# MAT 3530 : EXAMEN PARTIEL

MARDI 27 FÉVRIER 2007

*Professeur: Paul-Eugène Parent*

**Indications :**

- Chaque question vaut **10 points**.
- Tout justifier !
- équation différentielle ordinaire = EDO.

1. Considérons la fonctionnelle suivante

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{D}_1([a,b]) \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \alpha \quad &\mapsto \quad \int_a^b \alpha^2(t) + (\alpha'(t))^2 + 2\alpha(t)e^t dt. \end{aligned}$$

   a. Définissez $\mathcal{D}_1([a,b])$.

   b. Supposons que la différentielle de $\Phi$ est nulle en $\alpha$, i.e., $D\Phi(\alpha) = 0$. Montrez qu'$\alpha$ est solution d'une EDO du type

$$y'' - y = f(t). \tag{1}$$

   Déterminez $f(t)$.

   c. A l'aide d'un changement de variable approprié transformez cette EDO d'ordre deux en une EDO d'ordre un.

   d. Trouvez la solution générale à l'EDO homogène

$$y'' - y = 0.$$

   e. (**BONUS**) Sachant que $\psi(t) = \frac{1}{2}te^t$ est une solution particulière de l'EDO (1), donnez la solution générale de celle-ci.

2. Soit la matrice $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Trouvez les valeurs propres de $A$ (éventuellement dans $\mathbb{C}$).

b. Trouvez les vecteurs propres associés (éventuellement dans $\mathbb{C}^3$).

c. Calculez $e^{At}$ (n'oubliez pas que le résultat doit être dans $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$).

d. Soit l'EDO

$$\begin{aligned} x' &= -4z \\ y' &= -2y \\ z' &= x \end{aligned}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 5 \quad \text{et} \quad z(0) = -7.$$

(i) Trouvez la solution (elle doit être **réelle**).

(ii) Décrivez le comportement asymptotique de la solution, i.e., que se passe-t-il lorsque $t \to \infty$ ?