Question 6 :

Si $f :]\alpha,\beta[\longrightarrow K \subseteq \mathbb{R}^n$ (K fermé) est unif. continue

alors $\exists!\ \tilde{f} : [\alpha,\beta] \longrightarrow K$ unif. cont. /

$$\tilde{f}\big|_{]\alpha,\beta[} = f$$

DEM : 1) (vue en classe) Soit $(a_n) \subseteq]\alpha,\beta[$ / $(a_n) \longrightarrow \beta$

a) Comme (a_n) converge elle est Cauchy

b) f continue $\Rightarrow (f(a_n))$ Cauchy

c) Toute suite de Cauchy dans un fermé de $\mathbb{R}^n$ doit converger dans ce même fermé

$\therefore$ Soit $\gamma \in K$ / $(f(a_n)) \longrightarrow K$

Et posons $\boxed{\tilde{f}(\beta) := \gamma}$

On fait de même pour $\tilde{f}(\alpha)$ ....

2) à montrer : γ est indep. de la suite (a_n) choisie en 1) ②

Soit $(b_n) \subseteq]\alpha, \beta[$ / $(b_n) \longrightarrow \beta$

Par le même raisonnement que 1) $\exists \gamma' \in K$ / $(f(b_n)) \to \gamma'$

à montrer : $\gamma' = \gamma$

Soit $\varepsilon > 0$

a) $f(a_n) \to \gamma \Leftrightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} / n \geqslant N_1 \Rightarrow \| f(a_n) - \gamma \| < \varepsilon/3$

b) $f(b_n) \to \gamma' \Leftrightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} / n \geqslant N_2 \Rightarrow \| f(b_n) - \gamma' \| < \varepsilon/3$

c) f unif. continue $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 /$ $x, y \in]\alpha, \beta[$ et $\|x - y\| < \delta$
$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon/3$

d) $(a_n) \to \beta \leftarrow (b_n) \Leftrightarrow \exists N_3 \in \mathbb{N} / n \geqslant N_3 \Rightarrow$
$\|a_n - \beta\| < \delta/2$
et $\|b_n - \beta\| < \delta/2$
$\Rightarrow \|a_n - b_n\| < \delta$ (inég. triang.)

e) Soit $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Si $n \geqslant N$ alors $\|\gamma - \gamma'\| \leqslant \|\gamma - f(a_n)\| + \|f(a_n) - f(b_n)\| + \|f(b_n) - \gamma'\|$
$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$

<u>Conclusion</u> : $\gamma = \gamma'$

3) <u>à montrer</u> : $\tilde{f}$ est continue en β

Soit $(\alpha_n) \subseteq [\alpha, \beta]$ une suite / $(\alpha_n) \to \beta$

<u>à montrer</u> : $(\tilde{f}(\alpha_n)) \longrightarrow \tilde{f}(\beta) = \gamma$

<u>2 cas</u> : a) si $\exists N \in \mathbb{N} / n \geqslant N \quad \alpha_n = \beta$ alors ✓

car la suite est éventuellement cte en γ
donc converge en γ

b) sinon. $\exists$ une sous-suite (α_n') de (α_n) /

$(\alpha_n') \subseteq]\alpha, \beta[$

<u>Rappel</u> : si (a_n) converge alors toute sous-suite
converge et converge à la même limite
que celle de (a_n).

$\Rightarrow (\alpha_n') \longrightarrow \beta$

On a vu au 2) que $(\tilde{f}(\alpha_n')) = (f(\alpha_n')) \to \gamma$

$\therefore$ $\tilde{f}$ ~~est~~ est continue en β

4) Finalement toute fonction continue sur un compact est uniformément continue (MAT2520)

$\Rightarrow \tilde{f}$ est unif. continue

$\blacksquare$