

MAT 1720 B : EXAMEN PARTIEL #1

LUNDI LE 2 OCTOBRE 2006

Professeur : Paul-Eugène Parent

- La durée de l'examen est de 80 minutes.
 - Il y a 6 questions. Il y a aussi une question bonus.
 - Répondre aux questions dans les cahiers qui vous sont distribués.
 - Ecrire au stylo.
 - Seules les calculatrices de type TI30xx sont autorisées.
 - Justifiez toutes vos réponses en citant, si nécessaire, le bon résultat vu en classe.
- (1) (5 points) Calculez le quotient $\Delta y/\Delta x$ lorsque $y = 4x^3 - 2$. Simplifiez votre résultat et déduisez la valeur de la dérivée dy/dx .

Réponse :

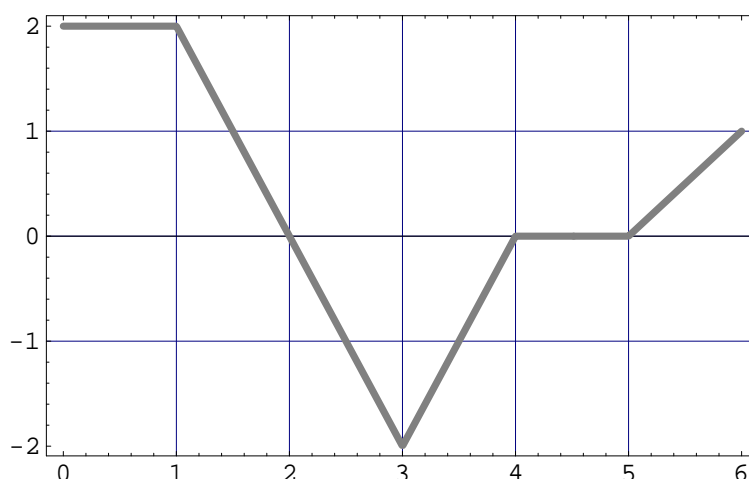
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{4(x + \Delta x)^3 - 2 - (4x^3 - 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{4(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 2 - (4x^3 - 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{4(3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\Delta x} \\ &= \frac{4\Delta x(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ &= 4(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2) \quad \text{car } \Delta x \neq 0.\end{aligned}$$

On laissant $\Delta x \rightarrow 0$, on en tire $\boxed{\frac{dy}{dx} = 12x^2}$.

- (2) (8 points) Soit la fonction $y = f(x)$ définie par le graph ci-dessous :

Calculez les intégrales suivantes géométriquement.

- (a) $\int_0^2 f(t) dt = 1 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 3$
- (b) $\int_2^4 f(t) dt = -\frac{2 \cdot 2}{2} = -2$
- (c) $\int_4^6 f(t) dt = 0 + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$
- (d) $\int_0^6 f(t) dt = 3 + -2 + \frac{1}{2} = 1.5$



$$(e) \int_2^1 f(t) dt = -\frac{1 \cdot 2}{2} = -1 \text{ (Attention aux bornes d'intégration !)}$$

(3) (3 points) Soit \mathbf{a} une suite. Donnez la définition de l'expression

$$\mathbf{a} > 3.$$

Réponse : Il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $a_n > 3$.

(4) (4 points) Soit \mathbf{a} une suite et r un nombre réel. Donnez la définition de l'expression

\mathbf{a} converge vers r .

Réponse : Pour tout $\epsilon > 0$ on a $|\mathbf{a} - r| < \epsilon$.

ou

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $|a_n - r| < \epsilon$.

(5) (10 = 2+3+5 points) Soit \mathbf{a} une suite de terme général

$$a_n = \frac{2n+1}{n}.$$

(a) Ecrire les cinq premiers termes de la suite.

Réponse : $a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1} = 3$, $a_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$, $a_4 = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$ et $a_5 = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{11}{5}$.

(b) Avons-nous $\mathbf{a} > 2$? Répondre oui ou non avec une brève explication (une démonstration complète n'est pas nécessaire).

Réponse : Oui, car $\mathbf{a} = \left(\frac{2n+1}{n}\right) > \left(\frac{2n}{n}\right) = (2)$ la suite constante.

(c) Démontrez que $\mathbf{a} < 2.1$.

Réponse : On voit que $\mathbf{a} = \left(\frac{2n+1}{n}\right) = \left(\frac{2n}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right) = (2) + \left(\frac{1}{n}\right)$, i.e., \mathbf{a} est la somme d'une suite constante, (2), et de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$. Par le principe d'Archimède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $10 < N$, i.e., $\frac{1}{N} < 0.1$. Donc si $n \geq N$ alors $a_n = 2 + \frac{1}{n} < 2.1$.

(6) (10 points) Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Répondre à **une** des deux questions suivantes.

(a) Calculez $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ si la limite existe et démontrez votre résultat.

Réponse : Comme le domaine de f est \mathbb{R} tous les points du domaine sont point d'accumulation. Soit \mathbf{a} une suite qui converge vers 1 tel que $\mathbf{a} \neq 1$. Alors $\mathbf{a} > 0$ par définition de la convergence. Donc $f(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a} + 2$. On a vu en classe qu'un multiple d'une suite convergente converge, qu'une suite constante converge et que la somme de deux suites convergentes converge. On conclue que $f(\mathbf{a}) \rightarrow 2 \cdot \lim \mathbf{a} + 2 = 4$.

(b) Calculez $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ si la limite existe et démontrez votre résultat.

Réponse : Soit \mathbf{a} une suite qui converge vers -1 tel que $\mathbf{a} < -1$. Alors par les mêmes arguments qu'en (a), on a que $f(\mathbf{a}) = -\mathbf{a} + 1 \rightarrow 2$. Soit \mathbf{b} une suite qui converge vers -1 tel que $\mathbf{b} > -1$. Alors par les mêmes arguments qu'en (a), on a que $f(\mathbf{b}) = 2\mathbf{b} + 2 \rightarrow 0$. Malheureusement nous venons de trouver deux façons d'approcher -1 telles que $f(\mathbf{a})$ ne converge pas vers la même limite que $f(\mathbf{b})$. La limite n'existe pas.