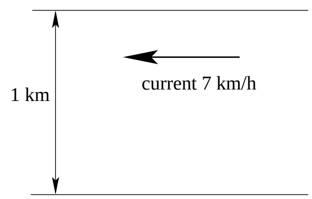


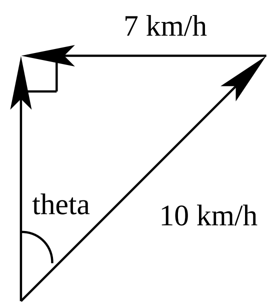
$\vec{T_1} + \vec{T_2} = 250$ N vers le haut

Utilisez la loi du sinus pour obtenir $\dfrac{|\vec{T_1}|}{\sin(30°)} = \dfrac{250 \text{ N}}{\sin(105°)}, \quad$ donc $|\vec{T_1}| \approx 129.4$ N

et $\dfrac{|\vec{T_2}|}{\sin(45°)} = \dfrac{250 \text{ N}}{\sin(105°)}, \quad$ donc $|\vec{T_2}| \approx 183$ N

8.

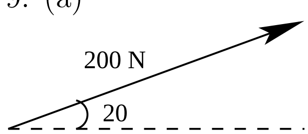




Le traversier doit choisir la direction qui forme un angle de $\sin(\theta) = \dfrac{7}{10}$,

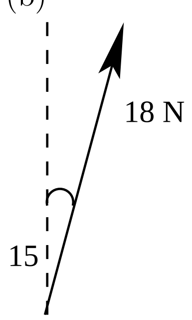
donc $\theta = \arcsin(7/10) \approx 44.4°$

9. (a)



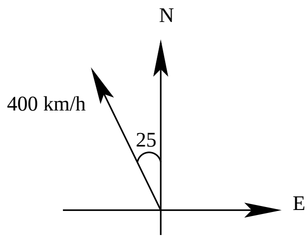
$|\vec{F_h}| = (200 \text{ N}) \cos(20°) \approx 188 \text{ N}$
$|\vec{F_v}| = (200 \text{ N}) \sin(20°) \approx 68.4 \text{ N}$

(b)



$|\vec{F_h}| = (18 \text{ N}) \sin(15°) \approx 4.7 \text{ N}$
$|\vec{F_v}| = (18 \text{ N}) \cos(15°) \approx 17.4 \text{ N}$

10.



La composante de la vitesse vers l'ouest est $|\vec{v_w}| = (400 \text{ km/h}) \sin(25°) \approx 169$ km/h, donc en deux heures, l'avion s'est déplacé de 338 km vers l'ouest.

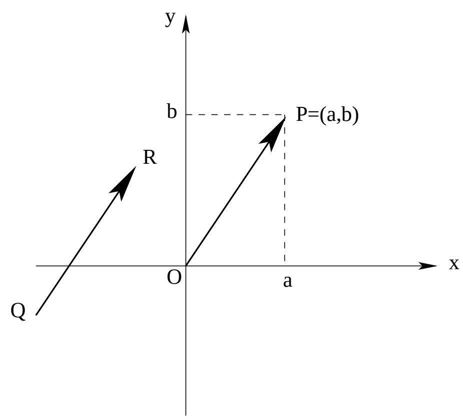
Chapitre 2

Objectifs

- comprendre comment on représente des vecteurs dans les espaces bi- et tri- dimensionnels sous la forme cartésienne et savoir effectuer des opérations comme l'addition (soustraction) et la multiplication par un scalaire
- comprendre les deux notations des vecteurs cartésiens, soit $[a, b, c]$ et $a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$, et pouvoir les utiliser
- être capable de calculer le produit scalaire entre deux vecteurs et comprendre ses propriétés
- être capable d'appliquer le produit scalaire dans des situations, telles que déterminer le travail produit par une force ou la projection de vecteurs
- être capable de calculer le produit vectoriel entre deux vecteurs et comprendre ses propriétés
- être capable d'appliquer le produit vectoriel dans des situations, telles que calculer le moment de force

Vecteurs cartésiens

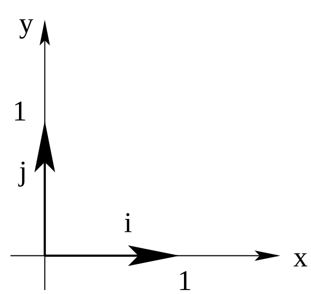
Considérons un vecteur $\vec{v}$ dans le plan – ses points initial et terminal, Q et R, peuvent être définis en utilisant les coordonnées cartésiennes. Si on déplace $\vec{v}$ de façon que son point de départ soit l'origine du plan O, alors son extrémité sera en un point P, avec les coordonnées (a, b). Cette représentation de $\vec{v}$ (*ie* $\vec{OP}$) est appelée le vecteur position $[a, b]$.



N'importe quel vecteur ayant les mêmes norme et direction peut être représenté par $[a, b]$.

Si on décompose $\vec{v} = [a, b]$ en composantes horizontale et verticale, on aura un vecteur de longueur a le long de l'axe des x et vecteur de longueur b le long de l'axe des y (qu'on peut additionner pour retrouver $\vec{v}$).

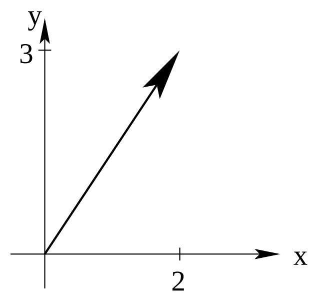
On définit les vecteurs unitaires $\hat{\imath}$ et $\hat{\jmath}$ comme les vecteurs de longueur 1 (d'où l'appellation unitaire) qui sont orientés dans les directions positives de l'axe des x et y, respectivement.



Donc $\hat{\imath}$ est le vecteur position $[1, 0]$ et tandis que $[0, 1]$ correspond à $\hat{\jmath}$. On écrit $\hat{\imath} = [1, 0]$ et $\hat{\jmath} = [0, 1]$.

Les composantes horizontale et verticale de $\vec{v}$ sont, respectivement, $\vec{v_h} = a\hat{\imath} = a[1, 0] = [a, 0]$ et
$\vec{v_v} = b\hat{\jmath} = b[0, 1] = [0, b]$. Et donc $\vec{v} = \vec{v_h} + \vec{v_v} = [a, 0] + [0, b] = [a, b]$ ou $\vec{v} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}$.
On voit aussi que $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (*par le théorème de Pythagore*).

Exemple:



Le vecteur $[2,3]$ a une composante horizontale de longueur 2, une composante verticale de longueur 3 et une longueur ou norme $\sqrt{(2)^2+(3)^2} = \sqrt{13}$. On peut aussi écrire $[2,3] = [2,0]+[0,3] = 2[1,0]+3[0,1] = 2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$.

Supposons qu'on additionne les vecteurs $\vec{u} = [u_1, u_2]$ et $\vec{v} = [v_1, v_2]$:
$\vec{u}+\vec{v} = [u_1, u_2] + [v_1, v_2]$
$= [u_1, 0] + [0, u_2] + [v_1, 0] + [0, v_2]$
$= u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath}$
$= (u_1+v_1)\hat{\imath} + (u_2+v_2)\hat{\jmath}$
$= (u_1+v_1)[1,0] + (u_2+v_2)[0,1]$
$= [u_1+v_1, u_2+v_2]$

Une fois compris comment additionner les vecteurs sous cette forme, il n'est pas nécessaire d'écrire tous ces détails.

La multiplication par un scalaire s'écrit comme $k\vec{v} = k[v_1, v_2] = k(v_1\hat{\imath}+v_2\hat{\jmath}) = kv_1\hat{\imath}+kv_2\hat{\jmath} = [kv_1, kv_2]$.

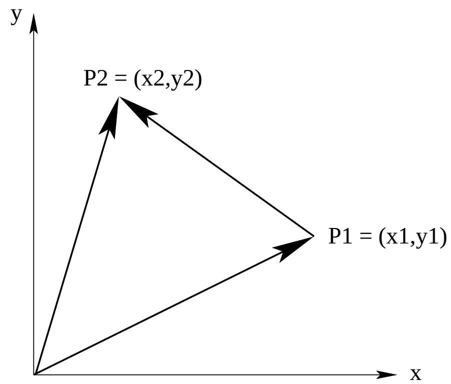
Ainsi l'opposé de $\vec{v}$ est $-\vec{v} = [-v_1, -v_2]$.

Exemple:
Supposons que $\vec{u} = [2,7]$ et $\vec{v} = [1,3]$, alors
(i) $\vec{u}+\vec{v} = [2+1, 7+3] = [3,10] = 3\hat{\imath}+10\hat{\jmath}$
(ii) $\vec{u}-\vec{v} = [2-1, 7-3] = [1,4] = \hat{\imath}+4\hat{\jmath}$
(iii) $-3\vec{v} = [-3(1), -3(3)] = [-3,-9] = -3\hat{\imath}-9\hat{\jmath}$
(iv) $2\vec{u}+4\vec{v} = [4,14]+[4,12] = [8,26] = 8\hat{\imath}+26\hat{\jmath}$

Soit un vecteur $\vec{v} = [v_1, v_2] = v_1\hat{\imath}+v_2\hat{\jmath}$ quelconque. On peut toujours trouver un vecteur unitaire qui va dans la même direction que $\vec{v}$ en divisant $\vec{v}$ par sa norme, *ie* $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{v_1\hat{\imath}+v_2\hat{\jmath}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$ et l'opposé en multipliant par -1, *ie* $-\hat{v}$.

Exemple:
Si $\vec{v} = [-2,3]$, alors $\hat{v} = \dfrac{[-2,3]}{\sqrt{(-2)^2+(3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}[-2,3] = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2\hat{\imath}+3\hat{\jmath})$.

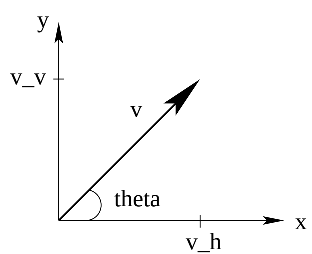
On considère deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$.



Le vecteur qui joint P_1 à P_2 est $\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = [x_2, y_2] - [x_1, y_1] = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$ et $|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (*qui est la distance entre les deux points*).

Exemple:
Le vecteur qui joint le point $A = (-1, 0)$ au point $B = (5, 2)$ est $\vec{AB} = [5-(-1), 2-0] = [6, 2]$ et sa longueur est $\sqrt{(6)^2 + (2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

On a aussi vu que les composantes horizontale et verticale peuvent être exprimées comme $|\vec{v_h}| = |\vec{v}| \cos\theta$ et $|\vec{v_v}| = |\vec{v}| \sin\theta$, où θ est l'angle (mesuré dans le sens anti-horaire) que le vecteur forme avec la direction positive de l'axe des x.



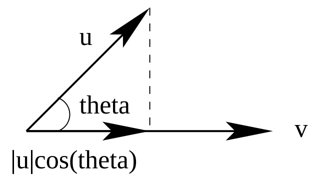
$\vec{v} = [v_1, v_2] = [|\vec{v_h}|, |\vec{v_v}|] = [|\vec{v}| \cos\theta, |\vec{v}| \sin\theta] = |\vec{v}| \cos\theta\hat{\imath} + |\vec{v}| \sin\theta\hat{\jmath} = |\vec{v}|(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath})$

Est-ce que vous voyez que $\hat{v} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$ *?*

Exemple:
Une force de 150 N formant un angle de 15° avec l'horizontale est alors
$\vec{F} = [|\vec{F}| \cos\theta, |\vec{F}| \sin\theta] = [(150)\cos(15°), (150)\sin(15°)] \approx [144.9, 38.8]$ N $= 144.9\hat{\imath} + 38.8\hat{\jmath}$ N.

