

MAT 3530 : LISTE DE PROBLÈMES

Professeur: Paul-Eugène Parent

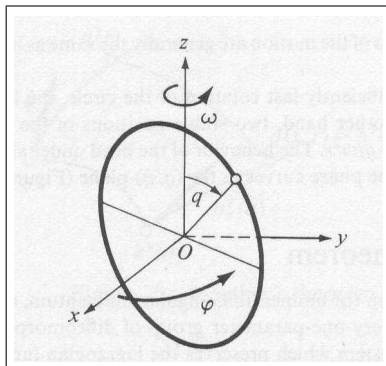
1. p.37 #6, p.59 #10 et p.73 #6
2. Soit $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres distinctes. Soit $t \rightarrow \phi(t, x_0)$ la solution au système $x' = Ax$ avec condition initiale $\phi(0, x_0) = x_0$.
 - a. Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(t, x) = \phi(t, x_0).$$

- b. Trouvez des constantes $a, k \geq 0$ telles que

$$\|\phi(t, x) - \phi(t, x_0)\| \leq a \cdot e^{kt} \|x - x_0\|.$$

3. Soit $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ avec n impair. Montrez que le système possède une solution non périodique. Que se passe-t-il lorsque n est pair ?
4. Une matrice $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est *semisimple* si elle est diagonalisable sur \mathbb{C} . Soit $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice telle que les parties réelles de toutes ses valeurs propres sont ≤ 0 .
 - a. Si A est semisimple alors montrez que toutes les solutions du système $x' = Ax$ sont bornées.
 - b. Que se passe-t-il si A n'est pas semisimple ?
5. Une bille est assujettie à se mouvoir le long d'un cercle vertical empreint d'une vitesse angulaire constante ω (voir la figure suivante). La seule force extérieure agissant sur le système est la gravité.



- a. Trouvez une équation différentielle ordinaire régissant le mouvement de la bille.
- b. A l'aide d'un changement de variable approprié transformez cette EDO d'ordre deux en une EDO d'ordre un.

c. Tracez le diagramme de phase et donnez une interprétation physique de chaque région de celui-ci.

6. p.106 #13, 14 et 15

7. Démontrez la proposition suivante. Soit $\epsilon, \beta > 0$, $C \geq 0$ et $u, v :]-\epsilon, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues et positives. Si

$$u(t) \leq C + \int_0^t u(s)v(s)ds$$

pour tout $t \in [0, \beta[$ alors

$$u(t) \leq Ce^{V(t)},$$

où $V(t) = \int_0^t v(s)ds$.

8. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application Lipschitz et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Démontrez que le système

$$\begin{aligned} x' &= g(x), \\ y' &= f(x)y \end{aligned}$$

admet au plus une solution sur tout interval $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ pour des conditions initiales $x(t_0)$ et $y(t_0)$ données.

9. p.185 #5

10. p.212 #3,4,6,7

11. p.232 #6

12. p.254 #6

13. p.136 #4

14. Quel est le plus petit entier $n > 0$ tel que la solution générale de l'EDO

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

contient les fonctions

$$\sin(2t), \quad 4t^2 e^{2t}, \quad -e^{-t}?$$

Démontrez votre affirmation et donnez un exemple d'une telle EDO.

15. Trouvez la solutions générale des EDO suivantes :

a.

$$x' - 4x - \cos(t) = 0$$

b.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -4x + \sin(2t). \end{aligned}$$

16. a. Soit $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ et V un sous-espace A -invariant de \mathbb{R}^n . Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de l'EDO $X' = AX$. Si $\phi(t_0) \in V$ pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$ alors montrez que $\phi(t) \in V$ pour tous $t \in \mathbb{R}$.

b. Soit

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trouvez un sous-espace V qui soit A -invariant de dimension 2 et qui ne possède pas de base formée de vecteurs propres.

c. Considérons l'EDO $X' = AX$ et $X(0) \in V$ (le sous-espace du b.). Trouvez la solution générale.