Correction Partiel #2

1) a) i) f est continue en $x_0 \in D$ si

1) x_0 est pt d'accumulation de D

2) $\forall$ suite $(\alpha_k) \subseteq D$ / $(\alpha_k) \to x_0$

on a $(f(\alpha_k)) \to f(x_0)$

Dans ce cas on écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ii) f est dérivable en $x_0 \in D$ si

1) x_0 est pt d'accumulation de D

2) $\forall$ suite $(\alpha_k) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ / $(\alpha_k) \to x_0$

on a $\left(\frac{f(\alpha_k) - f(x_0)}{\alpha_k - x_0} \right)$ converge vers un nombre réel

Dans ce cas on écrit ce nombre par $f'(x_0)$

b) <u>Rappels</u> de résultats vus en classe

- Si f est differentiable en x_0 alors f est continue en x_0

- Si (α_n) et (β_n) sont deux suites convergentes alors $(\alpha_n \beta_n)$ est convergente.

Soit $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ / $(x_n) \to x_0$

$$\left(\frac{f(x_n)\,g(x_n) - f(x_0)\,g(x_0)}{x_n - x_0} \right) = \left(\frac{f(x_n)\,g(x_n) - f(x_0)\,g(x_n) + f(x_0)\,g(x_n) - f(x_0)\,g(x_0)}{x_n - x_0} \right)$$

$$= \left(\underbrace{\underbrace{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}_{\downarrow \atop f'(x_0)} \; \underbrace{g(x_n)}_{\downarrow \text{ par continuité} \atop g(x_0)}}_{\downarrow \atop f'(x_0)\,g(x_0)} \right) + \left(\underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{\downarrow \text{ suite cte} \atop f(x_0)} \; \underbrace{\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}}_{\downarrow \atop g'(x_0)}}_{\downarrow \atop f(x_0)\,g'(x_0)} \right)$$

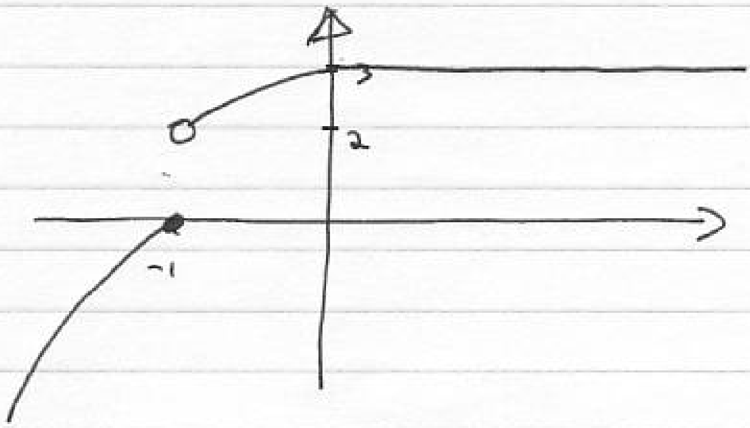
$$\downarrow$$

$$f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

<u>Conclusion</u>: $f \cdot g$ est différentiable en x_0

De plus, $\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)}$

1) c) i)



ii) Comme tout polynôme est continu, ~~donc~~ la fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ où -1 et 0 sont les pts possibles à problème

$\underline{\underline{x=-1}}$: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0 \neq 2 = \lim_{x \to -1^+} f(x)$

$\Rightarrow$ f n'est pas continue en $x=-1$

$\underline{\underline{x=0}}$: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 3 - x^2 = 3 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\Rightarrow$ f est continue en $\boxed{x=0}$

iii) Pour la même raison qu'en ii) f est diff. sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$x = -1$: Comme f n'est pas continue en -1

alors f n'est pas diff. en -1

$x = 0$:
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{3 - (\Delta x)^2 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} -\Delta x = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{3 - 3}{\Delta x}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ f est diff. en $x = 0$ et $\boxed{f'(0) = 0}$

2) a) règle de dérivation en chaîne

$$(e^{x^3+1})' = e^{x^3+1} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3+1}$$

b) règle du quotient

b) $$\left(\frac{(1+2x)^3}{(1-2x)^2}\right)' = \frac{3(1+2x)\cdot 2(1-2x)^{\cancel{2}} - (1+2x)^3\cdot 2\cancel{(1-2x)}\cdot(-2)}{(1-2x)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{6(1+2x)(1-2x) + 4(1+2x)^3}{(1-2x)^3}$$

$$= \frac{(1+2x)}{(1-2x)^3}\left(6-12x+4(1-2x)^2\right)$$

$$= \boxed{\frac{(1+2x)}{(1-2x)^3}\cdot\left(16x^2-28x+10\right)}$$

c) $$\int_0^1 x^2 e^{x^3+1}\,dx = I$$

Par a) on a $\frac{d}{dx} e^{x^3+1} = 3x^2 e^{x^3+1}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}e^{x^3+1}\right)' = x^2 e^{x^3+1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}e^{x^3+1}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}\left(e^2-e\right)}$$

d) $$\int (1+2x)^2\,dx \qquad u = 1+2x, \quad du = 2\,dx$$

$$\Rightarrow \int (1+2x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int u^2\,du = \frac{u^3}{6}+C = \boxed{\frac{(1+2x)^3}{6}+C}$$

