

Université de Montréal

Quelques propriétés du complexe de  
Morse-Novikov

par

Olivier Rousseau

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

février 2005

**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Quelques propriétés du complexe de  
Morse-Novikov**

présenté par

**Olivier Rousseau**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Iosif Polterovitch*

---

(président-rapporteur)

*Octav Cornea*

---

(directeur de recherche)

*Marlène Frigon*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*23 décembre 2004*

---

## SOMMAIRE

---

Dans ce mémoire, nous étudions en profondeur les propriétés du complexe de Morse associé à une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous utilisons les techniques de la théorie de Morse pour déduire des résultats classiques de la topologie algébrique. Ces techniques nous permettent de généraliser ces résultats sans trop de mal au complexe de Morse-Novikov d'une fonction  $f : M \rightarrow S^1$ . Nous donnons une attention particulière au produit cup et à la dualité de Poincaré.

**Mots clés :** Points critiques, Théorie de Morse, Complexe de Morse-Novikov, Indice de Conley, Dualité.

## SUMMARY

---

In this thesis, we deeply study the Morse complex of a real-valued function  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . We only use techniques given by Morse theory to prove classical results of algebraic topology. This approach allows us to prove similar results for the Morse-Novikov complex of a function  $f : M \rightarrow S^1$ . We give a particular attention to the cup product and the Poincaré duality.

**Keywords :** Critical points, Morse theory, Morse-Novikov complex, Conley index, Duality.

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	iv
<b>Liste des figures</b> .....	vii
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	2
<b>Chapitre 1. Complexes de Morse et de Morse-Novikov</b> .....	6
1.1. Théorie de Morse classique.....	6
1.2. Complexe de Morse.....	10
1.3. Complexe de Morse-Novikov.....	15
1.4. Résultats.....	19
<b>Chapitre 2. Propriétés du complexe de Morse</b> .....	21
2.1. Invariance de l'homologie.....	21
2.2. Un théorème de rigidité.....	26
2.3. Produit cup.....	30
2.4. Invariance du produit cup.....	32
2.5. Une formule de type Mayer-Vietoris.....	36
2.6. Mayer-Vietoris et produit cup.....	42
<b>Chapitre 3. Homotopie et indice de Conley</b> .....	45

3.1. Cofibrations et suites coexactes .....	45
3.2. Indice de Conley .....	53
3.3. Décomposition attracteur-répulseur .....	56
3.4. Liens avec le complexe de Morse .....	59
<b>Chapitre 4. Dualités .....</b>	<b>64</b>
4.1. Produit slant .....	64
4.2. Dualité de Spanier-Whitehead .....	65
4.3. Liens avec l'indice de Conley .....	70
4.4. Dualité de Poincaré .....	75
<b>Chapitre 5. Complexe de Morse-Novikov .....</b>	<b>77</b>
5.1. Zéros de 1-formes .....	77
5.2. Morphisme de comparaison .....	79
5.3. Liens avec l'homologie à coefficients locaux .....	80
5.4. Théorème de «gluing» pour le complexe de Morse-Novikov .....	83
5.5. Dualité de type Poincaré pour le complexe de Morse-Novikov .....	86
5.6. Produit cup pour le complexe de Morse-Novikov .....	88
<b>Bibliographie .....</b>	<b>91</b>
<b>Index .....</b>	<b>93</b>

## LISTE DES FIGURES

---

1.1	Recollement autour du point $x$ d'indice 1, pour la fonction hauteur sur le tore. ....	9
1.2	Le voisinage tubulaire $W$ de $W^U(x)$ . ....	11
1.3	Situations impossibles pour $\mathcal{M}_y^x$ . ....	13
1.4	L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\overline{M}$ . ....	16
2.1	$M \times I \times I$ . ....	25
2.2	Les différentes brisures possibles : à gauche, la ligne de flot se brise sur un point critique de $g$ , à droite, la ligne de flot se brise sur un point critique de $f$ ou de $g - \delta$ . ....	26
2.3	$M \times I \times I$ . ....	28
2.4	Les différentes brisures possibles : à gauche, la ligne de flot se brise sur un point critique de $g$ ou de $f$ , à droite, la ligne de flot se brise sur un point critique de $f + \delta$ ou de $f - \delta$ . ....	29
2.5	L'arbre $T$ . ....	30
2.6	Les différents éléments de $\partial\overline{\mathcal{M}}_{x_3}^{x_1, x_2}$ . ....	31
2.7	En (a), le tripode initial qui peut se briser de 5 manières différentes illustrées dans les figures (b)–(f). ....	34
2.8	Les tripodes dans un voisinage de la brisure sont paramétrés par $[0, \epsilon]$ . ....	36
2.9	La fonction $f$ et son scindement $h$ . ....	38
3.1	Le cylindre d'application $M_f$ . ....	48
3.2	(a) Le cône sur $X$ . (b) La suspension de $X$ . ....	50

3.3	$X \cup CA$ .....	51
3.4	$(X, X \cup CA)$ est une paire NDR.....	52
3.5	Exemple d'une paire d'indices.....	54
3.6	Exemple d'une décomposition attracteur-répulseur.....	58
3.7	Les ensembles $N_x, N_y, L_x, L_y$ .....	61
4.1	Dessin de la situation.....	72
4.2	La rétraction $H$ .....	73
5.1	Les applications $\theta, \theta'$ et $\psi$ .....	85
5.2	$n_{-f}(y, \bar{z}^i x) = n_f(x, z^i y)$ .....	87

# REMERCIEMENTS

---

Je voudrais tout d'abord remercier Octav Cornea, qui m'a fait découvrir un si beau domaine, qui a si bien su me guider dans mes choix mathématiques, me pousser à en faire toujours un peu plus.

Rien de tout ceci n'aurait été possible sans le support constant de Valérie Poulin. Elle m'a grandement aidé, autant psychologiquement que mathématiquement. Elle a toujours été présente, dans les bons comme dans les mauvais moments. Je lui en suis infiniment reconnaissant.

Merci à Paul Dumais, Alexandre Girouard et Rémi Leclerc pour leurs lectures et commentaires.

Un grand merci à tous mes collègues et amis : Alexandre Girouard, Anik Soulière, Baptiste Chantraine, Clément Hyvrier, Étienne Ayotte-Sauvé, Gabriel Chênevert, Jérôme Fournier, Julie Picard, Nicolas Beauchemin, Rémi Leclercq, Sébastien Manka et bien d'autres, qui m'ont fait découvrir les mathématiques... et l'amitié. Je vous dois beaucoup.

Finalement, je voudrais remercier le CRSNG de m'avoir donné les moyens financiers de réaliser cette maîtrise.

# INTRODUCTION

---

Dans ce mémoire, nous étudions en profondeur la théorie de Morse. À l'aide du concept de complexe de Morse, nous parvenons à comprendre l'homologie d'une variété. Cette description de l'homologie par le biais de la théorie de Morse rend plus aisées les généralisations de certains résultats à la théorie de Morse-Novikov ou de Floer, où les méthodes utilisées sont très semblables.