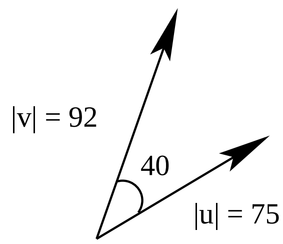
Le produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$ (lu comme $\vec{u}$ point $\vec{v}$), où θ est l'angle, tel que $(0 \leq \theta \leq 180°)$ entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ placés origine contre origine.



Le produit scalaire est <u>commutatif</u>, *ie* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$. De plus, le résultat du produit scalaire est un scalaire (pas un vecteur) et représente la norme de la projection d'un vecteur sur l'autre, ou la tendence des vecteurs d'aller dans la même direction.

Exemple:

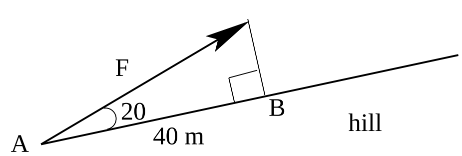


$\vec{u}\cdot\vec{v} = (75)(92)\cos(40°) \approx 5286$

On peut énoncer quelques propriétés du produit scalaire:
(i) si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ vaut $\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
(ii) si $\theta = 90°$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ (*vecteurs sont orthogonaux*)
(iii) si $0 < \theta < 90°$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ (*vecteurs vont dans la même direction*)
(iv) si $90° < \theta < 180°$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ (*vecteurs vont dans des directions opposées*)
(v) si $\theta = 0$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$ (et donc $\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2$)
(vi) si $\theta = 180°$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -|\vec{u}||\vec{v}|$
(vii) $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} = 0$

Le produit scalaire est utilisé pour déterminer le <u>travail</u>, qui est le produit de la norme du déplacement d'un objet et la norme de la force appliquée dans la direction de mouvement.

Exemple:
Un enfant tire une luge sur 40 m en montant une pente avec une force de 125 N faisant un angle de 20° avec la pente.

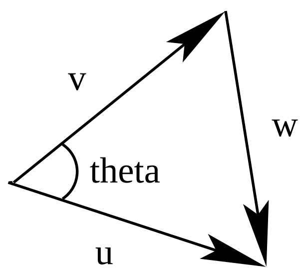


Le travail est
$W =$ (déplacement)(composante horizontale de la force)

$= |\vec{AB}||\vec{F}|\cos(20°)$
$= \vec{AB} \cdot \vec{F}$
$= (40 \text{ m})(125 \text{ N})\cos(20°)$
≈ 4698 J.

Les autres propriétés du produit scalaire sont:
(i) si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{v}$
(ii) pour un scalaire quelconque k, $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$ (*associativité*)
(iii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ (*distributivité*)

Il est possible de calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en utilisant des représentations cartésiennes des vecteurs.



D'après la loi de cosinus, $|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Mais $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, donc on a
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$
$= \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - ((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2))$
$= \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - u_1^2 + 2u_1v_1 - v_1^2 - u_2^2 + 2u_2v_2 - v_2^2)$
$= u_1v_1 + u_2v_2$

ie $\vec{u} \cdot \vec{v} = [u_1, u_2] \cdot [v_1, v_2] = u_1v_1 + u_2v_2$

Exemple:
(i) $[-2, 4] \cdot [3, 2] = (-2)(3) + (4)(2) = -6 + 8 = 2$
(ii) Supposons que $\vec{u} = [0, 2]$ et $\vec{v} = [7, 3]$,
alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0)(7) + (2)(3) = 6$
et $(3\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = [-7, 3] \cdot [35, 17] = (-7)(35) + (3)(17) = -245 + 51 = -194$.

Applications du produit scalaire

Regardons des applications du produit scalaire. On a déjà vu que le travail effectué par une force $\vec{F}$ dans la direction du déplacement $\vec{s} = \vec{AB}$ est $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Exemple:
Une force de 30 N est appliquée dans la direction du vecteur $\vec{v} = [3, 2]$ à un objet qui se déplace du point $(0, 2)$ au point $(2, 7)$ (distances mesurées en mètres). Quel est le travail effectué ?

Un vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v}$ est $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{[3,2]}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}[3,2]$.

Donc la force est $\vec{F} = (30\text{ N})\hat{v} = \frac{30}{\sqrt{13}}[3,2] = \frac{30}{\sqrt{13}}(3\hat{\imath}+2\hat{\jmath})$ N.

Le déplacement est $\vec{s} = (2-0)\hat{\imath} + (7-2)\hat{\jmath} = 2\hat{\imath}+5\hat{\jmath}$ m.

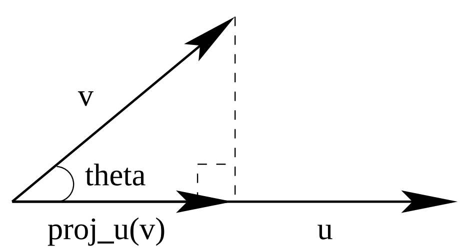
Donc le travail effectué est
$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = \frac{30}{\sqrt{13}}(3\hat{\imath}+2\hat{\jmath})\cdot(2\hat{\imath}+5\hat{\jmath})\text{ J} = \frac{30}{\sqrt{13}}((3)(2)+(2)(5))\text{ J} = \frac{480}{\sqrt{13}}\text{ J} \approx 133\text{ J}$.

Puisque le produit scalaire est $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, on a que $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ et donc $\theta = \arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$, ce qui permet de trouver l'angle entre les deux vecteurs.

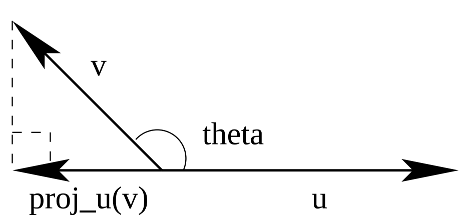
Exemple:
L'angle entre les vecteurs $\vec{u} = [6,-2]$ et $\vec{v} = [-1,4]$ est

$$\begin{aligned}
\theta &= \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{[6,-2]\cdot[-1,4]}{\sqrt{(6)^2+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+(4)^2}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{(6)(-1)+(-2)(4)}{\sqrt{40}\sqrt{17}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{-14}{\sqrt{40}\sqrt{17}}\right) \approx 122.5^\circ.
\end{aligned}$$

L'ombre d'un vecteur $\vec{v}$ sur l'autre $\vec{u}$ est appelée la <u>projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$</u>, notée $proj_{\vec{u}}\vec{v}$.



Si l'angle entre les vecteurs, θ, est plus petit que 90°, alors $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ est la composante de $\vec{v}$ dans la direction de $\vec{u}$ et donc $proj_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}|\cos\theta\,\hat{u} = |\vec{v}|\cos\theta\left(\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) = \left(\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\cos\theta\right)\vec{u}$.



Si $90° < \theta < 180°$, $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ va dans la direction opposée à $\vec{u}$, ce qui donne

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}|\cos(180° - \theta)(-\hat{u}) = |\vec{v}|(-\cos\theta)\left(\frac{-\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) = \left(\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\cos\theta\right)\vec{u}$$

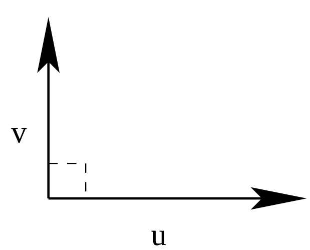
(*la même formule que celle ci-dessus*).

On a donc $proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\cos\theta\right)\vec{u} = \left(\frac{|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta}{|\vec{u}||\vec{u}|}\right)\vec{u} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$.

Exemple:
La projection de $\vec{v} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ sur $\vec{u} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ est

$$\begin{aligned}
&proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} \\
&= \left(\frac{(2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})\cdot(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})}{(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})\cdot(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})}\right)(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \\
&= \left(\frac{(2)(1) + (-4)(3)}{(1)(1) + (3)(3)}\right)(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \\
&= \tfrac{-10}{10}(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \\
&= (-1)(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \\
&= -\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} = -\vec{u}.
\end{aligned}$$

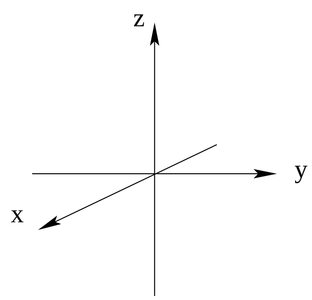
Notez que si $\theta = 90°$, $proj_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{0}$, en d'autres mots, la composante de $\vec{v}$ dans la direction de $\vec{u}$ est nulle.



On peut utiliser le produit scalaire dans beaucoup d'autres situations. Par exemple, supposons qu'une semaine Le Candy Store a vendu 40 paquets de dragées et 25 grand jawbreakers. Alors on peut représenter ces ventes avec le vecteur $[40, 25]$. Si un paquet de dragées coûte \$1.25 et un grand jawbreaker coûte 50 sous, on peut représenter ces prix à l'unité par le vecteur $[1.25, 0.50]$. Le produit scalaire de ces vecteurs est $[40, 25]\cdot[1.25, 0.50] = (40)(1.25) + (25)(0.50) = \$62.50$, ce qui sera le revenu total de ces ventes.

Vecteurs en trois dimensions

Le système de coordonnées cartésien tri-dimensionnel peut être représenté par cette figure:

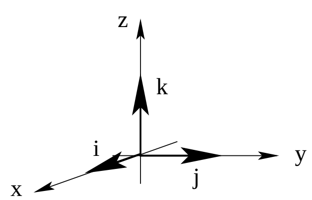


Ce système satisfait la règle de la main droite car, si on fait tourner les doigts de la main droite de l'axe des x vers l'axe des y, le pouce pointe dans la direction de l'axe des z.

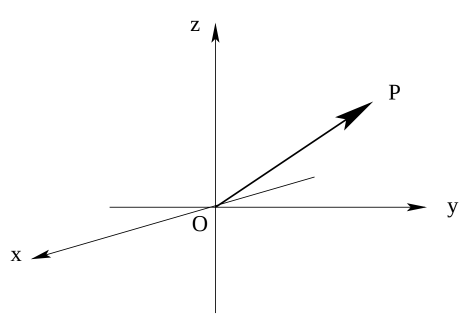
Les points sont décrits par des triplets ordonnés $P = (x, y, z)$. Les axes divisent l'espace en 8 octants. Celui où les trois coordonnées sont positives est appelé le premier octant (mais il n'y a pas de manière universelle de dénommer les autres). L'origine $O = (0, 0, 0)$ est le point où les trois axes se croisent.

Exemple:
Le point $(2, 3, -1)$ signifie 2 unités devant, 3 unités à droite et 1 unité au-dessous de l'origine.

Les vecteurs unitaires canoniques (en d'autres mots, standards) en dimension 3 sont $\hat{\imath} = [1, 0, 0]$, $\hat{\jmath} = [0, 1, 0]$ et $\hat{k} = [0, 0, 1]$.



Le vecteur position du point $P = (x, y, z)$ est $\vec{v} = \vec{OP}$ (de l'origine O au point P). $\vec{OP} = [x, y, z] = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$.



La norme (ou longueur) du vecteur est $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (*d'après le théorème de Pythagore*).

Exemple:
Le vecteur $\vec{v} = [2, 4, -1] = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - \hat{k}$ a une norme $|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$.

Un <u>multiple scalaire</u> de vecteur $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ est $k\vec{v} = [kv_1, kv_2, kv_3]$, où $k \in \mathbb{R}$. Ce vecteur est <u>collinéaire</u> avec $\vec{v}$.

Exemple:
Pour quelle valeur de c, $\vec{u} = [2, c, 1]$ est collinéaire avec $\vec{v} = [4, 6, 2]$?
Pour que $\vec{u}$ soit collinéaire avec $\vec{v}$, il doit être un multiple scalaire, *ie* $\vec{u} = k\vec{v}$
ou $[2, c, 1] = k[4, 6, 2] = [4k, 6k, 2k]$ ou $2 = 4k$, $c = 6k$ et $1 = 2k$.
Clairement, $k = 1/2$ et donc $c = 3$.

