Rappel : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n \in C^1(U)$ alors $\forall y \in U$ il existe un intervalle maximal $J(y) \ni 0$ et une unique solution $\varphi_y : J(y) \to U$ de l'EDO $\boxed{x' = f(x)} \; \boxed{x(0) = y}$

On peut donc écrire $\varphi_y(t) = \varphi(t, y)$

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times U$ défini par

$$\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times U \; / \; t \in J(y)\}$$

On a donc une fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega &\to U \\ (t, y) &\mapsto \varphi(t, y) \end{aligned}$$

avec la propriété $\varphi(0, y) = y$

Def : On appelle φ le flow (ou système dynamique) associé à $x' = f(x)$

Considérons l'application

$$\tilde{y} : (\alpha, s+t] \longrightarrow U$$

$$r \longmapsto \begin{cases} \varphi(r, y) & \alpha < r \leq t \\ \varphi(r-t, \varphi_t(y)) & t \leq r \leq t+s \end{cases}$$

alors $\tilde{y}$ est solution de l'EDO et $\tilde{y}(0) = y \Rightarrow s+t \in J(y)$

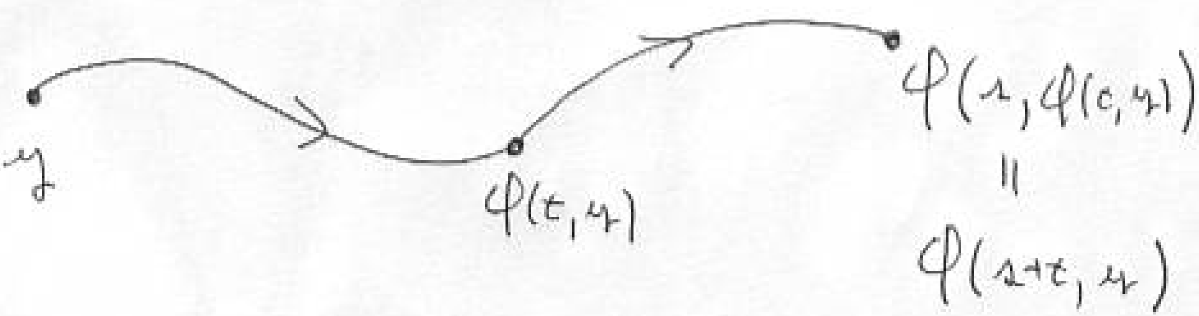
Ex: Lorsque $x' = Ax$ alors $\boxed{\varphi(t, y) = e^{tA} y}$

THM: Soit $t \in J(y)$ et $s \in J(\varphi(t,y))$

alors $$\varphi(t+s, y) = \varphi(s, \varphi(t,y))$$

⚠ le côté gauche peut être défini sans que le côté droit le soit.

$$y = \varphi(0,y) = \underbrace{\varphi(t+(-t), y)}_{\forall t \in \mathbb{R}} \underset{\text{en général}}{\neq} \varphi(t, \varphi(-t,y))$$



THM: $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times U$ est un ouvert. De plus φ est $C^1(\Omega)$ ~~continue~~.

Propriété générique :

Rappel : 1) $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

2) toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes

3) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert si $\forall x \in U$

$$\exists \delta > 0 \ / \ B(x, \delta) \subseteq U$$

Def : Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est dense si

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ une suite $(x_n) \subseteq A$ /

$$(x_n) \longrightarrow x$$

Def : Une propriété P est générique par rapport aux matrices si l'ensemble

$$\{ S \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ / \ S \text{ possède la propriété } P \}$$

est ouvert dense dans $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Contient un

Ex: $\mathcal{P}$: Une matrice $n \times n$ possède n valeurs propres distinctes.

Cette propriété est générique :

1) densité :

Soit A une matrice. $\exists$ P une matrice de changement de base telle que

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

(forme canonique de Jordan)

avec $B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}$

ou $B_k = \begin{pmatrix} C_k & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} & & 0 \\ & C_k & \ddots & \\ & & \ddots & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \\ 0 & & & C_k \end{pmatrix}$ $C_k = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

on remplace chaque B_j par $B'_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ & \lambda_j + 1/n & & \\ & & \lambda_j + 1/n^2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ (5)

ou $\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k + 1/n \\ -(\beta_k + 1/n) & \alpha_k \end{pmatrix}$

alors $A'_n = P D'_n P'$ est une matrice avec des valeurs propres distinctes

et est arbitrairement près de A

Car l'application $F : \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

$B \longmapsto P^{-1} B P$

est continue. $\therefore (D'_n) \to D \Rightarrow (F(D'_n)) \to F(D)$

$(A'_n) \to A$

~~Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ / si $\|A - B\| < \delta$ alors $\|D - D'\| < \varepsilon$~~

~~$\therefore B(A, \delta)$~~

2) ouvert :

Les valeurs propres sont fonction continue des coefficients de la matrice A

On a donc une application continue

$$\Phi : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^n / \Sigma_n$$
$$A \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de A modulo une permutation

remarque : il peut y avoir une répétition

Considérez le fermé de $\mathbb{C}^n$ suivant

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \Big/ \exists\, i \neq j \text{ avec } c_i = c_j \right\}$$

$\Rightarrow \mathbb{C}^n \setminus K$ ouvert

Φ continue $\Rightarrow \Phi^{-1}(\mathbb{C}^n \setminus K)$ ouvert

Ex: Les matrices semisimples sont génériques

l'ensemble des matrices semisimples n'est pas ouvert.

$$\begin{pmatrix}1&0\\ \varepsilon&1\end{pmatrix} \text{ n'est pas semisimple}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\ 0&1\end{pmatrix} \text{ qui est semisimple}$$

Par contre cet ensemble contient l'~~[illegible]~~ exemple précédent qui est ouvert et dense.

Comportement des solutions :

Ex:

$$x' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}\left(x^3 + y^2 x\right) \longleftarrow F_1(x,y)$$

$$y' = x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\left(y^3 + x^2 y\right) \longleftarrow F_2(x,y)$$

$$F(x,y) = \left(F_1(x,y)\,,\, F_2(x,y)\right)$$

On voit que $(0,0)$ est un pt d'équilibre car $F(0,0) = (0,0)$