La théorie de Morse a vu le jour dans les années 30. À cette époque, Marston Morse a obtenu quelques résultats intéressants sur la topologie des ensembles de niveau  $M_c = \{f \leq c\}$  d'une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Il regardait comment la topologie de ces ensembles change lorsqu'on passe une valeur critique  $c$ . Sa description est purement homologique.

Plus tard, dans son livre intitulé *Morse theory* ([Mi1]), Milnor décrit géométriquement ce qui se passe en montrant que l'ensemble de niveau  $M_{c+\epsilon}$  a le type d'homotopie de l'ensemble  $M_{c-\epsilon}$  auquel un certain nombre de cellules sont attachées, une par point critique ayant cette valeur critique. La dimension  $ind(x)$  de la cellule correspondant au point critique  $x$  est l'indice de Morse de  $x$ . Ceci nous donne entre autres que toute variété compacte a le type d'homotopie d'un CW-complexe.

Cette idée qu'il correspond à chaque point critique  $x$  de  $f$  une cellule de dimension  $ind(x)$ , nous pousse naturellement à définir un complexe de chaînes dont les générateurs sont les points critiques de  $f$ . La difficulté ici sera de décrire la différentielle de ce complexe, via la théorie de Morse, pour qu'elle corresponde à celle donnée par l'attachement de cellules. Ceci sera fait à l'aide des propriétés dynamiques du flot sur  $M$  donné par le gradient négatif de  $f$ . La construction de ce complexe est due parallèlement à plusieurs mathématiciens, dont Smale,

Witten, Palais, Thom. Cette construction est présentée en grand détail dans le livre de Schwarz ([Sc1]).

Dans le chapitre 1, nous commencerons par présenter les complexes de Morse et de Morse-Novikov. Le point délicat sera de montrer que la différentielle, qui compte algébriquement les lignes de flot entre les points critiques, nous donne bien un complexe de chaînes. Il y a essentiellement trois démonstration de ce fait. Les deux premières consiste à montrer que le nombre de lignes de flot correspond au degré de la fonction relative d'attachement. On obtient donc la différentielle donnée par le CW-complexe associé. Une approche est alors celle de Franks, qui utilise la construction de Thom-Pontryagin, l'autre approche est celle de la théorie de Conley. C'est celle que nous présenterons en détails dans le chapitre 3. La dernière démonstration, consistera à étudier le comportement des lignes de flot brisées. Nous donnerons une idée de cette démonstration dans le chapitre 1, car elle nous sera utile par la suite.

Nous présenterons ensuite le complexe de Morse-Novikov, qui est construit à l'aide d'une fonction  $f : M \rightarrow S^1$ . Cette fonction donnera lieu à une fonction de Morse équivariante sur une certaine variété non compacte. Nous présenterons alors la problématique qui nous interressera, c'est-à-dire que la dualité de Poincaré pour le complexe de Morse-Novikov, ainsi que le produit cup, peuvent tous les deux s'obtenir à partir de leurs analogues pour le complexe de Morse à l'aide d'une formule de type Mayer-Vietoris.

Dans le chapitre 2, nous présenterons plusieurs propriétés du complexe de Morse. Nous nous assurerons que l'homologie obtenue ne dépend pas de la fonction choisie pour le construire. Nous décrirons la dualité de Poincaré, la suite de Mayer-Vietoris (théorème de gluing), un théorème de rigidité à l'aide des méthodes offertes par la théorie de Morse. Nous introduirons le produit cup à l'aide de tripodes et nous verrons que ceci nous donne bien un invariant topologique pour  $M$ .

En fait, les propriétés de la fonction  $f$  qui nous intéressent sont toutes encodées dans le comportement topologique du flot gradient. C'est pourquoi nous présentons dans le chapitre 2, une introduction à la théorie de Conley ([Sa1]),

qui étudie les propriétés des ensembles invariants d'un flot. Nous pourrions alors établir des liens directs avec le complexe de Morse.

Dans le chapitre 3, nous nous attarderons à comprendre ce qui se passe quand le flot est renversé, qui correspond à changer  $f$  par  $-f$  lorsque le flot est donné par le gradient d'une fonction  $f$ . Nous arriverons à une notion de dualité, appelée dualité de Spanier-Whitehead. Les résultats présentés ici sont dus à Cornea ([Co2]). Cette dualité nous mènera entre autres à une autre démonstration de la dualité de Poincaré.

Dans le dernier chapitre, nous investiguerons plus en détails. L'étude d'une fonction  $f : M \rightarrow S^1$  entre dans le cadre plus vaste de l'étude des propriétés dynamiques d'une 1-forme  $\omega \in H^1(M)$  ([Fa1]), car une fonction à valeur dans le cercle peut être vue comme une 1-forme entière. Nous présenterons certaines propriétés du complexe de Morse-Novikov, comme la dualité de Poincaré et le produit cup. Nous présenterons une généralisation du théorème de gluing qui nous permettra de faire le pont entre les arguments classiques et ceux pour le complexe de Morse-Novikov.

Nos principales contributions à la recherche sont premièrement d'avoir rassemblé dans ce mémoire les principaux outils de la théorie de Morse en topologie algébrique en un tout cohérent, d'avoir rendu plus accessibles certains résultats techniques.

Deuxièmement, nous avons clarifié certaines affirmations faites dans la littérature. Par exemple, la démonstration du fait que deux ensembles complémentaires dans la sphère sont Spanier-Whitehead duaux, peut être difficilement recomposée à l'aide de la littérature. Nous donnons une démonstration nouvelle.

Troisièmement, nous avons introduit des nouveaux concepts, comme celui de produit cup pour le complexe de Morse-Novikov, qui est une extension naturelle du produit usuel. La notion de cohomologie de Morse-Novikov, qui n'est pas simplement obtenue à partir du foncteur  $Hom$ .

Finalement, nous avons montré un certain nombre de résultats nouveaux. Nous avons montré que le produit cup, autant dans le cas classique que dans le cas de Morse-Novikov, est naturel par rapport au morphisme de comparaison entre les

complexes de Morse et de Morse-Novikov. Dans cette démonstration, nous avons observé un phénomène particulier, où les éléments de frontière de certains espaces de modules peuvent contenir plusieurs brisures. Nous avons ensuite montré que le produit cup, autant pour le complexe de Morse que pour le complexe de Morse-Novikov, passe à travers la formule de Mayer-Vietoris, avec ce résultat, il est possible de calculer le produit cup sur une variété  $M$  si on le connaît sur certaines variétés  $M^-$  et  $M^+$  telles que  $M = M^- \cup M^+$ . Nous avons également vu que le complexe de Morse-Novikov admettait une dualité de Poincaré et que cette dualité s'obtient du cas classique par une formule de type Mayer-Vietoris.

# Chapitre 1

---

## COMPLEXES DE MORSE ET DE MORSE-NOVIKOV

### 1.1. THÉORIE DE MORSE CLASSIQUE

La théorie de Morse permet d'étudier la topologie d'une variété lisse à l'aide des points critiques d'une fonction à valeur réelle. Par variété, nous entendrons toujours une variété lisse et par fonction, une fonction lisse. Dans cette section, les démonstrations de tous les résultats (à l'exception du théorème de Sard) pourront être trouvées dans le livre de Milnor [Mi1].