Pour deux vecteurs $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ et $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3]$ et $\vec{u} - \vec{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3]$.

Le vecteur du point $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ au point $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ est
$\vec{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$.

Exemple:
Supposons que $\vec{u} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ et $\vec{v} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$, alors
(i) $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1)\hat{\imath} + (-1 + 3)\hat{\jmath} + (3 - 4)\hat{k} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$
(ii) $\vec{v} - \vec{u} = (1 - 2)\hat{\imath} + (3 - (-1))\hat{\jmath} + (-4 - 3)\hat{k} = -\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 7\hat{k}$
(iii) $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}) - 3(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}) = (4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}) - (3\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} - 12\hat{k}) = \hat{\imath} - 11\hat{\jmath} + 18\hat{k}$
(iv) Le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{u}$ est $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k})$.

Le <u>produit scalaire</u> de $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ et $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Exemple:
(i) Si $\vec{u} = [-1, 5, 0]$ et $\vec{v} = [2, 6, -1]$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1)(2) + (5)(6) + (0)(-1) = 28$.

(ii) Quel est l'angle entre $\vec{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ et $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + \hat{k}$?

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{(1)(4) + (-2)(7) + (3)(1)}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2}\sqrt{(4)^2 + (7)^2 + (1)^2}}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{66}}\right) \approx 103.3°.$$

Est-ce que vous êtes à l'aise avec les deux notations des vecteurs ?

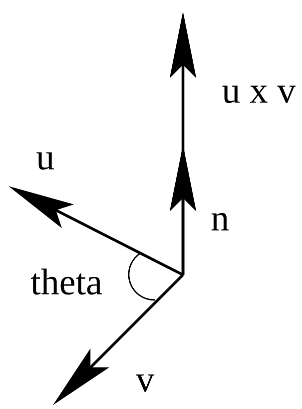
Les deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>orthogonaux</u> si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Donc si on cherche à trouver un vecteur orthogonal (perpendiculaire) à un vecteur donné, on utilise le produit scalaire.

Exemple:
Trouver un vecteur orthogonal à $\vec{p} = [2, -3, 5]$.

Soit $\vec{v} = [x, y, z]$ un vecteur orthogonal à $\vec{p}$, alors $\vec{p} \cdot \vec{v} = 0$, ce qui signifie que $[2, -3, 5] \cdot [x, y, z] = 0$ or $2x - 3y + 5z = 0$. En fait, il y a une infinité de vecteurs orthogonaux à $\vec{p}$ (*ils sont tous dans un même plan*). On peut choisir n'importe quelle solution de l'équation, par exemple $\vec{v} = [1, -1, -1]$.

Produit vectoriel

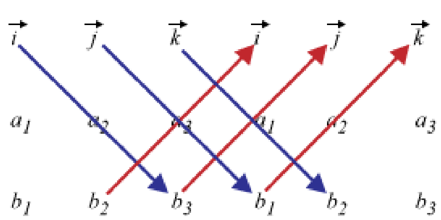
Maintenant définissons une opération sur les vecteurs dont le résultat est un vecteur. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini comme $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta\, \hat{n}$ (ce qu'on lit comme $\vec{u}$ croix $\vec{v}$) où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\hat{n}$ est un vecteur perpendiculaire aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, orienté de telle manière que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\hat{n}$ suivent la règle de la main droite (en tournant les doigts de la main droite de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, le pouce pointe dans la direction de $\hat{n}$).



Immédiatement, on a que $\vec{v} \times \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \sin\theta\, (-\hat{n}) = -\vec{u} \times \vec{v}$ et donc le produit vectoriel *n'est pas* commutatif.

Si $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$ et $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, on calcule les composantes de $\vec{u} \times \vec{v}$ comme suit $\vec{u} \times \vec{v} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1]$.

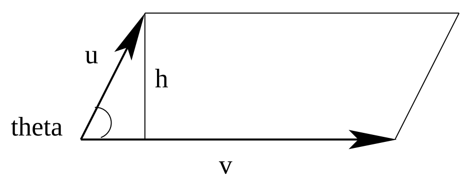
Il y a une façon visuelle de comprendre comment faire les calculs:



Est-ce que vous voyez comment utiliser ce tableau ?

Exemple:
Si $\vec{u} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ et $\vec{v} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$, alors
$\vec{u} \times \vec{v} = ((-1)(4) - (3)(3))\hat{\imath} + ((3)(1) - (2)(4))\hat{\jmath} + ((2)(3) - (-1)(1))\hat{k} = -13\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 7\hat{k}$.
De plus, $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = [-13, -5, 7] \cdot [2, -1, 3] = (-13)(2) + (-5)(-1) + (7)(3) = 0$,
et $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = [-13, -5, 7] \cdot [1, 3, 4] = (-13)(1) + (-5)(3) + (7)(4) = 0$,
donc $\vec{u} \times \vec{v}$ est orthogonal aux deux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (*comme il doit*).

La norme du produit vectoriel $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$ est égale à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



L'aire est $A = |\vec{v}|h = |\vec{v}||\vec{u}| \sin\theta$.

Donc l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exemple ci-dessus est $\sqrt{(-13)^2 + (-5)^2 + (7)^2} = \sqrt{243} \approx 15.6$.

Supposons que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. Qu'est-ce qui doit être vrai ?
Soit $\vec{u} = \vec{0}$, soit $\vec{v} = \vec{0}$, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles (*ie* $\theta = 0$) et il y a un $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Les autres propriétés du produit vectoriel sont:
(i) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ (*distributivité*)
(ii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ (*distributivité*)
(iii) $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$ (*associativité*)

On peut utiliser le produit vectoriel pour trouver l'angle entre deux vecteurs (*malgré qu'utiliser le produit scalaire serait plus facile*). Puisque $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$ s'écrit comme $\sin\theta = \dfrac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$, alors $\theta = \arcsin\left(\dfrac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$.
Par exemple, $|\vec{u}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$ et $|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (4)^2} = \sqrt{26}$,

donc $\theta = \arcsin\left(\dfrac{15.6}{\sqrt{14}\sqrt{26}}\right) \approx 54.9°$.

Puisque $\hat{\imath} = [1, 0, 0]$ et $\hat{\jmath} = [0, 1, 0]$,
$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = [(0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0)]$
$= [0, 0, 1] = \hat{k}$.

Est-ce que vous le voyez d'après le système de coordonnées, par exemple en appliquant la règle de la main droite ?

Applications des produits scalaire et vectoriel

Les formules pour le travail et la projection sont les mêmes dans l'espace tri-dimensionnel que dans l'espace bi-dimensionnel.

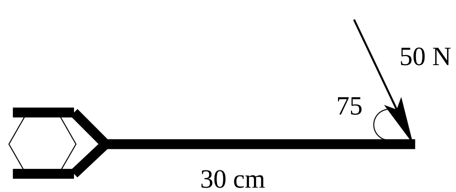
Exemple:
Une force $\vec{F} = [20, 100, 75]$ N est appliquée sur un objet et engendre un déplacement $\vec{d} = [2, 4, 5]$ m, donc le travail est $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = [20, 100, 75] \cdot [2, 4, 5] = (20)(2) + (100)(4) + (75)(5) = 815$ J.
La gravitation a son effet vers le bas, soit dans la direction $-\hat{k}$, donc le travail contre la gravitation est
$[0, 0, 75] \cdot [0, 0, 5] = 375$ J.

Exemple:
La projection de $\vec{v} = [2, -1, 3]$ sur $\vec{u} = [3, 2, 7]$ est

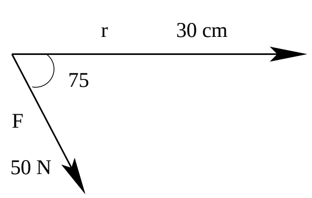
$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right) \vec{u} = \left(\frac{[2, -1, 3] \cdot [3, 2, 7]}{[3, 2, 7] \cdot [3, 2, 7]}\right) [3, 2, 7]$$
$$= \left(\frac{(2)(3) + (-1)(2) + (3)(7)}{(3)^2 + (2)^2 + (7)^2}\right) [3, 2, 7]$$
$$= \frac{25}{62}[3, 2, 7]$$
$$= \frac{75}{62}\hat{\imath} + \frac{50}{62}\hat{\jmath} + \frac{175}{62}\hat{k}.$$

Le moment de force est une mesure de la force $\vec{F}$ appliquée sur un object qui cause sa rotation et est donné par $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, où $\vec{r}$ est bras de levier, i.e. le vecteur depuis le centre de rotation jusqu'au point où la force $\vec{F}$ est appliquée.

Exemple:
Une clé longue de 30 cm est utilisée pour serrer un boulon. Une force de 50 N est appliquée dans le sens horaire avec un angle de 75° par rapport au manche.



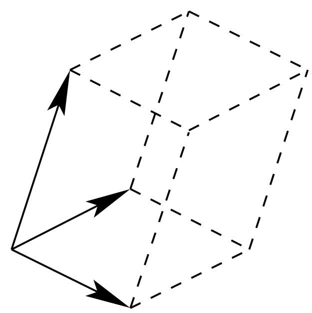
ou



Le moment de force est $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\theta\, \hat{n} = (0.3 \text{ m})(50 \text{ N}) \sin(75°)\, \hat{n} \approx 14.5$ Nm vers le bas (le boulon est serré).

On utilise le Nm comme unité du vecteur moment de force et non le J, tel qu'utilisé pour l'énergie qui est un scalaire (un nombre).

Si on considère des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on peut définir le triple produit comme $\vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v}$ (*on fait premièrement le produit vectoriel pour que le produit ait du sens*). Cela représente le volume du parallélépipède formé par les vecteurs. On prend la valeur absolue de ce triple produit si le résultat est négatif.



Exemple:
Le volume du parallélépipède formé par $\vec{u} = [1, 1, 1]$, $\vec{v} = [2, 2, 4]$ et $\vec{w} = [3, 1, 6]$ est
$\vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v} = [3, 1, 6] \cdot [1, 1, 1] \times [2, 2, 4]$
$= [3, 1, 6] \cdot [(1)(4) - (1)(2), (1)(2) - (1)(4), (1)(2) - (1)(2)]$
$= [3, 1, 6] \cdot [2, -2, 0]$
$= (3)(2) + (1)(-2) + (6)(0)$
$= 4$

Problèmes pratiques

1. Exprimez chaque vecteur sous la forme $a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$.
(a) $[2, 0, 7]$
(b) $[-1, \sqrt{2}, 3]$
(c) $[2, -1, 6]$
(d) $[0, -5, 0]$

2. Exprimez chaque vecteur sous la forme $[a, b, c]$.
(a) $6\hat{\imath} - \hat{k}$
(b) $\sqrt{2}\hat{\jmath} + 2\hat{k}$
(c) $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$
(d) $2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

3. Trouvez les vecteurs unitaires dans la direction des vecteurs suivants.
(a) $[2, 7, -1]$
(b) $[0, 3, 0]$
(c) $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$
(d) $4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$

4. Si $\vec{u} = [2, 1, -1], \vec{v} = [1, -2, 3]$ et $\vec{w} = [-3, 0, 2]$, calculer
(a) $2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$
(b) $3(\vec{u} - 2\vec{w}) + 4(\vec{v} + \vec{w})$
(c) $\vec{u} \cdot (3\vec{w})$
(d) $\vec{v} \cdot \vec{w}$
(e) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$
(f) $\vec{v} \times \vec{u} + \vec{w}$
(g) $\vec{v} \cdot \vec{w} \times (2\vec{u})$
(h) $2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 6\vec{w} \cdot \vec{v} \times \vec{u}$

5. Si $\vec{u} = 3\hat{\imath} - 2\hat{k}$ et $\vec{v} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, trouvez $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ et $proj_{\vec{v}}\vec{u}$. Quel est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

6. Utilisez le produit vectoriel pour trouver l'angle entre les vecteurs de la question 5.

7. Une force $\vec{F} = 4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + \hat{k}$ N est appliquée sur un object et le déplace du point $(1, 2, 0)$ au point $(7, 11, -2)$ (mesurés en mètres). Quel est le travail effectué ?

