Solution #9

1) Etudiez la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$

a) Comme $\cos x \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq \frac{x^2}{2} - 1$

(voir le graphique)

b) Trouvons les racines de f à l'aide de la méthode de newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left(\frac{x_n^2}{2} - \cos x_n\right)}{x_n + \sin x_n}$$

a) $x_0 = 1 \leadsto$ $x_1 = 1.0219$

$x_2 = 1.0217$

$x_3 = 1.0217$

$\therefore$ une racine $\tilde{x}_1 \approx 1.0217$

b) $x_0 = -1 \leadsto$ $x_1 = -1.0219$

$x_2 = -1.0217$

$x_3 = -1.0217$

$\therefore$ une deuxième racine $\tilde{x}_2 \approx -1.0217$

Remarque: la fonction est paire donc on devait s'attendre à $|\tilde{x}_1| = |\tilde{x}_2|$.

c) Trouvons les pts critiques

$f'(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 0 \iff x = -\sin x$

il n'y a qu'une intersection (voir graphique)

i.e. $\boxed{x = 0}$

$f(0) = -1$ le pt $\boxed{(0, -1)}$ est le minimum de la fonction

d) Trouvons les "possibles" pts d'inflexion

$f''(x) = 1 + \cos x$

$f''(x) = 0 \iff \cos x = -1 \iff x = (2n+1)\pi$
$n \in \mathbb{Z}$

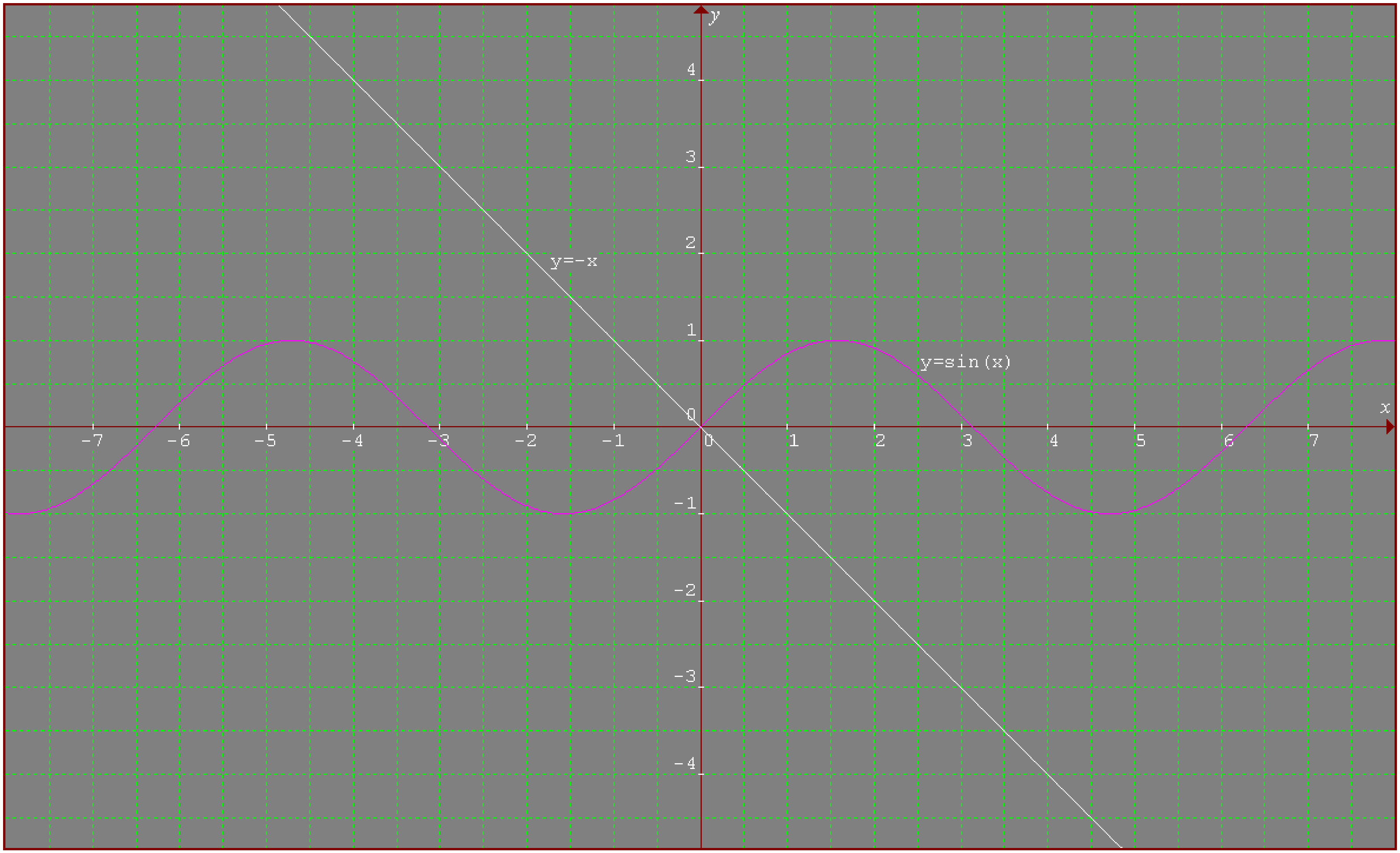
(voir graphique)