Soient  $M$  une variété et

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R},$$

une fonction. La différentielle  $df : TM \longrightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  est une 1-forme sur  $M$ .

**Définition 1.1.1.** *On dit que*

- (1)  $x \in M$  est un point critique de  $f$  si  $df(x) = 0 \in T_x^*M$ , un point  $x$  qui n'est pas un point critique est dit un point régulier.
- (2)  $c \in \mathbb{R}$  est une valeur critique s'il existe un point critique  $x$  avec  $f(x) = c$ , autrement,  $c$  est dite une valeur régulière.
- (3) Pour  $c \in \mathbb{R}$ , on définit  $M_c = f^{-1}((-\infty, c])$ .

Le théorème suivant est classique.

**Théorème 1.1.2** (Sard). *Soit  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ , alors l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  est de mesure nulle.*

**Définition 1.1.3.** *Un point critique  $x \in M$  est dit non-dégénéré si  $df$  est transverse à la section nulle de  $T^*M$  au point  $x$ . On dit que  $f$  est une fonction de Morse si tous ses points critiques sont non-dégénérés.*

Par transversalité, on voit qu'une fonction de Morse a des points critiques isolés et que la condition de Morse est ouverte et dense dans  $\{f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

Soit  $x$  un point critique de  $f$ . À l'aide d'une carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , telle que  $x \in U$ , on peut définir la matrice Hessienne de  $f$  comme étant la matrice des dérivées secondes au point  $\phi^{-1}(x)$  de la fonction  $f \circ \phi^{-1}$ . Cette définition dépend fortement du choix de la carte  $\phi$ , mais un certain nombre de propriétés de cette matrice en seront indépendantes.

**Définition 1.1.4.** *L'indice de Morse d'un point critique  $x$ , noté  $ind_f(x)$ , est le nombre de valeurs propres négatives de la matrice Hessienne de  $f$  au point  $x$ . On note*

$$Crit_q f = \{x \in M : df(x) = 0, ind_f(x) = q\}.$$

*Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, nous noterons simplement  $ind_f(x) = ind(x)$ .*

Les démonstrations des deux prochains lemmes peuvent être trouvées dans le livre de Milnor [Mi1].

**Lemme 1.1.5.** *L'indice de Morse est indépendant du choix de la carte.*

Le fait qu'un point critique  $x$  soit non-dégénéré est équivalent à dire que la Hessienne de  $f$  au point  $x$  est de rang maximal, c'est-à-dire que 0 n'en est pas une valeur propre. L'indice de Morse représente la dimension de l'ensemble où la fonction «descend». Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Lemme 1.1.6** (Lemme de Morse). *Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse et  $x \in M$  un point critique de  $f$ . Alors il existe une carte de  $M$ ,  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $\psi(x) = 0$ , de sorte que la fonction*

$$f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

*soit de la forme*

$$f \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

*On a alors que  $ind_f(x) = k$ .*

Soit  $\alpha$  une métrique sur  $M$ , le gradient de  $f$  est alors bien défini. On construit le flot  $\phi$ , donné par le gradient négatif de  $f$  par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M, \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) &= -\nabla f(\phi(x, t)), \phi(0, \cdot) = id. \end{aligned}$$

Tout ce que nous ferons dans ce mémoire peut être fait avec le flot gradient, mais pour simplifier certains arguments, nous travaillerons plutôt avec des flots pseudo-gradients, qui topologiquement, ont les mêmes propriétés dynamiques que le flot gradient.

**Définition 1.1.7.** *Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse, un flot pseudo-gradient pour  $f$  est un flot  $\phi$  sur  $M$  tel que*

$$\left. \frac{d}{dt} (f(\phi(t, x))) \right|_{t=0} < 0, \forall x \notin \text{Crit} f$$

**Définition 1.1.8.** *Pour  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse,  $\phi$  un flot pseudo-gradient pour  $f$  et  $x$  un point critique de  $f$ , on définit*

(1) la variété stable de  $x$  :

$$W_f^S(x) = \{y \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(y) = x\},$$

(2) la variété instable de  $x$  :

$$W_f^U(x) = \{y \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) = x\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible quant à la fonction, nous noterons simplement  $W^S(x)$  ou  $W^U(x)$ .

**Remarque 1.1.9.** *Pour un point critique  $x$ , les ensembles  $W^S(x)$  et  $W^U(x)$  ont des structures de variétés orientées homéomorphes à des disques ouverts.*

Le fait d'avoir une fonction de Morse définie sur une variété, nous permet d'étudier la topologie de cette variété. Nous supposons maintenant que  $M$  est une variété fermée (compacte, sans bord, connexe). Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse, alors  $f$  ne possède qu'un nombre fini de points critiques. Nous pouvons supposer qu'il n'y a pas deux points critiques ayant la même valeur critique et qu'il n'y a qu'un seul maximum et qu'un seul minimum.

Prenons maintenant un point critique  $x$  de  $f$  d'indice  $k$ . On pose  $f(x) = c$ . Soit  $\epsilon > 0$ , de sorte que  $M_{c+\epsilon} \setminus M_{c-\epsilon}$  ne contienne aucune autre valeur critique. On a alors que

$$U = W^U(x) \cap \{f \geq c - \epsilon/2\} \xrightarrow{\simeq} D^k.$$

On définit la fonction

$$T : \partial U \longrightarrow [0, \infty),$$

$$y \mapsto \sup\{t \in [0, \infty) : \phi_t(y) \notin M_{c-\epsilon}\}.$$

Le supremum est toujours bien défini, car sinon, on aurait un point critique de valeur critique entre  $c - \epsilon$  et  $c + \epsilon$ .

On obtient une fonction

$$\psi : \partial U \longrightarrow M_{c-\epsilon},$$

$$y \mapsto \phi_{T(y)}(y).$$

Cette fonction est importante comme le dit le théorème suivant.

**Théorème 1.1.10.** *Soient  $M$  une variété fermée,  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse et  $x$  un point critique d'indice  $k$  avec  $f(x) = c$ . Alors, il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $M_{c+\epsilon}$  a le même type d'homotopie que  $M_{c-\epsilon}$  auquel on a recollé une  $k$ -cellule. La fonction de recollement est la fonction  $\psi$  ci-dessus.*

Le théorème nous dit donc que  $M$  a le type d'homotopie d'un CW-complexe où l'on rajoute une  $k$ -cellule pour chaque point critique d'indice  $k$ .

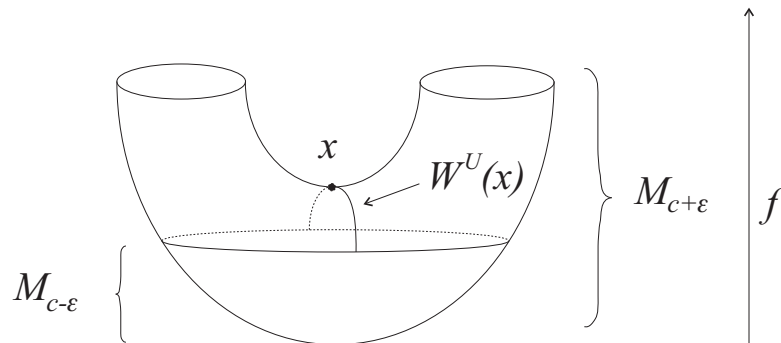


FIG. 1.1. Recollement autour du point  $x$  d'indice 1, pour la fonction hauteur sur le tore.