8. Une force de 40 N est appliquée (dans le sens horaire) selon un angle de 75° avec une clé longue de 18 cm. Trouvez le moment de force.

9. Trouvez le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{u} = [1, 1, 0], \vec{v} = [-2, 0, 1]$ et $\vec{w} = [1, 1, 4]$.

10. Trouvez un vecteur qui est perpendiculaire aux deux vecteurs $\vec{u} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ et $\vec{v} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$.

Solutions des problèmes pratiques

1. (a) $2\hat{\imath}+7\hat{k}$
(b) $-\hat{\imath}+\sqrt{2}\hat{\jmath}+3\hat{k}$
(c) $2\hat{\imath}-\hat{\jmath}+6\hat{k}$
(d) $-5\hat{\jmath}$

2. (a) $[6,0,-1]$
(b) $[0,\sqrt{2},2]$
(c) $[1,1,1]$
(d) $[2,-4,-3]$

3. (a) $|[2,7,-1]|=\sqrt{(2)^2+(7)^2+(-1)^2}=3\sqrt{6}, \quad \text{donc } \hat{v}=\frac{1}{3\sqrt{6}}[2,7,-1]$

(b) $|[0,3,0]|=\sqrt{(0)^2+(3)^2+(0)^2}=3, \quad \text{donc } \hat{v}=[0,1,0]$

(c) $|\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}|=\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}=\sqrt{3}, \quad \text{donc } \hat{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})$

(d) $|4\hat{\imath}-\hat{\jmath}+2\hat{k}|=\sqrt{(4)^2+(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{21}, \quad \text{donc } \hat{v}=\frac{1}{\sqrt{21}}(4\hat{\imath}-\hat{\jmath}+2\hat{k})$

4. (a) $2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}=[4,2,-2]-[1,-2,3]+[-9,0,6]=[-6,4,1]$

(b) $3(\vec{u}-2\vec{w})+4(\vec{v}+\vec{w})=3[8,1,-5]+4[-2,-2,5]=[16,-5,5]$

(c) $\vec{u}\cdot(3\vec{w})=[2,1,-1]\cdot[-9,0,6]=(2)(-9)+(1)(0)+(-1)(6)=-24$

(d) $\vec{v}\cdot\vec{w}=(1)(-3)+(-2)(0)+(3)(2)=3$

(e) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=[2,1,-1]\times[-2,-2,5]$
$=[(1)(5)-(-1)(-2),(-1)(-2)-(2)(5),(2)(-2)-(-1)(-2)]=[3,-8,-2]$

(f) $\vec{v}\times\vec{u}+\vec{w}=[(-2)(-1)-(3)(1),(3)(2)-(1)(-1),(1)(1)-(-2)(2)]+[-3,0,2]$
$=[-1,7,5]+[-3,0,2]=[-4,7,7]$

(g) $\vec{v}\cdot\vec{w}\times(2\vec{u})=[1,-2,3]\cdot[(0)(-2)-(2)(2),(2)(4)-(-3)(-2),(-3)(2)-(0)(4)]$
$=[1,-2,3]\cdot[-4,2,-6]=(1)(-4)+(-2)(2)+(3)(-6)=-26$

(h) $2(\vec{u}\cdot\vec{v})+6\vec{w}\cdot\vec{v}\times\vec{u}=2((2)(1)+(-2)(1)+(3)(-1))+6[-3,0,2]\cdot[-1,7,5]$
$=-6+6((-3)(-1)+(0)(7)+(2)(5))=-6+78=72$

5. $$proj_{\vec{u}}\vec{v}=\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}=\left(\frac{(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})\cdot(3\hat{\imath}-2\hat{k})}{(3\hat{\imath}-2\hat{k})\cdot(3\hat{\imath}-2\hat{k})}\right)(3\hat{\imath}-2\hat{k})$$

$= \left(\dfrac{(1)(3)+(2)(0)+(1)(-2)}{(3)(3)+(0)(0)+(-2)(-2)} \right)(3\hat{\imath}-2\hat{k}) = \frac{1}{13}(3\hat{\imath}-2\hat{k})$

$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v} = \left(\dfrac{1}{(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})\cdot(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})}\right)(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})$

$= \left(\dfrac{1}{(1)(1)+(2)(2)+(1)(1)}\right)(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k}) = \frac{1}{6}(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k})$

Puisque $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$,

$\theta = \arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{13}\sqrt{6}}\right) \approx 83.5°$

6. $\vec{u}\times\vec{v} = [(0)(1)-(-2)(2),(-2)(1)-(3)(1),(3)(2)-(0)(1)] = [4,-5,6]$

donc $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(4)^2+(-5)^2+(6)^2} \approx 8.77$

Puisque $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$,

$\theta = \arcsin\left(\dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \arcsin\left(\dfrac{8.77}{\sqrt{13}\sqrt{6}}\right) \approx 83.2°$

(la petite différence d'angle entre les deux calculs est causée par l'erreur d'approximation)

7. Le déplacement est $\vec{d} = (7-1)\hat{\imath}+(11-2)\hat{\jmath}+(-2-0)\hat{k} = 6\hat{\imath}+9\hat{\jmath}-2\hat{k}$,

donc le travail est $W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (4\hat{\imath}+6\hat{\jmath}+\hat{k})\cdot(6\hat{\imath}+9\hat{\jmath}-2\hat{k}) = (4)(6)+(6)(9)+(1)(-2) = 76$ J

8. $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta\hat{n} = (0.18)(40)\sin(75°)$ vers le bas ≈ 6.95 Nm vers le bas

9. $\vec{u}\times\vec{v} = [(1)(1)-(0)(0),(0)(-2)-(1)(1),(1)(0)-(1)(-2)] = [1,-1,2]$,

alors $\vec{w}\cdot\vec{u}\times\vec{v} = [1,1,4]\cdot[1,-1,2] = (1)(1)+(1)(-1)+(4)(2) = 8$
et le parallélépipède a un volume de 8 unités cubiques.

10. Première méthode: $\vec{u}\times\vec{v} = [(1)(3)-(1)(-1),(1)(2)-(1)(3),(1)(-1)-(1)(2)] = [4,-1,-3]$

Deuxième méthode: soit $\vec{w} = [x,y,z]$. On veut que $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$ et $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$,

donc on doit avoir $x+y+z=0$ et $2x-y+3z=0$. Il y a une infinité de solutions. On peut prendre n'importe laquelle, mais toutes ces solutions sont des multiples scalaires de $[4,-1,-3]$.

Chapter 1

Chapitre 3

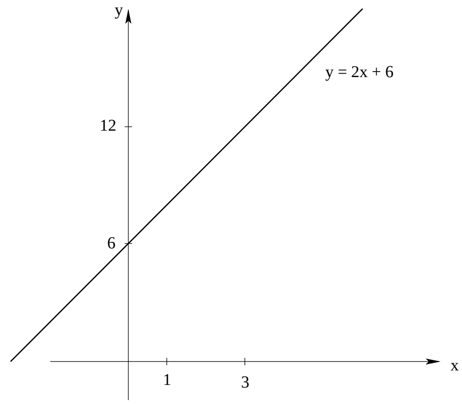
Objectifs

- être capable de reconnaître les différentes formes (cartésienne, paramétrique, vectorielle) des équations des droites dans les espaces bi- et tri- dimensionnels et des plans (espace tri-dimensionnel seulement) et savoir convertir les unes vers les autres formes
- comprendre les propriétés des droites et des plans, telles que parallélisme et perpendicularité, et savoir résoudre des problèmes sur la distance
- comprendre les propriétés géométriques des intersections des droites en deux et trois dimensions, des droites et plans (en trois dimensions) et des plans (en trois dimensions), et établir le lien avec les solutions des systèmes d'équations linéaires
- comprendre comment faire la réduction de matrices augmentées dans le but de trouver la solution de systèmes d'équations linéaires

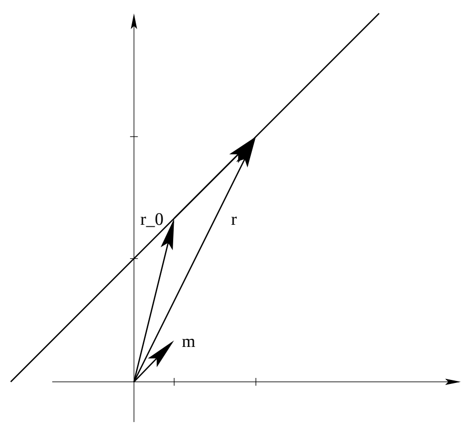
Équations des droites en deux et trois dimensions

En deux dimensions, une droite peut être donnée sous la forme affine $y = mx + b$ ou par une équation cartésienne $Ax + By + C = 0$.

Exemple:



La droite $y = 2x + 6$ a une pente $m = 2$ et une ordonnée à l'origine $b = 6$. L'équation de la droite sous forme cartésienne est $2x - y + 6 = 0$.



On peut représenter une droite par une équation vectorielle. Le vecteur directeur parallèle à la droite est $\vec{m} = [1, 2]$. Le vecteur position dont l'origine est sur la droite est $\vec{r_0} = [1, 8]$ (puisque le point $(1, 8)$ appartient à la droite). Un autre vecteur position $\vec{r} = [3, 12]$ touche aussi la droite (puisque $(3, 12)$ appartient à la droite). Alors, si on pose $\vec{s}$ comme le vecteur qui va de $(1, 8)$ à $(3, 12)$, on a que $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{s}$. Mais puisque $\vec{s}$ est parallèle à $\vec{m}$, on a que $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{m}$. Dans ce cas particulier, $t = 2$ – *est-ce que vous voyez ça ?* Si on posait t comme variable, on pourrait rejoindre n'importe quel point de la droite, donc on a que l'équation vectorielle de la droite est $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{m}$, $t \in \mathbb{R}$ ou $[x, y] = [x_0, y_0] + t[m_1, m_2]$.
Notez que l'équation vectorielle d'une droite donnée n'est pas unique – on peut utiliser n'importe quel point (x_0, y_0) de la droite et n'importe quel vecteur directeur $\vec{m}$ parallèle à celle-ci.

Si on sépare les composantes, on a des équations paramétriques de la droite, $x = x_0 + tm_1$, $y = y_0 + tm_2$, $t \in \mathbb{R}$.

Dans notre exemple ci-dessus, $x = 1 + t$ et $y = 8 + 2t$.

Exemple:
Est-ce que le point $(-1, 4)$ appartient à la droite ? Et le point $(2, 9)$?
Si $(-1, 4)$ est sur la droite, alors on doit avoir que $-1 = 1 + t$ et $4 = 8 + 2t$ pour la <u>même</u> valeur de t. Donc, oui, $(-1, 4)$ est sur la droite puisque $t = -2$ satisfait les deux équations. Pour l'autre point, $2 = 1 + t$ exige $t = 1$ mais $9 = 8 + 2t$ exige que $t = 1/2$ (*ie* on n'a pas la même valeur de t) donc le point $(2, 9)$ n'appartient pas à la droite.