mais comme $\cos x \leq 1 \Rightarrow f''(x) \geq 0$

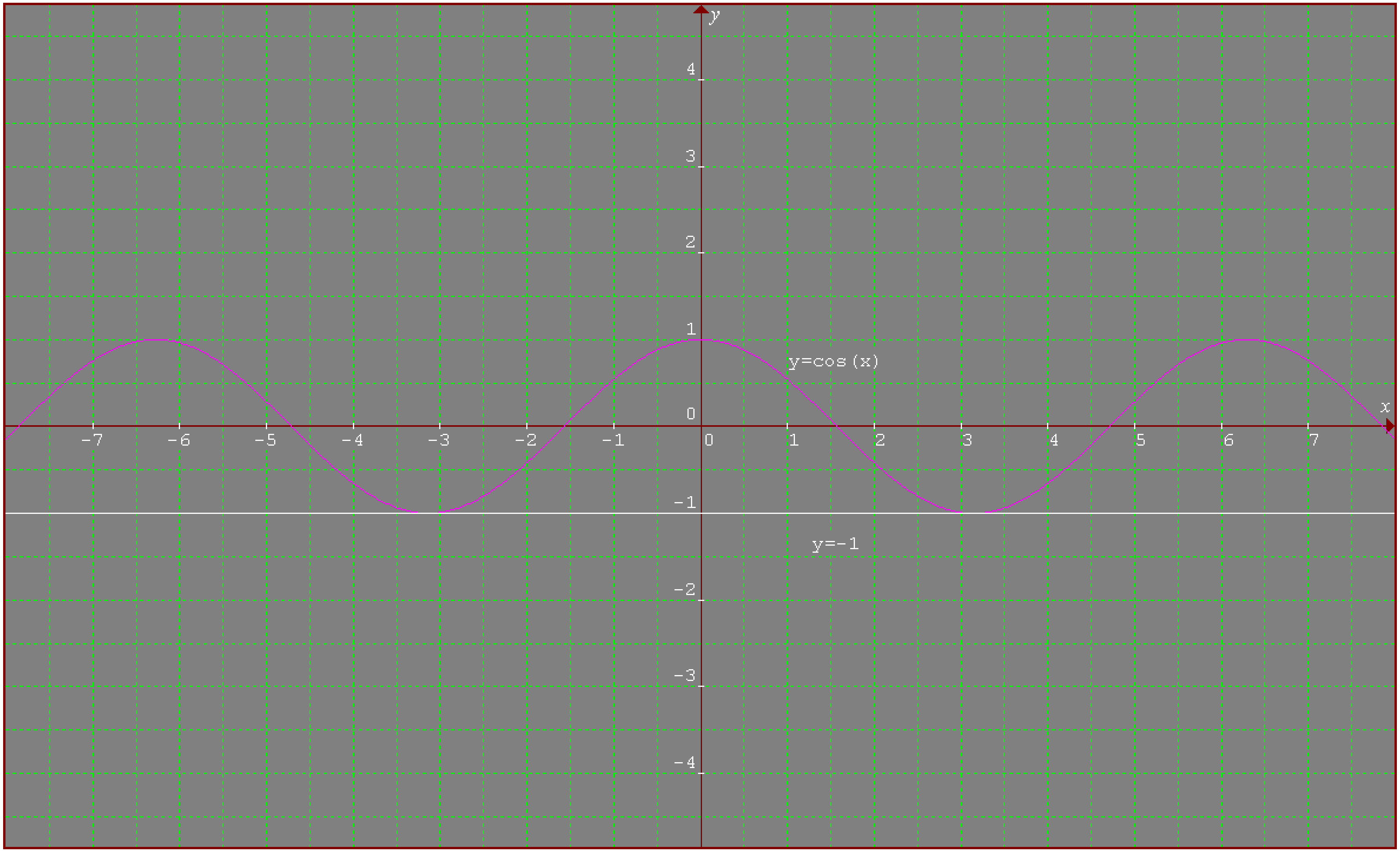
et donc la dérivée $f'(x)$ est toujours croissante