En fait, la théorie de Morse nous permet aussi de calculer l'homologie de  $M$ .

## 1.2. COMPLEXE DE MORSE

**Définition 1.2.1.** Une fonction de Morse-Smale est une paire  $(f, \phi)$ , où  $f$  est fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\phi$  est un flot pseudo-gradient pour  $f$  tel que les variétés stables et instables des points critiques de  $f$  s'intersectent toutes transversalement. Par abus, nous dirons souvent que  $\phi$  est le flot gradient de  $f$ . Si  $M$  est une variété à bord, on demande également que  $\phi$  soit régulier sur la frontière. C'est-à-dire que le flot n'est jamais tangent à la frontière.

**Proposition 1.2.2.** Soit  $M$  une variété compacte, alors les fonctions de Morse-Smale sur  $M$  sont génériques, c'est-à-dire que l'ensemble

$$\{\phi : (f, \phi) \text{ est de Morse-Smale}\}$$

est ouvert et dense dans l'ensemble des flots pseudo-gradients de  $f$ .

DÉMONSTRATION. Il est clair que cet ensemble est ouvert, car une petite perturbation ne changera pas la transversalité.

Il nous reste à voir qu'il est dense. Soit  $\phi$  un flot pseudo-gradient pour  $f$ . Soient  $x, y \in \text{Crit} f$  tels que  $f(x) > f(y)$  et  $S$  l'hypersurface

$$S = f^{-1}(f(x) - \epsilon).$$

Si  $W^U(x) \cap S$  est transverse à  $W^S(y) \cap S$ , alors  $W^U(x)$  et  $W^S(y)$  sont transverses car le flot agit par difféomorphisme. Si elles ne sont pas transverses, soit  $W$  un voisinage tubulaire de  $W^U(x) \cap f^{-1}([f(x), f(x) - \epsilon])$  tel que  $W \cap W^S(x) = \{x\}$ . Il est clair que l'on peut trouver un flot pseudo-gradient  $\hat{\phi}$  de Morse-Smale sur  $M$  qui ne diffère de  $\phi$  que sur  $W$ . On voit alors que le flot  $\hat{\phi}$  ne perturbe en rien la variété instable de  $x$ .

On peut ordonner les points critiques par leurs valeurs critiques

$$f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n).$$

Maintenant, procédons récursivement pour trouver une déformations  $\phi_k$  d'un flot pseudo-gradient  $\phi_{k-1}$  qui est tel que les variétés stables et instables des points

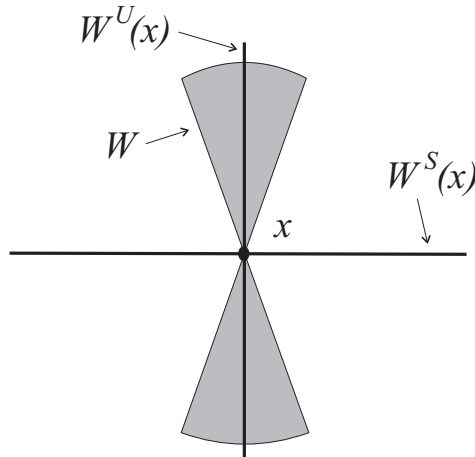


FIG. 1.2. Le voisinage tubulaire  $W$  de  $W^U(x)$ .

critiques  $x_1, x_2, \dots, x_k$  s'intersectent toutes transversalement.  $(f, \phi_n)$  est alors une fonction de Morse-Smale.  $\square$

Si  $f$  est de Morse-Smale, et  $M$  est orientable, on fixe une orientation à chaque variété instable, puis on donne une orientation à chaque variété stable de sorte que

$$\#(W^S(x), W^U(x)) = 1,$$

où  $\#(W^S(x), W^U(x))$  est le nombre d'intersection des variétés  $W^S(x)$  et  $W^U(x)$ .

Si  $M$  est une variété sans bord, on pose

$$C_q(M, f, \alpha) = \mathbb{Z} \langle \text{Crit}_q f \rangle .$$

On définit un homomorphisme

$$d : C_q(M, f, \alpha) \longrightarrow C_{q-1}(M, f, \alpha)$$

$$x \mapsto dx = \sum_{y \in \text{Crit}_{q-1} f} n_f(x, y) y$$

On définit  $n_f(x, y)$  de la manière suivante. Pour  $x, y \in \text{Crit}_f$ , on considère l'ensemble des lignes de flot joignant  $x$  et  $y$  :

$$M_y^x = \left\{ l : (-\infty, \infty) \rightarrow M : l'(t) = -\nabla f(l(t)), \lim_{t \rightarrow \infty} l(t) = y, \lim_{t \rightarrow -\infty} l(t) = x \right\} .$$

On voit que

$$M_y^x = W^U(x) \cap W^S(y).$$

Puisque c'est l'intersection transverse de deux sous-variétés orientées,  $M_y^x$  a une structure de variété orientée.

On a une action libre naturelle de  $\mathbb{R}$  sur  $M_y^x : l \mapsto l + c$ , qui correspond aux reparamétrisations. On pose

$$\mathcal{M}_y^x = M_y^x / \mathbb{R}.$$

$\mathcal{M}_y^x$  est alors une variété orientée, non fermée en général, de dimension  $\mu(x) - \mu(y) - 1$ . On peut voir l'orientation sur  $\mathcal{M}_y^x$  de la manière suivante.

Soit  $p$  sur une ligne de flot  $\gamma$  joignant  $x$  à  $y$ . On peut décomposer

$$T_p W^U(x) \simeq T_p M_y^x \oplus \nu_p W^S(y),$$

où  $\nu_p W^S(y)$  est la fibre du fibré normal de  $W^S(y)$ , car  $W^U(x)$  et  $W^S(y)$  s'intersectent transversalement. Or on peut décomposer

$$T_p M_y^x \simeq T_p \mathcal{M}_y^x \oplus T_p \gamma.$$

De plus, on a que

$$\nu_p W^S(y) \simeq \nu_y W^S(y) \simeq T_y W^U(y),$$

où le premier isomorphisme est donné par le fait que  $W^S(y)$  est contractile (il suffit de pousser le long des lignes de flot). Nous avons alors un isomorphisme

$$T_p W^U(x) \simeq T_p \mathcal{M}_y^x \oplus T_p \gamma \oplus T_y W^S(y).$$

On oriente  $\mathcal{M}_y^x$  de sorte que cet isomorphisme préserve l'orientation.

Supposons à partir de maintenant que  $M$  est compacte, alors si  $\mu(x) - \mu(y) = 1$ ,  $\mathcal{M}_y^x$  est compacte et consiste en un nombre fini de points (chacun représentant une ligne de flot), on peut voir l'orientation comme ceci. On subdivise  $T_x W^U(x)$  dans la somme directe  $T_x \gamma \oplus V$  et on pousse  $V$  le long du flot. On obtient un isomorphisme

$$V \xrightarrow{\cong} T_y W^U(y).$$

Le point représentant la ligne de flot  $\gamma$  aura alors une orientation  $+1$  si cet isomorphisme préserve l'orientation,  $-1$  sinon. On peut alors poser

$$n_f(x, y) = \# \mathcal{M}_y^x.$$

Où  $\# \mathcal{M}_y^x$  est le nombre de points, comptés avec signes dans  $\mathcal{M}_y^x$ .