Exemple:
Trouvez l'équation vectorielle de la droite qui passe par les points $P_1 = (-1, 2)$ et $P_2 = (2, -4)$.
On a besoin d'un vecteur directeur, par exemple $\vec{m} = \vec{P_1P_2} = [3, -6]$. On peut choisir n'importe quel point, donc on prend $\vec{r_0} = [-1, 2]$. Ainsi $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{m}$ donne $[x, y] = [-1, 2] + t[3, -6]$ (et alors P_2 correspond à $t = 1$).

Deux droites L_1 et L_2 sont <u>parallèles</u> si elles ont la même pente, et on dit que les droites <u>coïncident</u> si elles sont la même droite. En ce qui concerne les droites sous forme vectorielle, elles sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont parallèles.

Les droites des exemples ci-dessus ne sont pas parallèles, tandis que les droites
L_1 $\vec{r} = (2 + 3t)\hat{\imath} + (1 - 2t)\hat{\jmath}$ et L_2 $\vec{r} = (6 - 6t)\hat{\imath} + (4 + 4t)\hat{\jmath}$ le sont.
(*La notation a changé – est-ce que vous voyez ce dont vous avez besoin pour dire que les droites sont parallèles ?*)

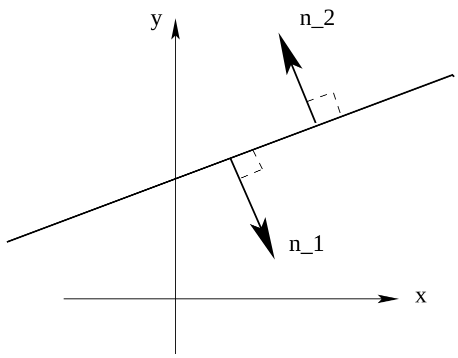
Revenons à notre exemple précédent $y = 2x + 6$. On sait que $\vec{m} = [1, 2]$ est le vecteur directeur de la droite, donc n'importe quel vecteur $\vec{n}$ qui est perpendiculaire à $\vec{m}$ (*ie* $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$) sera un vecteur <u>normal</u> ou perpendiculaire à la droite, par exemple $\vec{n} = [2, -1]$. Notez que l'équation cartésienne est $2x - y + 6 = 0$. Vous remarquez qu'ayant l'équation cartésienne $Ax + By + C = 0$ d'une droite, le vecteur $\vec{n} = [A, B]$ est normal à celle-ci.

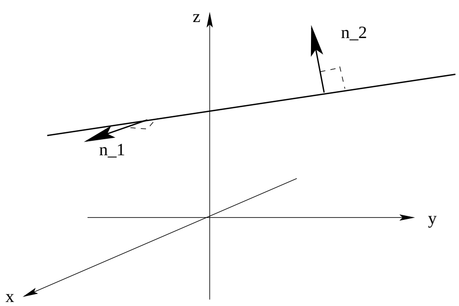
Que fait-on en trois dimensions ?
Premièrement, une équation avec trois variables $Ax + By + Cz + D = 0$ décrit un <u>plan</u> dans l'espace à trois dimensions, pas une droite. Il n'y a donc pas d'équation cartésienne pour une droite, et par davantage de forme affine. Cependant, on a une <u>équation vectorielle</u> et des <u>équations paramétriques</u>. La droite qui passe par $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dont le vecteur directeur est $\vec{m} = [m_1, m_2, m_3]$ est $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{m}$, $t \in \mathbb{R}$ ou $[x, y, z] = [x_0, y_0, z_0] + t[m_1, m_2, m_3]$ ou $x = x_0 + tm_1, y = y_0 + tm_2$ et $z = z_0 + tm_3$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exemple:
La droite qui passe par $P_1 = (1, 0, 5)$ et $P_2 = (4, 2, 1)$ donne $\vec{m} = [3, 2, -4]$, donc
$\vec{r} = [4, 2, 1] + t[3, 2, -4]$ (ainsi P_1 correspond à $t = -1$).
Est-ce que $(10, 5, -7)$ appartient à la droite ?
$4 + 3t = 10 \implies t = 2$
$2 + 2t = 5 \implies t = 3/2$

$1 - 4t = -7 \implies t = 2$ donc non, ce point n'appartient pas à la droite.

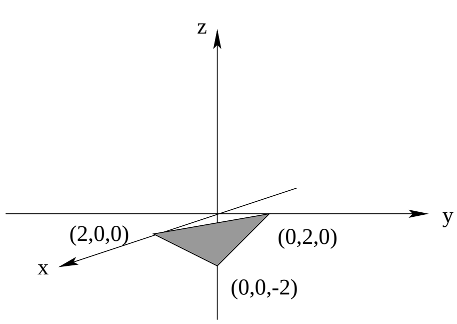
Tous les vecteur normaux à une droite en deux dimensions sont parallèles, mais ce n'est pas le cas en trois dimensions.





Équations du plan

Exemple:
Considérons l'équation cartésienne $x + y - z - 2 = 0$. Si on met deux coordonnées égales à 0, on peut voir où le graphe croise les axes. Si $y = z = 0$, $x + (0) - (0) - 2 = 0 \implies x = 2$, donc l'intersection avec l'axe des x est 2. Si $x = z = 0$, $(0) + y - (0) - 2 = 0 \implies y = 2$, donc l'intersection avec l'axe des y est 2. Si $x = y = 0$, $(0) + (0) - z - 2 = 0 \implies z = -2$, donc l'intersection avec l'axe des z est -2.

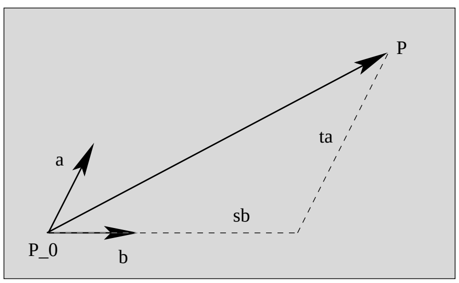


Cet objet n'est certainement pas une droite. Le graphe de cette équation est un plan, une surface bi-dimensionnelle plate en trois dimensions qui va vers l'infini dans chaque direction.

D'autre points du plan sont $P = (2,2,2)$, $Q = (0,7,5)$, $R = (6,3,7)$ et $S = (4,0,2)$.
Il y a l'infinité de points dans le plan – est-ce que vous voyez que ces points satisfont l'équation ?
Cependant, le point $(10,5,7)$ n'est pas dans le plan puisque $(10) + (5) - (7) - 2 \neq 0$ (*ie le point ne satisfait pas l'équation*).

En utilisant des points du plan, on peut trouver deux vecteurs directeurs qui sont parallèles au plan (et pas l'un à l'autre). Par exemple, $\vec{PQ} = [-2,5,3]$ et $\vec{RS} = [-2,-3,-5]$.

Supposons qu'on a deux vecteurs directeurs non-parallèles $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans un plan.



Alors, le vecteur de n'importe quel point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ à n'importe quel autre point $P = (x,y,z)$ dans le plan peut être représenté par un combinaison linéaire des vecteurs directeurs, *ie* $\vec{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b}$, où $t, s \in \mathbb{R}$. Mais puisque $\vec{P_0P} = [x,y,z] - [x_0,y_0,z_0]$, on peut reformuler l'équation vectorielle et écrire $[x,y,z] = [x_0,y_0,z_0] + t\vec{a} + s\vec{b} = [x_0,y_0,z_0] + t[a_1,a_2,a_3] + s[b_1,b_2,b_3]$ ou $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a} + s\vec{b}$. On a obtenu l'équation vectorielle d'un plan.

Donc l'exemple ci-dessus, on peut prendre $P_0 = (2,2,2)$, $\vec{a} = [-2,5,3]$ et $\vec{b} = [-2,-3,-5]$, donc $[x,y,z] = [2,2,2] + t[-2,5,3] + s[-2,-3,-5]$. Notez que si $t = -1/4$ et $s = 1/4$, on a $[x,y,z] = [2,0,0]$, le vecteur position de l'intersection avec l'axe des x.

Les équations paramétriques de plan seraient $x = x_0 + ta_1 + sb_1$, $y = y_0 + ta_2 + sb_2$ et $z = z_0 + ta_3 + sb_3$ où $t, s \in \mathbb{R}$.

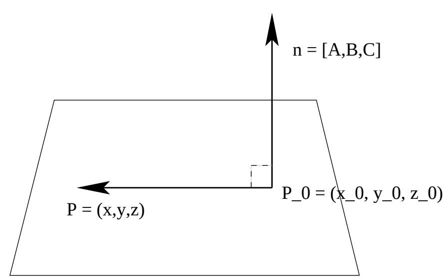
Donc dans notre exemple, $x = 2 - 2t - 2s$, $y = 2 + 5t - 3s$ et $z = 2 + 3t - 5s$. Les divers choix de valeurs de t et s vont nous donner d'autres points du plan, par exemple si $t = 1$ et $s = -2$, on va avoir $(4,13,15)$.
Est-ce que vous voyez que les x, y et z donnés par les équations paramétriques satisfont l'équation cartésienne initiale ?

Exemple:
Trouvons l'équation du plan qui contient la droite $[x,y,z] = [2,1,4] + t[2,3,4]$ et est parallèle à la droite $[x,y,z] = [7,4,2] + s[-1,0,6]$.
Comme la première droite appartient au plan, on peut utiliser $(2,1,4)$ comme le point

du plan et $[2,3,4]$ comme premier vecteur directeur. Puisque le plan est parallèle à la deuxième droite et $[-1,0,6]$ n'est pas parallèle à $[2,3,4]$ (*n'est pas son multiple scalaire*), on peut utiliser $[-1,0,6]$ comme deuxième vecteur directeur. L'équation vectorielle du plan sera $[x,y,z] = [2,1,4] + p[2,3,4] + q[-1,0,6]$ pour $p, q \in \mathbb{R}$, ou sous forme paramétrique, $x = 2 + 2p - q$, $y = 1 + 3p$ et $z = 4 + 4p + 6q$.

Les propriétés du plan

Supposons qu'on a un point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dans un plan et le vecteur $\vec{n} = [A,B,C] = A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$ qui est normal (perpendiculaire ou orthogonal) au plan.



Si on prend n'importe quel point $P = (x,y,z)$ du plan, alors le vecteur $\vec{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ est parallèle au plan et perpendiculaire à $\vec{n}$. Donc $\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$,
c'est-à-dire $[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [A,B,C] = 0$
ou $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
ou $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$
ou $Ax + By + Cz + D = 0$ où $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ est constante. On a obtenu l'équation cartésienne du plan.

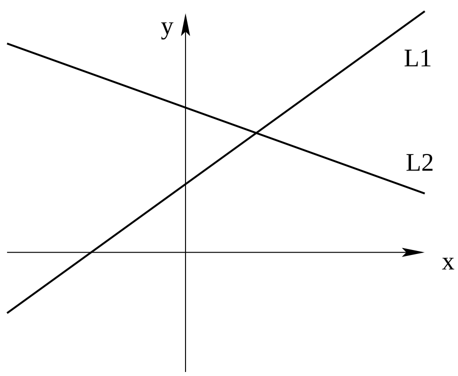
Exemple:
Le plan qui contient le point $P_0 = (4,-2,3)$ et a pour vecteur normal $\vec{n} = [1,-2,1]$ satisfait l'équation cartésienne $(1)x + (-2)y + (1)z + (-(1)(4) - (-2)(-2) - (1)(3)) = 0$ ou $x - 2y + z - 11 = 0$, qui peut aussi s'écrire comme $x - 2y + z = 11$.