3) a) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de f

si $F' = f$ sur $]a,b[$

b) Une fonction simple $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est

une fonction telle que

1) $\exists \quad a = d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_n = b$

et 2) $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

tels que $\quad f(]d_{i-1}, d_i[) = c_i \qquad 1 \leq i \leq n$

c) $\underline{\underline{\text{TFC}}}$: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue

i) La fonction $\begin{aligned} F : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_a^t f(x)\,dx \end{aligned}$

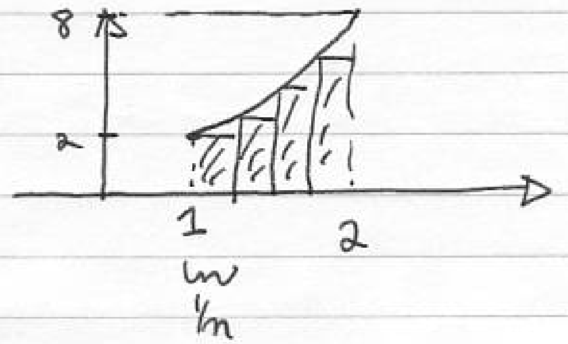
est une primitive de f

ii) Si $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de f

alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

3) d)

inf :



Soit $f_I(x) = \begin{cases} f(1) & 1 \leq x < 1+1/n \\ f(1+1/n) & 1+1/n \leq x < 1+2/n \\ f(1+2/n) & 1+2/n \leq x < 1+3/n \\ \vdots & \\ f\left(1+\frac{n-1}{n}\right) & 1+\frac{n-1}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}$

$$\int_1^2 f_I(x)\,dx = f(1)\frac{1}{n} + f(1+1/n)\cdot 1/n + \dots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right) 1/n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^2$$

$$\boxed{\int_1^2 f_I(x)\,dx = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k-1}{n}\right)^2}$$

sup:

$$f_S(x) = \begin{cases} f(1+1/n) & 1 \le x < 1+1/n \\ f(1+2/n) & 1+1/n \le x < 1+2/n \\ \vdots & \\ f(2) & 1+\frac{n-1}{n} \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\int_1^2 f_S(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$\boxed{\int_1^2 f_S(x)\,dx = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

a) inf:

$$\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{n^2+(k-1)^2+2n(k-1)}{n^2}$$

$$= \frac{k^2+2k(n-1)+(n-1)^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f_I(x)\,dx = \frac{2}{n^3}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2(n-1)\sum_{k=1}^{n} k + (n-1)^2\sum_{k=1}^{n} 1\right\}$$

$$= \frac{2}{n^3}\cdot\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(n-1)\frac{n(n+1)}{2} + (n-1)^2 n\right\}$$

$$= \frac{2}{n^2}\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} + (n-1)(n+1) + (n-1)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{3n^2}\left(14n^2-9n+1\right)$$

$$\int_1^2 f_I(x)\,dx = \frac{14}{3} - \frac{3}{n} + \frac{1}{3n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_I(x)\,dx = \boxed{\frac{14}{3}}$$

b) <u>sup</u>: $\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 = \dfrac{n^2 + 2kn + k^2}{n^2}$

$$\Rightarrow \int_1^2 f_S(x)\,dx = \frac{2}{n^3}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2n\sum_{k=1}^{n} k + n^2\sum_{k=1}^{n} 1\right\}$$

$$= \frac{2}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n^2\cdot n\right\}$$

$$= \frac{2}{n^2}\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) + n^2\right\}$$

$$= \frac{1}{3n^2}\left\{14n^2 + 9n + 1\right\}$$

$$\int_1^2 f_S(x)\,dx = \frac{14}{3} + \frac{3}{n} + \frac{1}{3n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_S(x)\,dx = \boxed{14/3}$$

<u>Conclusion</u>: f est intégrable et $\int_1^2 2x^2\,dx = 14/3$

On vérifie avec le TFC.

Une primitive de $2x^2$ est $\frac{2x^3}{3}$

$$\Rightarrow \quad \int_1^2 2x^2\,dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_1^2$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{14}{3}}$$