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur le choix du flot pseudo-gradient, nous écrivons

$$C_*(M, f) = C_*(M, f, \alpha).$$

**Théorème 1.2.3** (R. Thom, S. Smale, J. Milnor, C. Conley, J. Franks, E. Witten).  $(C_*(M, f), d)$  est un complexe de chaîne et

$$H_*(C_*(M, f), d) \cong H_*(M, \mathbb{Z}),$$

où  $H_*(M, \mathbb{Z})$  est l'homologie cellulaire de la variété  $M$ .

DÉMONSTRATION. Il existe essentiellement trois démonstrations de ce théorème. Nous présenterons une de celles-ci en détails dans la section 3.4, en utilisant la théorie de l'indice de Conley. Une autre approche est celle de Franks qui utilise la construction de Thom-Pontryagin. Nous donnons ici une idée de la troisième démonstration.

Prenons  $x, y \in \text{Crit} f$ , tels que  $\mu(y) - \mu(x) = 2$ . Alors on a que  $\mathcal{M}_y^x$  est une variété orientée de dimension 1. On peut montrer que celle-ci admet une compactification  $\overline{\mathcal{M}}_y^x$ , telle que

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_y^x = \bigcup_{z \in \text{Crit}_{\mu(x)-1} f} \mathcal{M}_z^x \times \mathcal{M}_y^z.$$

Ce sont les lignes de flot brisées. Pour montrer cela, il suffit de remarquer que près d'une ligne de flot brisée  $l$ , les lignes de flot dans un voisinage de  $l$  sont paramétrées par  $l \times [0, \epsilon)$ . C'est-à-dire que les situations illustrées dans la figure 1.3 sont impossibles.

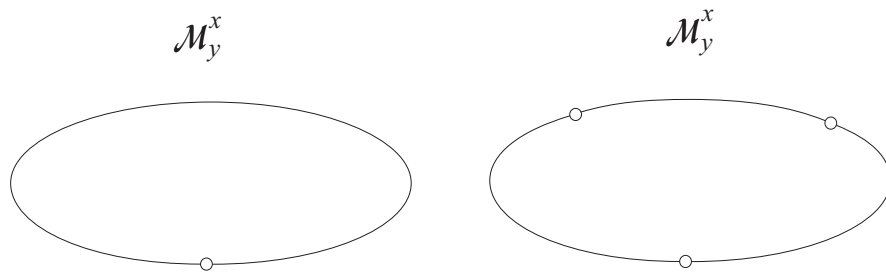


FIG. 1.3. Situations impossibles pour  $\mathcal{M}_y^x$

On voit alors que

$$d^2x = \sum_{y \in \text{Crit}_{\mu(x)-2}} \# \partial \overline{\mathcal{M}}_y^x.$$

Puisque  $\overline{\mathcal{M}}_y^x$  est une variété compacte orientée de dimension 1, on a que

$$\# \partial \overline{\mathcal{M}}_y^x = 0,$$

car  $\overline{\mathcal{M}}_y^x$  est soit un segment, soit un cercle.  $\square$

Les méthodes employées dans cette démonstration sont classiques. Pour montrer certaines identités, il suffit de trouver le bon espace de modules de dimension 1, ayant une compactification de sorte que les éléments de la frontière correspondent aux termes impliqués dans l'identité. Si l'espace de modules est relativement gentil, on aura

$$\# \partial \overline{\mathcal{M}} = 0,$$

ce qui nous donne une relation entre les éléments de  $\partial \overline{\mathcal{M}}$ . La partie la plus délicate est de montrer que cet espace est «gentil». Les détails de ce fait peuvent être trouvés dans [Sc1], où le résultat est montré analytiquement, ou dans [We], où les arguments sont géométriques.

Une certaine compactification des variétés instables  $W^U(x)$ , nous donne une décomposition en cellules de  $M$ . Ce résultat est dû à [BaCo]. On peut donc considérer que

$$C_q(f) = \bigoplus_{x \in \text{crit}_q f} \langle W^U(x) \rangle \mathbb{Z}.$$

Dans ce mémoire, nous aurons également besoin d'une version relative du complexe de Morse. Si  $A \subseteq M$ , on peut définir

$$C_q((M, A), f) = \langle \text{Crit}_q f|_{M \setminus A} \rangle \mathbb{Z}$$

à l'aide d'une fonction

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R},$$

de sorte que  $A$  soit une zone de sortie pour le flot gradient et que celui-ci soit régulier sur  $\partial A$ . On définira de manière plus précise au chapitre 2, en lien avec l'indice de Conley, ce qu'on entend par zone de sortie, mais intuitivement, c'est

la description qui doit correspondre à la version relative du complexe cellulaire : les cellules s'attacheront à  $A$ , car l'application relative d'attachement est donnée par le flot.

On voit alors qu'on a une courte suite exacte de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow C_*(A, f|_A) \xrightarrow{i} C_*(M, f) \xrightarrow{q} C_*((M, A), f) \longrightarrow 0,$$

où  $i$  est l'inclusion naturelle et  $q$  le quotient :

$$q(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in M \setminus A \\ 0, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Nous avons donc une longue suite exacte induite en homologie, le morphisme de connection est clairement

$$\begin{aligned} \delta : C_*((M, A), f) &\longrightarrow C_{*-1}(A, f_A), \\ x &\mapsto \sum_{y \in \text{Crit}_{*-1} f_A} n_f(x, y) y. \end{aligned}$$

### 1.3. COMPLEXE DE MORSE-NOVIKOV

Soient  $f : M \longrightarrow S^1$  une fonction de Morse, c'est-à-dire ayant des points critiques isolés et  $\phi$  un flot pseudo-gradient pour  $f$ . Nous pouvons définir les variétés stables et instables des points critiques de  $f$  comme précédemment. Encore une fois, nous oublierons souvent la référence au flot pseudo-gradient.

**Définition 1.3.1.** *Une fonction de Morse-Novikov est un couple  $(f, \phi)$ , où  $f : M \longrightarrow S^1$  est une fonction de Morse et  $\phi$  est un flot de Morse-Smale. .*

Soit  $f : M \longrightarrow S^1$ , une fonction de Morse-Novikov. On considère le revêtement universel  $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$  et son pullback :

$$\begin{array}{ccc} \overline{M} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{f} & S^1. \end{array}$$

$$\overline{M} = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R} : f(x) = p(t)\}.$$

La fonction  $f$  se relève alors sur une fonction de Morse-Smale équivariante  $\bar{f}$ .