Exemple:
Trouvez l'équation cartésienne du plan qui contient les points $P = (2,1,4)$, $Q = (4,0,3)$ et $R = (3,4,-2)$.
Les vecteurs $\vec{PQ} = [2,-1,-1]$ et $\vec{PR} = [1,3,-6]$ sont des vecteurs parallèles au plan. Alors $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ sera normal au plan, donc
$\vec{n} = [2,-1,-1] \times [1,3,-6]$
$= [(-1)(-6) - (-1)(3), (-1)(1) - (2)(-6), (2)(3) - (-1)(1)]$
$= [9, 11, 7]$.
L'équation cartésienne prend la forme suivante:
$9x + 11y + 7z + D = 0$. On peut substituer x, y et z par les coordonnées de n'importe quel des trois points pour déterminer D. Utilisons $Q = (4,0,-3)$, alors $9(4) + 11(0) + 7(3) + D =$

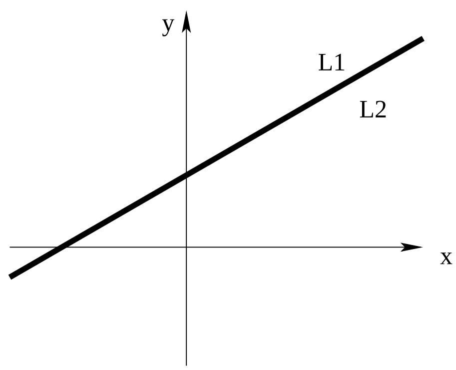
$0 \implies D = -57$ et l'équation cartésienne du plan est $9x + 11y + 7z = 57$.

Intersections des droites en deux et trois dimensions

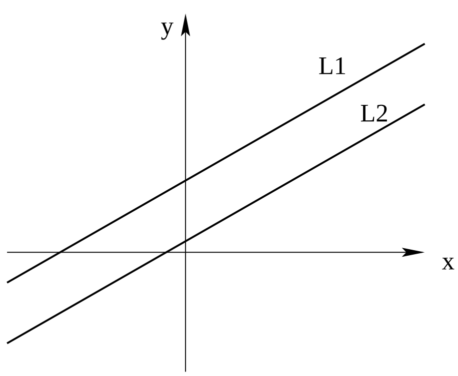
Pour deux droites L_1 et L_2 en deux dimensions, il y a trois possibilités.



(i) Les droites se croisent en un seul point.



(ii) Les droites coïncident (donc se croisent en une infinité de points).



(iii) Les droites sont parallèles et distinctes (donc ne se croisent pas).

Il y a une connexion directe avec les systèmes linéaires de deux équations à deux variables.

(a) Considérons
$2x + 3y = 4$
$3x + 4y = 9$

on peut réécrire le système comme une matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

où la première ligne représente la première équation et la deuxième ligne représente la deuxième équation. La première colonne représente x et la deuxième colonne représente y. La barre verticale représente les égalités et la dernière colonne représente les constantes du côté droit des équations. C'est tout simplement une notation abrégée du système d'équations pour laquelle on se préoccupe des coefficients. On va faire des opérations élémentaires sur les lignes comme la multiplication ou division de la ligne par un scalaire constant non nul, la permutation des lignes ou bien l'addition ou soustraction d'un multiple d'une ligne d'une autre ligne. L'objectif est d'écrire la matrice sous la forme échelonée réduite (FER), où la première entrée non nulle de chaque ligne vaut 1, et est appelée pivot. Chaque pivot est strictement à droite de n'importe quel autre pivot de la ligne au-dessus et tous les autres éléments dans la colonne qui contient un pivot valent zéro (tant au-dessus qu'au-dessous du pivot). Toutes les lignes nulles doivent apparaître au bas de la matrice. Quand on a une forme échelonée réduite, on peut déduire la solution du système linéaire. On appelle ce processus l'algorithme de Gauss-Jordan.

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{array}\right]$ $L_1/2$ (créer le pivot sur la première ligne)

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \end{array}\right]$ $L_2 - 3L_1$ (éliminer les entrées non nulles dans la première colonne au-dessous du pivot)

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 3 \end{array}\right]$ $L_2 \times -2$ (créer un pivot sur la deuxième ligne)

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$ $L_1 - (3/2)L_2$ (éliminer l'entrée non nulle au-dessus du pivot)

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$ c'est la FER, la solution est $x = 11$ et $y = -6$.

Les droites se croisent en un seul point, qui est l'unique solution du système linéaire.

(b) Considérons
$2x + 3y = 4$
$6x + 9y = 12$

et sa matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 12 \end{array}\right] L_1/2$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 6 & 9 & 12 \end{array}\right] L_2 - 6L_1$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(FER)}$$

On a maintenant une ligne de zéros et toute solution satisafait l'équation $x + (3/2)y = 2$, ce qui signifie qu'il y a une infinité de solutions (*les droites coïncident*). Soit $y = t$ un paramètre, alors $x + (3/2)t = 2$ ou $x = 2 - (3/2)t$. Donc les équations paramétriques de la droite contenant toutes les solutions sont $x = 2 - (3/2)t$ et $y = t$, et l'équation vectorielle est $[x, y] = [2, 0] + t[-3/2, 1]$, pour $t \in \mathbb{R}$.

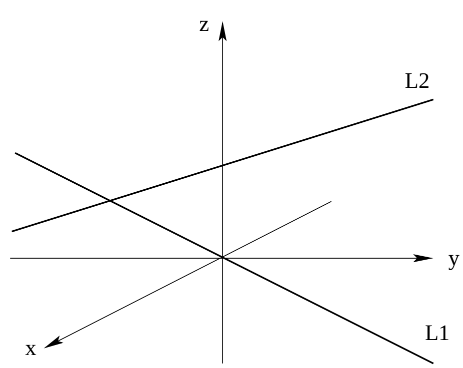
(c) Considérons
$2x + 3y = 4$
$6x + 9y = 16$

et sa matrice augmentée

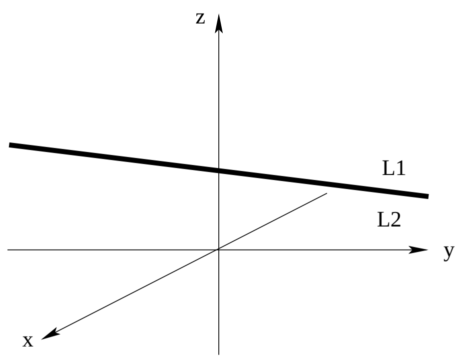
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 16 \end{array}\right] L_1/2$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 6 & 9 & 16 \end{array}\right] L_2 - 6L_1$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Ce système est incompatible. La dernière ligne signifie que $0x + 0y = 4$, ce qui est impossible à satisfaire, donc il n'y a pas de solution (*ces droites sont parallèles*).

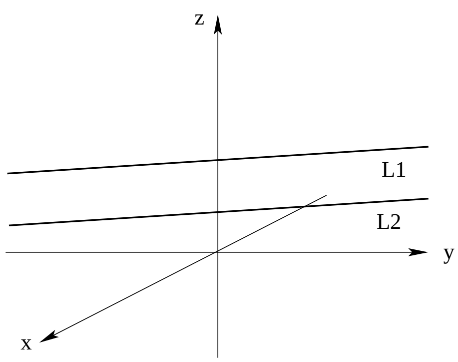
Si on a deux droites L_1 et L_2 en trois dimensions, il y a quatre possibilités.



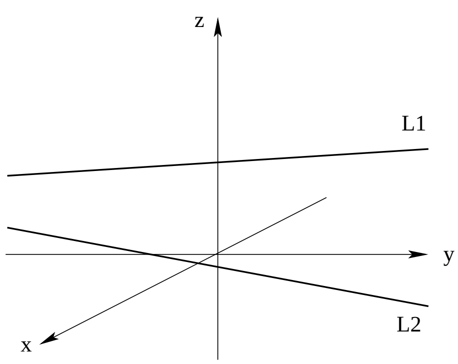
(i) Les droites se croisent en un seul point (solution unique).



(ii) Les droites coïncident (il y a une infinité de solutions).



(iii) Les droites sont parallèles et distinctes (pas de solution).



(iv) Les droites sont gauches – elles sont distinctes, non parallèles et ne se croisent pas (pas de solution).

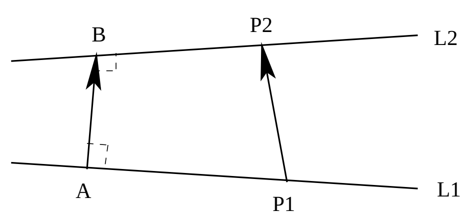
Exemple:
Les droites L_1 $[x, y, z] = [2, 3, 4] + t[1, 1, 3]$ et L_2 $[x, y, z] = [1, 0, -1] + s[1, 1, 3]$ sont parallèles (ont le même vecteur directeur). Est-ce qu'elles se coïncident ou sont distinctes ?
Si elles coïncident, chaque point de L_1 appartiendra à L_2, donc tout ce qu'on doit faire est de vérifier si $(2, 3, 4)$ appartient à L_2. Les équations paramétriques de L_2 sont $x = 1 + s$,

$y = s$ et $z = -1 + 3s$. Si on substitue le point $(2, 3, 4)$, $2 = 1 + s \implies s = 1$,
$3 = s \implies s = 3$,
$4 = -1+3s \implies s = 5/3$, et donc le point n'appartient pas à L_2. Les droites sont distinctes.

Exemple:
Trouvez le point d'intersection des droites L_1 $\vec{r} = [2, 1, 5] + t[3, 1, -2]$ et L_2 $\vec{r} = [0, 3, 1] + s[5, -1, 2]$.
Ces droites ne sont pas parallèles parce que leurs vecteurs directeurs ne sont pas parallèles.
On écrit les droites sous la forme paramétrique $x = 2+3t$, $y = 1+t$ et $z = 5-2t$; et $x = 5s$, $y = 3 - s$ et $z = 1 + 2s$. On cherche le point d'intersection en égalisant les coordonnées $2+3t = 5s$, $1+t = 3-s$ et $5-2t = 1+2s$. Ce système a une solution unique $s = t = 1$. La substitution de ces valeurs de s et t dans les équations paramétriques des droites nous mène au point d'intersection $(5, 2, 3)$ (*qui est la solution unique*).

Exemple:
Est-ce que les droites L_1 $[x, y, z] = [2, 1, 5] + t[3, 1, -2]$ et L_2 $[x, y, z] = [1, 3, 2] + s[5, -1, 2]$ sont gauches ?
Les droites ne sont pas parallèles, donc on vérifie si elles se croisent ou non.
$2 + 3t = 1 + 5s \implies 3t - 5s = -1$
$1 + t = 3 - s \implies t + s = 2$
et $5-2t = 2+2s \implies 2t+2s = 3$, ce qui contredit l'équation précédente, donc ce système est incompatible et il n'y a pas de point d'intersection. On en déduit que les droites sont gauches.

La distance la plus courte entre les droites gauches L_1 et L_2 serait la longueur de la perpendiculaire commune $|\vec{AB}|$.



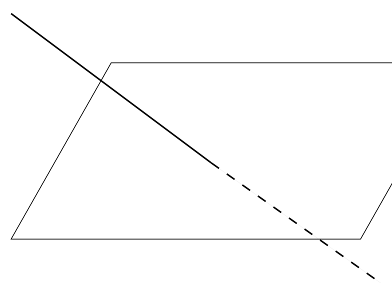
Supposons qu'on a des points P_1 et P_2 sur deux droites, alors si $\vec{n}$ est un vecteur dans la direction de $\vec{AB}$, on a que $proj_{\vec{n}}\vec{P_1P_2} = \vec{AB}$. Mais $|\vec{AB}|$ est la longueur qu'on cherche, donc $|\vec{AB}| = |proj_{\vec{n}}\vec{P_1P_2}| = \dfrac{|\vec{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$. On peut trouver un vecteur normal $\vec{n}$ qui est perpendiculaire aux deux droites en faisant le produit vectoriel des vecteurs directeurs des droites, *ie* $\vec{n} = \vec{m_1} \times \vec{m_2}$.