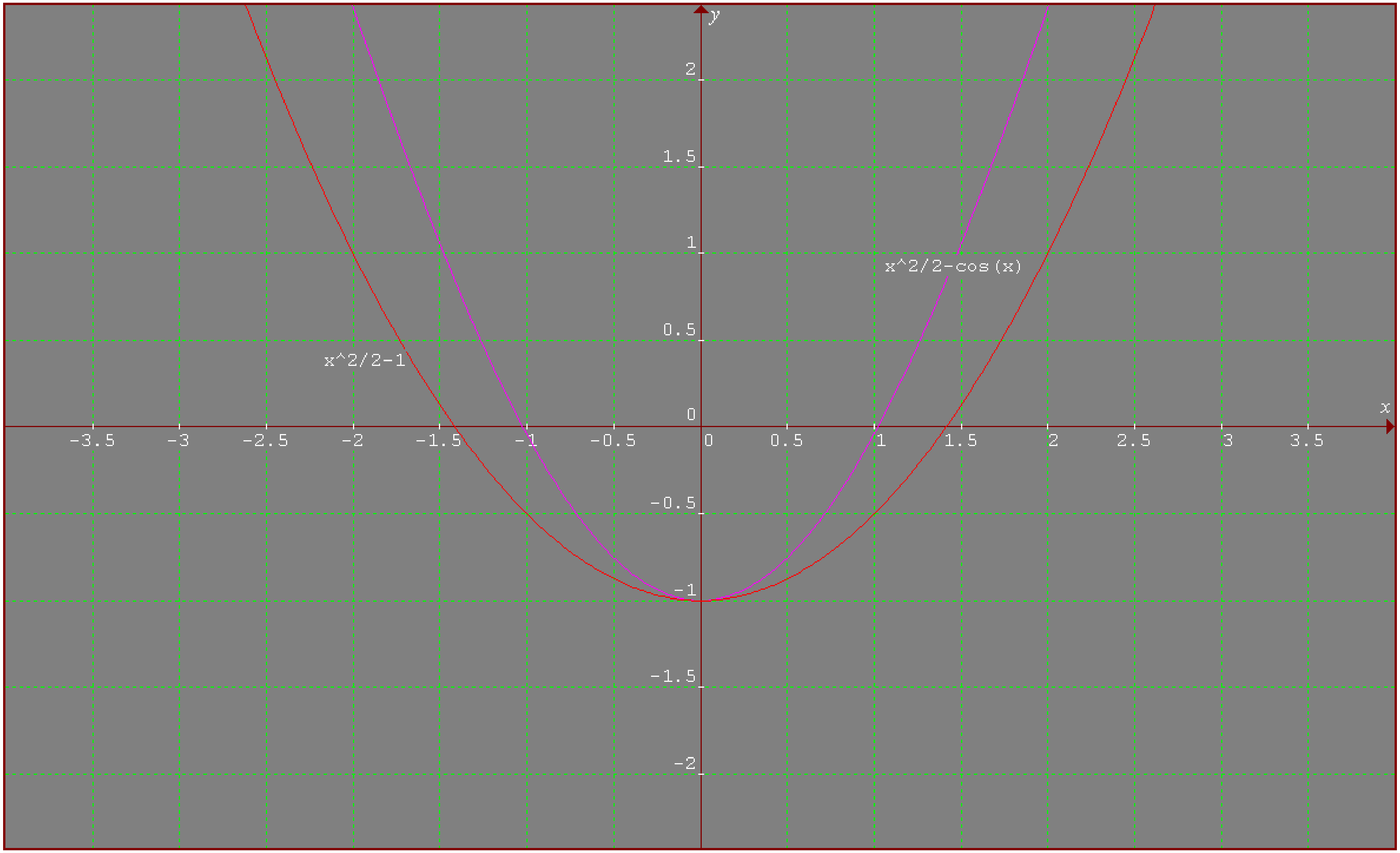
il n'y a donc pas de changement de concavité

Donc aucun pt d'inflexion!



y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
y=-x
y=sin(x)


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
y=cos(x)
y=-1


y
x
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
x^2/2-cos(x)
x^2/2-1

2) a) $\int \frac{dx}{25-x^2} = \int \frac{dx}{(5-x)(5+x)}$ (3)

Nous savons que : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Donc si on nous donne $\frac{ad+bc}{bd}$ alors

peut-on trouver a et c / $\leadsto \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

Supposons possible : alors

$$\frac{A}{5-x} + \frac{B}{5+x} = \frac{A(5+x) + B(5-x)}{(5+x)(5-x)}$$

$$= \frac{1}{25-x^2}$$

$\Rightarrow \quad 5(A+B) = 1 \quad \leadsto$ coeff cte

et $\quad A - B = 0 \quad \leadsto$ coeff de x

$\Rightarrow \quad 10A = 1 \Rightarrow A = 1/10 \Rightarrow B = +1/10$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{25-x^2} = \frac{1}{10} \int \frac{1}{5-x} + \frac{1}{5+x}\, dx = \frac{1}{10}\left(-\ln|5-x| + \ln|5+x|\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{10} \ln\left|\frac{5+x}{5-x}\right| + C}$$

b) $\int \frac{dx}{25+x^2} = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{1+(x/5)^2}$

$$u = x/5 \rightsquigarrow du = \frac{dx}{5}$$

$$\int \frac{dx}{25+x^2} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{5} \arctan u + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{5} \left(\arctan x/5 \right) + C}$$