Le groupe d'automorphisme  $\mathbb{Z}$  du revêtement est donné par l'action

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \overline{M} &\longrightarrow \overline{M}, \\ (n, (x, t)) &\mapsto (x, t - n). \end{aligned}$$

L'ensemble

$$M_N = \{(x, t) \in \overline{M} : 0 \leq t \leq 1\}$$

donne un domaine fondamental pour cette action.  $M_N$  est muni d'une fonction de Morse-Smale  $f_N = \bar{f}|_{M_N} = f|_{M \setminus f^{-1}(0)}$ . On relève  $f^{-1}(0)$  à  $M_N$  pour obtenir  $N$ . On note par

$$\mathbb{Z}((z)) = \left\{ \sum_{k=-l}^{\infty} a_k z^k : l \in \mathbb{Z}^+, a_k \in \mathbb{Z} \right\},$$

l'anneau des séries de Laurent en la variable  $z$ .

Pour  $x \in \overline{M}$ , l'élément  $z^n x$  représente le point  $n \cdot x$ , donné par l'action du groupe d'automorphismes. On voit aisément que

$$\text{Crit}_q \bar{f} = \bigcup_{k, x \in \text{Crit}_q f} z^k x',$$

où  $x'$  représente un relèvement au domaine fondamental du point critique  $x$  de  $f$ . Nous avons évidemment  $x = z^0 x$ .

$\overline{M}$

		$N$			
	$\cdot z^{-1}x$	$\cdot x$	$\cdot zx$	$\cdot z^2x$	

FIG. 1.4. L'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\overline{M}$ .

**Proposition 1.3.2.** *Les fonctions de Morse-Novikov sont génériques, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$\{\phi : (f, \phi) \text{ est de Morse-Novikov}\}$$

*est dense dans l'ensemble des flots pseudo-gradients de  $f$ . À remarquer que cet ensemble ne sera pas ouvert en général.*

DÉMONSTRATION. De manière équivalente, nous allons montrer que l'ensemble  $A$  des flots de Morse-Smale équivariants sur  $\bar{M}$  est dense dans l'ensemble  $B$  des flots pseudo-gradients équivariants sur  $\bar{M}$ .

Ordonnons les points critiques de  $f$  :

$$f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n),$$

en considérant que  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Soit  $A_{k,m}$  est l'ensemble des flots pseudo-gradients équivariants sur  $M$  tels que les variétés stables et instables des points critiques  $\bigcup_{k \leq i \leq m} z^{-i} \text{Crit} f \subseteq \text{Crit} \bar{f}$  s'intersectent toutes transversalement. Nous allons montrer que  $A_{k,-m}$  est ouvert et dense dans  $B$ .

Nous pouvons le prouver simplement pour  $k = 0$ . Procédons par récurrence, en modifiant le flot dans un petit voisinage de la variété instable de chaque point critique, en commençant par  $x_2$  jusqu'à  $x_n$ , puis on déforme le flot de la même façon pour  $x_1$  de sorte que la variété instable de  $z^{-1}x_1$  intersecte transversalement les variétés stables des  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Comme les déformations faites ne changent en rien les variétés stables des points critiques, toutes les intersections que nous avons rendues transverses le sont toujours. Nous pouvons continuer ainsi en effectuant les déformations jusqu'au point critique  $z^{-m}x_n$ . Nous avons donc la conclusion voulue.

Maintenant

$$A = \bigcap_{k \leq 0} \bigcap_{m \geq 0} A_{k,m}.$$

C'est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans  $B$ . Le théorème de Baire nous dit alors que  $A$  est dense dans  $B$ .  $\square$

**Définition 1.3.3.** *Le complexe de Morse-Novikov associé à la fonction  $f$  est le complexe donné par*

$$C_q(M; f) = \mathbb{Z}((z)) \langle \text{Crit}_q f \rangle,$$

avec la différentielle  $d$ , qui est un homomorphisme de  $\mathbb{Z}((z))$ -modules :

$$d : C_q(M; f) \longrightarrow C_{q-1}(M; f),$$

$$x \mapsto \sum_{y \in \text{Crit}_{q-1} f} \left( \sum_{k \geq 0} n_f(x, z^k y) z^k \right) y,$$

où  $n_f(x, z^k y)$  est défini comme étant le nombre  $n_{\bar{f}}(x, z^k y)$ .

**Proposition 1.3.4.**  $d^2 = 0$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $x, y \in \text{Crit} f$ , tels que  $\mu(x) - \mu(y) = 2$ . Alors pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a que  $x, z^n y$  et  $M_y^x$  sont inclus dans

$$M_n = \bigcup_{0 \leq k \leq n} z^k M_N.$$

La fonction  $\bar{f}$  se restreint à une fonction de Morse-Smale sur  $M_n$ . La discussion sur le complexe de Morse nous montre que le coefficient de  $z^n y$  de  $d^2 x$  dans  $C_{q-2}(M; f)$  est nul.  $\square$

On pose

$$H_q(M; f) := H_q(C_*(M; f)).$$

**Remarque 1.3.5.** On peut également définir une version relative. Soit  $A \subseteq M$  et  $(f, \phi)$  une fonction de Morse-Novikov, de sorte que  $A$  soit une zone de sortie pour  $\phi$ . On pose alors

$$C_*(M, A; f) = C_*(M; f|_{M \setminus A})$$

et

$$H_*(M, A; f) = H_*(C_*(M; f), d).$$

On a évidemment une longue suite exacte associée à la paire  $(M, A)$ .

**Remarque 1.3.6.** Contrairement au complexe de Morse, l'homologie obtenue dépend de la fonction  $f$ . Si  $f$  est homotopiquement triviale, alors  $\overline{M} \simeq M$  et

$$H_q(M; f) \cong H_q(M).$$

Nous aurons besoin d'une version cohomologique de l'homologie de Morse-Novikov.

**Définition 1.3.7.** *Le complexe de cochaîne est  $(C^q(M; f), \delta)$ , avec*

$$C^q(f) = \mathbb{Z}((z^{-1})) \otimes_{\mathbb{Z}} C^q(M, f).$$

*Chaque générateur  $e_{z^i x}$  peut être vu comme une fonction*

$$e_{z^i x} : C_q(M; f) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$z^k x' \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x' = x, k = i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*De même, chaque élément  $g \in C^q(M; f)$  peut être vu comme une fonction*

$$g : C_q(M; f) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

*Nous avons clairement un isomorphisme de  $\mathbb{Z}((z))$ -modules entre  $C_*(M; f)$  et  $C^*(M; f)$ . Définissons alors pour  $g \in \text{Crit}_q f$ ,  $\delta(g) = g \circ d$ , c'est-à-dire*

$$\delta(g) = \sum_{y \in \text{Crit}_{q+1}} g(dy) y = \sum_{y \in \text{Crit}_{q+1}} n_f(y, x) y.$$

$\delta$  est un homomorphisme de  $\mathbb{Z}((z))$ -modules puisque  $d$  en est un, de plus  $\delta^2 = 0$ . Posons

$$H^q(M; f) = H_q(C^*(M; f), \delta).$$

**Remarque 1.3.8.** *Il est intéressant de remarquer que nous n'avons pas utilisé la définition naturelle*

$$C^*(M; f) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C(M; f), \mathbb{Z}).$$

*car  $\mathbb{Z}((z))$  est la limite inverse sur le degré, des polynômes de Laurent. Il est difficile de déterminer les générateurs de  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C(M; f), \mathbb{Z})$ . C'est la définition donnée ci-haut qui nous sera utile.*

## 1.4. RÉSULTATS

Si  $M$  est une variété compacte, nous avons la dualité de Poincaré.