Exemple:
Pour les droites gauches ci-dessus, $\vec{m_1} = [3, 1, -2]$ et $\vec{m_2} = [5, -1, 2]$.
Donc $\vec{n} = \vec{m_1} \times \vec{m_2}$
$= [3, 1, -2] \times [5, -1, 2]$
$= [(1)(2) - (-2)(-1), (-2)(5) - (3)(2), (3)(-1) - (1)(5)]$

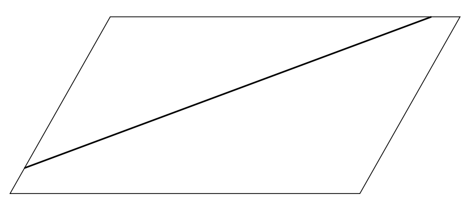
$= [0, -16, -8]$.
On peut diviser par -8 et utiliser $\vec{n} = [0, 2, 1]$.
Utilisez les points des droites $P_1 = (2, 1, 5)$ et $P_2 = (1, 3, 2)$, ce qui donne $\vec{P_1P_2} = [-1, 2, -3]$.
Donc $|\vec{AB}| = \dfrac{|\vec{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$
$= \dfrac{|[-1, 2, -3] \cdot [0, 2, 1]|}{\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (1)^2}}$
$= \dfrac{|(-1)(0) + (2)(2) + (-3)(1)|}{\sqrt{5}}$
$= 1/\sqrt{5} \approx 0.45$ (*Les droites sont proches*).

Intersections d'une droite et d'un plan

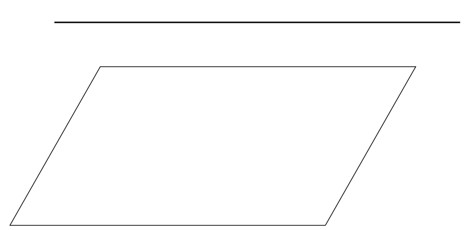
Si on a un plan et une droite en trois dimensions, il y a trois possibilités.



(i) La droite croise le plan en un seul point (solution unique).



(ii) La droite appartient au plan (il se croisent en une infinité de points et il y a une infinité de solutions).



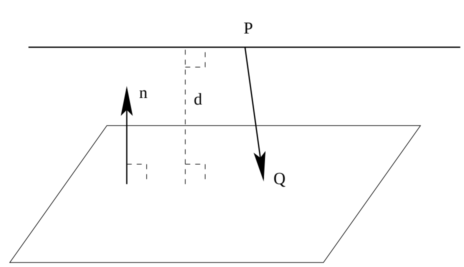
(iii) La droite est parallèle au plan (mais ne lui appartient pas), donc la droite ne croise pas le plan (pas de solution).

Exemple:
Est-ce que la droite $x = 2 + t$, $y = 6 - t$ et $z = 3 + 2t$ croise le plan $2x + 3y + 5z = 55$? Si oui, en quel point ?
On substitue les équations paramétrique de la droite dans l'équation cartésienne du plan pour voir s'il y a une solution.
$2(2 + t) + 3(6 - t) + 5(3 + 2t) = 55$
$4 + 2t + 18 - 3t + 15 + 10t = 55$
$9t = 18 \implies t = 2$
Puisqu'il y a une seule solution pour t, la droite et le plan se croisent en un seul point $(4, 4, 7)$.

Exemple:
Est-ce que la droite $\vec{r} = [2, 3, 1] + t[1, 5, -2]$ est parallèle au plan $3x + y + 4z = 13$? Si oui, est-ce que la droite est dans le plan ou non ?
Le vecteur directeur de la droite est $\vec{m} = [1, 5, -2] = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ et un vecteur normal au plan est $\vec{n} = [3, 1, 4] = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}$.
Vérifions que $\vec{m} \cdot \vec{n} = [1, 5, -2] \cdot [3, 1, 4] = (1)(3) + (5)(1) + (-2)(4) = 0$.
Puisque $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{m} \perp \vec{n}$ et donc la droite est parallèle au plan.
Trouvons les points d'intersection.
$3(2 + t) + (3 + 5t) + 4(1 - 2t) = 13$
$6 + 3t + 3 + 5t + 4 - 8t = 13$
$13 + 0t = 13$
$0t = 0$
Comme toutes les valeurs de t satisfont cette équation, il y a l'infinité de points d'intersection et donc la droite appartient au plan.

La droite serait aussi parallèle au plan $3x + y + 4z = 10$, mais elle ne lui appartiendrait pas.
$3(2 + t) + (3 + 5t) + 4(1 - 2t) = 10$
$13 + 0t = 10$
$0t = -3$
Ce qui n'a pas de solution.

Si une droite est parallèle à un plan, mais ne lui appartient pas, quelle est la distance entre ceux-ci ? Supposons qu'on a un point P sur la droite et un point Q dans le plan.

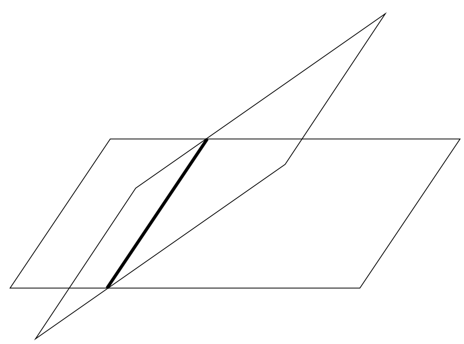


Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan, alors la projection de $\vec{PQ}$ sur $\vec{n}$ serait la distance perpendiculaire d de P au plan. Donc on a $d = \dfrac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ (*ce qui ressemble à ce qu'on a fait la distance entre les droites gauches*).

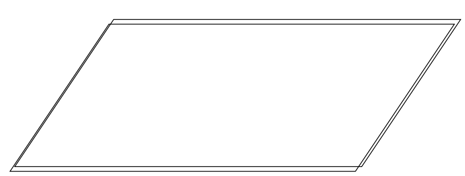
Exemple:
Quelle est la distance entre la droite $\vec{r} = [2,3,1] + t[1,5,-2]$ et le plan $3x + y + 4z = 10$?
Prenons $P = (2,3,1)$ et $Q = (2,0,1)$, alors $\vec{PQ} = [0,-3,0]$ et on sait que $\vec{n} = [3,1,4]$.
Donc $d = \dfrac{|[0,-3,0] \cdot [3,1,4]|}{\sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (4)^2}}$
$= \dfrac{|(0)(3) + (-3)(1) + (0)(4)|}{\sqrt{26}}$
$= 3/\sqrt{26} \approx 0.59$ (*donc la droite et le plan sont assez proches*).

Intersections de plans

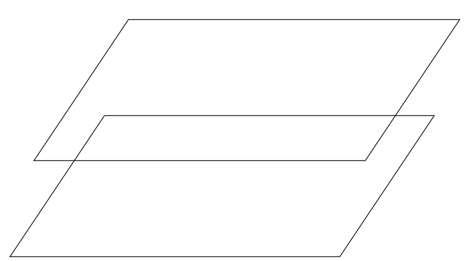
Si on a deux plans en trois dimensions, il y a trois possibilités.



(i) Ils se croisent en une droite (infinité de solutions avec un seul paramètre).



(ii) Ils coïncident (infinité de solutions avec deux paramètres).



(iii) Ils sont parallèles et distincts (pas de solution).

Un système de deux équations avec trois variables est soit incompatible (pas de solution) ou a une infinité de solutions – une seule solution n'est pas possible (deux plans ne peuvent pas se croiser en un seul point).

Exemple:
Considérons les plans $2x + 2y + z = 7$ et $x + y + z = 6$.
Les vecteurs normaux de ces plans ne sont pas parallèles, donc les plans ne sont pas parallèles et ils doivent se croiser.
Résolvons pour la droite à l'intersection des deux plans. On va réécrire le système comme une matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] L_2 - 2L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] L_2 \times -1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] L_1 - L_2$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \text{(FER)}$$

La solution est $x + y = 1$, $z = 5$.
Posons $y = t$, alors $x = 1 - t$, $y = t$ et $z = 5$ sont les équations paramétriques de la droite.
L'équation vectorielle est $[x, y, z] = [1, 0, 5] + t[-1, 1, 0]$.

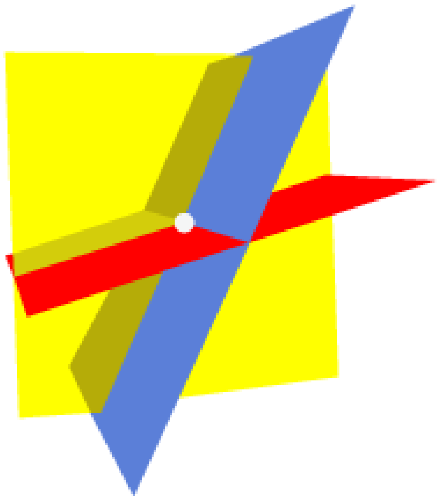
Exemple:
Considérons les plans $x - 2y + 3z = 10$ et $2x - 4y + 6z = 12$.
Les vecteurs normaux sont parallèles, donc les plans sont parallèles. Mais est-ce qu'ils sont superposés ou bien distincts ?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 2 & -4 & 6 & 12 \end{array}\right] L_2 - 2L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

Ce système est incompatible, donc il n'y a pas de solution et les plans sont distincts.

Les plans $x-2y+3z = 10$ et $2x-4y+6z = 20$ coïncident – est-ce que vous pouvez le vérifier ?

Pour l'intersection entre trois plans, il y a six possibilités. Il y en a trois où le système linéaire est compatible (a des solutions).



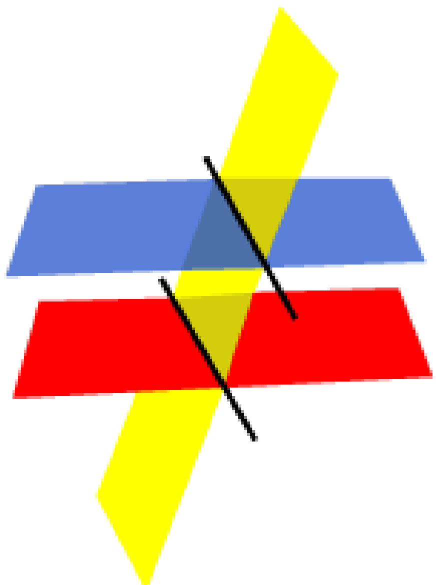
(i) Les plans se croisent en un seul point (solution unique).

(ii) Les plans se croisent en une droite (une infinité de solutions avec un seul paramètre).

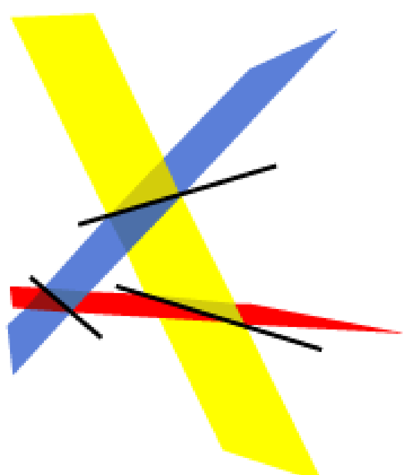
(iii) Les plans coïncident (une infinité de solutions avec deux paramètres).

Et il y en a trois où le système est incompatible (pas de solution).

(iv) Les plans sont parallèles (au moins deux plans sont distincts).



(v) Deux plans sont parallèles (et distincts), mais le troisième ne l'est pas.



(vi) Les plans se croisent deux à deux.

Les vecteurs normaux dans ces situations seraient:
(i) ni parallèles, ni coplanaires
(ii) coplanaires, mais pas parallèles
(iii) parallèles
(iv) parallèles
(v) deux sont parallèles
(vi) coplanaires, mais pas parallèles.