**Théorème 1.4.1** (Dualité de Poincaré). *Soit  $M$  une variété compacte, orientable. Alors il existe un isomorphisme*

$$H_*(M) \longrightarrow H^{n-*}(M, \partial M).$$

Pour le complexe de Morse, cet isomorphisme est donné en remplaçant la fonction  $f$  par la fonction  $-f$ . Un point critique d'indice  $k$  devient alors un point critique d'indice  $n - k$ . Nous allons montrer ce résultat de plusieurs manières. Nous utiliserons le fait que le nombre  $\#\mathcal{M}_y^x$  pour  $f$  est le même que le nombre  $\#\mathcal{M}_x^y$  pour  $-f$ . Ceci découlera d'un résultat sur l'indice de Conley [Co2]. Nous aurons alors un isomorphisme au niveau des complexes

$$(C_*(M, f), d) \longrightarrow (C^{n-*}(M, \partial M), \delta).$$

De la même façon, nous pourrions montrer que le complexe de Morse-Novikov satisfait une dualité de Poincaré. Nous utiliserons alors une formule de type Mayer-Vietoris pour montrer que la dualité globale pour le complexe de Morse-Novikov peut s'obtenir de la dualité classique sur un domaine fondamental :

**Théorème 1.4.2.** *Soit  $f : M \longrightarrow S^1$  une fonction de Morse-Novikov. La dualité de Poincaré*

$$C_*(M_N, \bar{f}_N) \xrightarrow{\cong} C^{n-*}(M, M_N, -\bar{f}_N),$$

*sur un domaine fondamental  $M_N \subseteq \bar{M}$  s'étend à une dualité*

$$C_*(M; f) \xrightarrow{\cong} C^{n-*}(M; -f).$$

*Cette dualité correspond à une dualité globale que l'on obtient en remplaçant  $f$  par  $-f$ .*

Nous utiliserons également cette formule de Mayer-Vietoris pour montrer que le cup produit passe à travers la formule de Mayer-Vietoris.

**Théorème 1.4.3.** *Soit  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale. Supposons que  $0$  est une valeur régulière de  $f$  et que  $N = f^{-1}(0)$ . Alors il existe une fonction  $h$  aussi près de  $f$  que l'on veut de sorte que le produit cup pour  $f$  peut s'obtenir à partir du produit cup sur  $M^+ = f^{-1}([0, \infty))$  et  $M^- = f^{-1}((-\infty, 0])$  pour  $h$ . Pour le complexe de Morse-Novikov, le produit cup s'obtient du produit cup sur le domaine fondamental  $N$ .*

# Chapitre 2

---

## PROPRIÉTÉS DU COMPLEXE DE MORSE

Dans ce chapitre, nous allons discuter des propriétés du complexe de Morse. Nous allons discuter du morphisme de comparaison induit par une homotopie monotone, d'un théorème de rigidité, du produit cup. Nous allons montrer que le produit cup est naturel par rapport au morphisme de comparaison. Nous allons ensuite présenter une formule de type Mayer-Vietoris et montrer que le produit cup passe à travers cette formule.

### 2.1. INVARIANCE DE L'HOMOLOGIE

Dans cette section, nous allons montrer que l'homologie obtenue à partir du complexe de Morse ne dépend pas de la fonction que l'on a utilisée.

Soient  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ , deux fonctions de Morse-Smale et

$$h : M \times I \rightarrow \mathbb{R},$$

une homotopie de Morse-Smale entre  $f$  et  $g$ . Nous allons tout d'abord montrer qu'il est possible de modifier  $h$  de sorte que

$$\text{Crit}h = \text{Crit}f \sqcup \text{Crit}g.$$

Pour cela, soit

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R},$$

une fonction de Morse-Smale ayant seulement 2 points critiques 0 et 1, ayant respectivement pour indices 1 et 0, par exemple on pourrait prendre

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(x - 1)^2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Nous supposons maintenant que  $h$  est constante sur les deux bouts de  $M \times I$ . C'est-à-dire, il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$h(\cdot, t) = f, \forall t \in [0, \epsilon] \text{ et } h(\cdot, t) = g, \forall t \in [1 - \epsilon, \epsilon].$$

Si ceci n'est pas vrai, il suffit d'allonger  $M \times I$  aux deux bouts. On a alors que la fonction  $h + \alpha$  n'a pas de points critiques dans  $(0, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1)$ . Soient

$$\delta > \inf_{t \in [\epsilon, 1 - \epsilon]} |\alpha'(t)|, \text{ et } S = \sup_{x, t \in [\epsilon, 1 - \epsilon]} \|\nabla h(x, t)\|.$$

Alors la fonction

$$h' = \frac{\delta}{S}h + \alpha$$

est telle que

$$\text{Crit}h' = \text{Crit}f \sqcup \text{Crit}g,$$

car pour  $t \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ , on a

$$\left\| \nabla \frac{\delta}{S}h(x, t) \right\| \leq \delta < |\alpha'(t)|.$$

Maintenant, la fonction  $h'$  est une homotopie entre les fonctions  $f + 1$  et  $g$ . Si on regarde plus attentivement, on voit que

$$\text{Crit}_q h' = \text{Crit}_{q-1} f \sqcup \text{Crit}_q g,$$

car ajouter la fonction  $\alpha$  a eu pour effet de rajouter une direction descendante. La fonction  $h'$  est un cas particulier d'un cobordisme de Morse-Smale simple.

**Définition 2.1.1.** *Un cobordisme de Morse-Smale d'une fonction de Morse-Smale  $f : N_0 \rightarrow \mathbb{R}$  à une fonction de Morse-Smale  $g : N_1 \rightarrow \mathbb{R}$  est un cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  avec une fonction de Morse-Smale*

$$h : M \rightarrow \mathbb{R},$$

de sorte que

(1)  $h|_{N_0} = f$  et  $ind_h(x) = ind_f(x) + 1$ ,

(2)  $h|_{N_1} = g$  et  $ind_h(x) = ind_g(x)$ . On appellera également  $h$  une homotopie monotone.

Le cobordisme est simple si

$$\text{Crit}h = \text{Crit}f \sqcup \text{Crit}g.$$

On a alors  $C_q(h') = C_{q-1}(f) \oplus C_q(g)$ . La différentielle est alors donnée par une matrice

$$d_{h'} = \begin{pmatrix} d_f & 0 \\ H & d_g \end{pmatrix},$$

où  $H$  est un homomorphisme

$$H : C_q(f) \longrightarrow C_q(g),$$

et  $d_f$  et  $d_g$  sont les différentielles respectives de  $C_*(f)$  et  $C_*(g)$ .

**Définition 2.1.2.** On appelle  $H$  le morphisme de comparaison de Morse induit par l'homotopie monotone  $h'$ .

**Proposition 2.1.3.**  $H$  est un isomorphisme en homologie.

DÉMONSTRATION. On remarque tout d'abord que c'est un homomorphisme de complexe de chaînes car l'identité  $d_{h'}^2 = 0$  nous donne

$$d_{h'}^2 = \begin{pmatrix} d_f^2 & 0 \\ Hd_f + d_gH & d_g^2 \end{pmatrix} = 0,$$

donc  $Hd_f = -d_gH$ .