Exemple:
Considérons les plans $x + 2y + 3z = 10$, $2x + 3y - z = 4$ et $3x + 4y + 5z = 12$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right] L_2 - 2L_1, L_3 - 3L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & -7 & -16 \\ 0 & -2 & -4 & -18 \end{array}\right] L_2 \times -1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & 16 \\ 0 & -2 & -4 & -18 \end{array}\right] L_3 + 2L_2$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \end{array}\right] L_3/10$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 \end{array}\right] L_1 - 3L_3, L_2 - 7L_3$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 29/5 \\ 0 & 1 & 0 & 31/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 \end{array}\right] L_1 - 2L_2$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -33/5 \\ 0 & 1 & 0 & 31/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 \end{array}\right] \text{(FER)}$$

Les plans se croisent en un seul point $(-33/5, 31/5, 7/5)$.

Exemple:
Considérons les plans $x + y - 2z = 4$, $2x + 2y - 4z = 6$ et $3x + 5y + 2z = 10$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 10 \end{array}\right] L_2 - 2L_1, L_3 - 3L_1$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \end{array}\right]$$

C'est un système incompatible, donc il n'y a pas de solution.
Est-ce que vous voyez que deux plans sont parallèles mais distincts ?

Exemple:
Considérons les plans $x - 5y + 2z = 10$, $x + 7y - 2z = -6$ et $8x + 5y + z = 20$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 10 \\ 1 & 7 & -2 & -6 \\ 8 & 5 & 1 & 20 \end{array}\right] L_2 - L_1, L_3 - 8L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 12 & -4 & -16 \\ 0 & 45 & -15 & -60 \end{array}\right] L_2/12$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 45 & -15 & -60 \end{array}\right] L_3 - 45L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] L_1 + 5L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/3 & 10/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(FER)}$$

Donc on a $x + (1/3)z = 10/3$ et $y - (1/3)z = -4/3$.
Soit $z = t$ le paramètre, alors on a $x = 10/3 - (1/3)t$, $y = -4/3 + (1/3)t$ et $z = t$ ou $\vec{r} = [10/3, -4/3, 0] + t[-1/3, 1/3, 1]$. Les plans se croisent en une droite.

Problèmes pratiques

1. Ayant une droite écrite sous la forme vectorielle ou paramétrique, convertissez-la sous l'autre forme.
(a) $x = 2 + t,\ y = 7 - 5t,\ z = 2t$
(b) $[x, y, z] = [3, 4, -2] + t[2, -1, 0]$

2. Écrivez les équations vectorielle et paramétrique de la droite parallèle à $2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ qui passe par le point $(4, 1, -3)$. Est-ce que la droite passe par les points $(16, -17, 3)$ et $(5, 2, -2)$?

3. Écrivez les trois formes de l'équation du plan qui passe par le point $(-2, 1, 3)$ avec un vecteur normal $\vec{n} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$.

4. Écrivez les trois formes de l'équation du plan qui contient les points $(1, 1, 4)$, $(-2, -1, 0)$ et $(3, 2, -5)$. Est-ce que le point $(9, 5, 3)$ appartient au plan ?

5. Déterminez si les droites se croisent et écrivez les solutions si elles existent.
(a) $\vec{r} = [2, 3, -1] + t[2, -1, 2]$ et $\vec{r} = [1, 4, 6] + s[4, -2, 4]$
(b) $x = 2 + t,\ y = -3 - 2t,\ z = 4 - t$ et $x = 3 + s,\ y = 1 + s,\ z = 17 + 6s$

6. Montrez que les droites $[x, y, z] = [1, 0, -1] + s[2, 3, -4]$ et $[x, y, z] = [8, 1, 3] + t[4, -5, 1]$ sont gauches et trouvez la distance entre celles-ci.

7. Est-ce que la droite croise le plan ? Si oui, donnez la solution.
(a) $x = 2 + t,\ y = 1 - 2t,\ z = 3 - t$ et $4x + y + 2z = 10$
(b) $x = 1 + 2t,\ y = -2 + 3t,\ z = 4 - t$ et $x + y + 5z = 19$
(c) $\vec{r} = [2, 0, -4] + t[1, 5, -1]$ et $x + 2y + z = 6$

8. Quelle est la distance entre le point $(3, 2, -1)$ et le plan $2x + 3y + z = 8$?

9. Trouvez la droite à l'intersection des plans $x + 2y + z = 12$ et $2x - y + 3z = 4$.

10. Comment est-ce que les plans se croisent ?
(a) $x + 2y + z = 4,\ 2x - y + z = 7$ et $3x + 2y + 2z = 8$
(b) $x + 2y + z = 4,\ 2x + 4y + 2z = 8$ et $3x + y + 3z = 6$
(c) $x + 2y + z = 4,\ 5x + 6y - z = -2$ et $2x + 4y + 2z = 3$

Solutions des problèmes pratiques

1. (a) $[x, y, z] = [2, 7, 0] + t[1, -5, 2]$
(b) $x = 3 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = -2$

2. La droite est $\vec{r} = [4, 1, -3] + t[2, -3, 1]$ ou $x = 4 + 2t$, $y = 1 - 3t$, $z = -3 + t$
$16 = 4 + 2t \implies t = 6$
$-17 = 1 - 3t \implies t = 6$
$3 = -3 + t \implies t = 6$, donc oui, $(16, -17, 3)$ appartient à la droite.
$5 = 4 + 2t \implies t = 1/2$
$2 = 1 - 3t \implies t = -1/3$
$-2 = -3 + t \implies t = 1$, donc non, $(5, 2, -2)$ n'est pas sur la droite.

3. Comme le vecteur normal est $\vec{n} = [1, -2, 4]$, on a $A = 1$, $B = -2$ et $C = 4$ et l'équation cartésienne est $x - 2y + 4z + D = 0$

Substituons le point $(-2)-2(1)+4(3)+D = 0 \implies D = -8$, donc le plan est $x-2y+4z = 8$. Puis, trouvons deux autres points dans le plan – utilisons $(0, 0, 2)$ et $(8, 0, 0)$.

Alors on a les vecteurs directeurs $[-2, 1, 1]$ et $[-10, 1, 3]$,

donc l'équation vectorielle est $[x, y, z] = [-2, 1, 3] + s[-2, 1, 1] + t[-10, 1, 3]$

et les équations paramétriques sont $x = -2 - 2s - 10t$, $y = 1 + s + t$, $z = 3 + s + 3t$.

4. On a les vecteurs directeurs $\vec{a} = [-3, -2, -4]$ et $\vec{b} = [2, 1, -9]$,

donc l'équation vectorielle est $\vec{r} = [1, 1, 4] + t[-3, -2, -4] + s[2, 1, -9]$

et les équations paramétriques sont $x = 1 - 3t + 2s$, $y = 1 - 2t + s$, $z = 4 - 4t - 9s$.

Le vecteur normal au plan est $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = [-3, -2, -4] \times [2, 1, -9] = [22, -35, 1]$,

donc l'équation cartésienne est $22x - 35y + z + D = 0$.

Substituons le point $(1, 1, 4)$, on a $22(1) - 35(1) + (4) + D = 0 \implies D = 9$,

donc le plan est $22x - 35y + z = -9$.

Substituons $(9, 5, 3)$ dans l'équation $22(9) - 35(5) + (3) = 26 \neq -9$, donc non, $(9, 5, 3)$ n'est pas dans le plan.

5. (a) Les droites sont parallèles, donc soit elles sont distinctes ou soit elles coïncident. Est-ce que le point $(2,3,-1)$ appartient à la deuxième droite ?
$2 = 1 + 4s \implies s = 1/4$
$3 = 4 - 2s \implies s = 1/2$
$-1 = 6 + 4s \implies s = -7/4$, donc non, ce point n'appartient pas à la deuxième droite. Les droites sont distinctes et il n'y a pas d'intersection.

(b) Les droites ne sont pas parallèles, donc soit elles sont gauches, ou soit elles se croisent en un seul point.
Égalisons les coordonnées $2 + t = 3 + s \implies t - s = 1$
$-3 - 2t = 1 + s \implies -2t - s = 4$
$4 - t = 17 + 6s \implies -t - 6s = 13$
La solution $s = -2$, $t = -1$ satisfait les trois équations, donc il y a un (unique) point d'intersection $(1, -1, 5)$

6. Les droites ne sont pas parallèles, donc si elles ne se croisent pas en un seul point, elles doivent être gauches
Écrivons les équations paramétriques et égalisons les coordonnées pour obtenir
$1 + 2s = 8 + 4t \implies 2s - 4t = 7$ (#1.)
$3s = 1 - 5t \implies 3s + 5t = 1$ (#2.)
$-1 - 4s = 3 + t \implies -4s - t = 4$ (#3.)
Mais alors $2 \times$ (#1.) + (#3.) nous donne que $-9t = 18 \implies t = -2 \implies s = -1/2$. Cette solution ne satisfait pas (#2.), donc il n'a pas de point d'intersection.
On a $P_1 = (1, 0, -1)$ et $P_2 = (8, 1, 3)$, donc $\vec{P_1P_2} = [7, 1, 4]$.
Le vecteur normal est $\vec{n} = [2, 3, -4] \times [4, -5, 1] = [-17, -18, -22]$,
donc la distance est $d = \dfrac{|\vec{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \dfrac{|[7,1,4] \cdot [-17,-18,-22]|}{\sqrt{(-17)^2 + (-18)^2 + (-22)^2}} = 225/\sqrt{1097} \approx 6.79$

7. (a) Substituons les équations paramétriques de la droite dans le plan
$4(2 + t) + (1 - 2t) + 2(3 - t) = 8 + 4t + 1 - 2t + 6 - 2t = 15 \neq 10$
La droite et le plan sont parallèles, mais la droite n'appartient pas au plan
Est-ce que les équations vous suggèrent cela ?

(b) $(1 + 2t) + (-2 + 3t) + 5(4 - t) = 1 + 2t - 2 + 3t + 20 - 5t = 19$
La droite est dans le plan, donc chaque point de la droite est solution

(c) $(2 + t) + 2(5t) + (-4 - t) = 2 + t + 10t - 4 - t = -2 + 10t = 6$ si $t = 4/5$
donc il y a un point d'intersection $(14/5, 4, -24/5)$

8. On peut prendre le point $(0, 0, 8)$ du plan. Alors $\vec{PQ} = [-3, -2, 9]$
et $d = \dfrac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \dfrac{|[-3,-2,9] \cdot [2,3,1]|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2}} = 3/\sqrt{14} \approx 0.80$

9. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right] L_2 - 2L_1$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & 1 & -20 \end{array}\right] L_2/-5$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1/5 & 4 \end{array}\right] L_1 - 2L_2$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7/5 & 4 \\ 0 & 1 & -1/5 & 4 \end{array}\right]$

Posons $z = t$, alors on a $x = 4 - (7/5)t$, $y = 4 + (1/5)t$, $z = t$

10. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right] L_2 - 2L_1, L_3 - 3L_1$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \end{array}\right] L_2/-5$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \end{array}\right] L_3 + 4L_2$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & -1/5 & -16/5 \end{array}\right] L_3 \times -5$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right] L_1 - L_3, L_2 - (1/5)L_3$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right] L_1 - 2L_2$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right]$

donc il y a un seul point d'intersection $(-6, -3, 16)$

(b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] L_2 - 2L_1, L_3 - 3L_1$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -6 \end{array}\right] L_2 \leftrightarrow L_3$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] L_2/-5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] L_1 - 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8/5 \\ 0 & 1 & 0 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Posons $z = t$, alors on a $x = 8/5 - t$, $y = 6/5$, $z = t$
et les plans se croisent en une droite
Deux plans coïncident – est-ce que vous le voyez ?

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] L_2 - 5L_1, L_3 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -6 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Le système est incompatible, donc il n'y a pas de solution
Deux plans sont parallèles et distincts – est-ce que vous le voyez ?