Il nous reste à montrer que c'est un isomorphisme. On considère la courte suite exacte

$$0 \longrightarrow C_{q+1}(g) \xrightarrow{i} C_q(f) \oplus C_{q+1}(g) \xrightarrow{q} C_q(f) \longrightarrow 0.$$

C'est une courte suite exacte de complexe de chaînes. On obtient donc en homologie

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \dots & \longrightarrow & H_q(M, f) \\
 & & & \searrow \delta & \\
 H_q(M, g) & \xrightarrow{i^*} & H_q(C_*(h'), d_{h'}) & \xrightarrow{q^*} & H_{q-1}(M, f) \\
 & & & \searrow \delta & \\
 H_{q-1}(M, g) & \longrightarrow & \dots & & 
 \end{array}$$

On observe la fonction  $\delta$ . Elle est définie de la manière suivante. Soit  $x \in H_q(M, f)$ , le point  $(x, 0)$  est tel que  $q(x, 0) = x$ . Maintenant  $d_{h'}(x, 0) = (d_f x, H(x)) = (0, H(x))$ , et le point  $H(x)$  est tel que  $i(H(x)) = (0, H(x))$ . On a donc

$$\delta = H.$$

Il ne nous reste plus qu'à identifier  $H_q(C_*(h'), d_{h'})$ . On peut allonger un peu  $M \times I$  aux deux bouts et y prolonger  $h'$  sans rajouter de nouveaux points critiques. Pour faire cela, on colle un collet  $M \times [0, \epsilon]$ , à chaque bout, puis on étend  $h'$  en posant

$$h'(x, t) = f(x) + \alpha(1 - t),$$

sur le premier collet et

$$h'(x, t) = g(x) + \alpha(t),$$

sur le deuxième. La fonction étendue sera donc entrante au bout où  $h'$  était sortante et sortante où  $h'$  était entrante. On obtient alors que

$$H_q(C_*(h'), d_{h'}) \simeq H_q(M \times I, M \times \{0\}) = 0,$$

car  $M \times I / M \times \{0\}$  est contractile (voir corollaire 3.1.10). On obtient trivialement que  $H$  est un isomorphisme.  $\square$

En fait, l'homomorphisme  $H$  est unique.

**Théorème 2.1.4.** *Si  $h$  et  $h'$  sont des homotopies monotones entre  $f$  et  $g$ , alors les homomorphismes de comparaison de Morse  $H$  et  $H'$  sont les mêmes en homologie.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\delta > 0$ . Supposons, sans perdre de généralité que  $h$  et  $h'$  sont des homotopies monotones entre  $f + \delta$  et  $g$ . Soit  $k$  une homotopie monotone entre  $g$  et  $g - \delta$ , telle que le morphisme de comparaison de Morse induit est l'identité au niveau des complexes. Par exemple, on peut prendre  $k = g - \delta(1 - \alpha)$ , où  $\alpha$  est une fonction comme auparavant.

Soit  $\sigma$  une fonction

$$\sigma : M \times I \times I \longrightarrow \mathbb{R},$$

de sorte que

$$\sigma(\cdot, \cdot, 1) = h,$$

$$\sigma(\cdot, 1, \cdot) = h',$$

$$\sigma(\cdot, 0, \cdot) = \sigma(\cdot, \cdot, 0) = k,$$

voir figure 2.1.

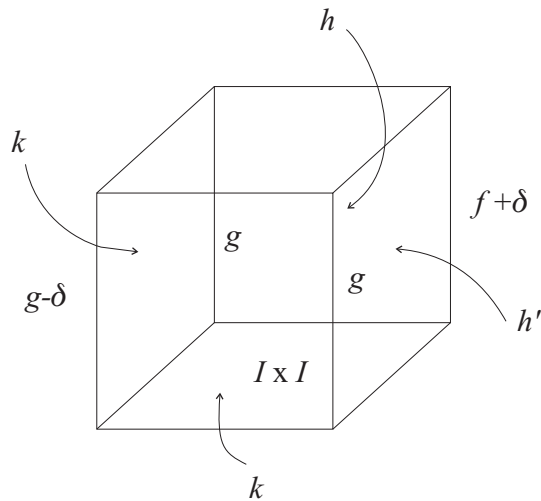


FIG. 2.1.  $M \times I \times I$

On peut supposer que  $\sigma$  est une fonction de Morse-Smale. Prenons maintenant une fonction

$$\eta : I \times I \longrightarrow \mathbb{R},$$

avec  $-\delta < \eta < \delta$ , de sorte que  $\eta$  ait quatre points critiques  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(0, 0)$ , d'indices 2, 1, 1 et 0 respectivement. Quitte à multiplier  $h$  par une

constante, on peut supposer que la fonction  $\sigma' = \sigma + \eta$  a comme points critiques

$$\text{Crit}_{q+2}\sigma = \text{Crit}_q(f + \delta) \sqcup \text{Crit}_{q+1}f \sqcup \text{Crit}_{q+1}g \sqcup \text{Crit}_{q+2}(g - \delta).$$

Définissons

$$\begin{aligned} \psi : C_*(M, f) &\longrightarrow C_{*+1}(M, g), \\ x &\mapsto \sum_y n_\sigma(x, y)y. \end{aligned}$$

Alors, pour  $x \in \text{Crit}f$  et  $y \in \text{Crit}g$ , de sorte que  $\mathcal{M}_y^x$  est de dimension 1, l'espace de modules admet une compactification  $\overline{\mathcal{M}}_y^x$ . Les éléments du bord sont les lignes de flots brisées. Celles-ci peuvent se produire de plusieurs manières (voir figure 2.2).

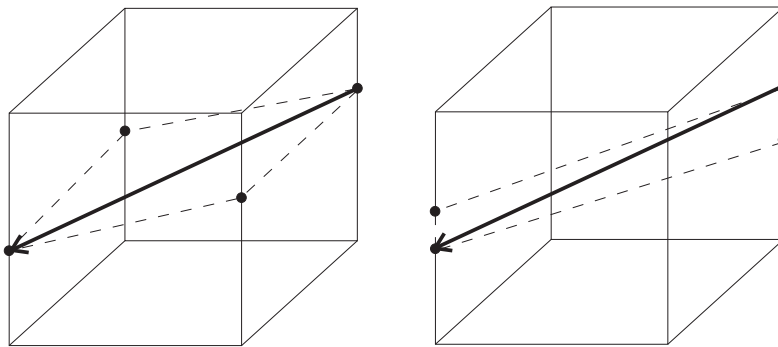


FIG. 2.2. Les différentes brisures possibles : à gauche, la ligne de flot se brise sur un point critique de  $g$ , à droite, la ligne de flot se brise sur un point critique de  $f$  ou de  $g - \delta$ .

Comme  $\#\partial\overline{\mathcal{M}}_y^x = 0$ , on obtient au niveau des complexes

$$id \circ H' + id \circ H = d \circ \psi + \psi \circ d$$

Les morphismes de comparaison  $H$  et  $H'$  sont donc les mêmes en homologie.  $\square$

## 2.2. UN THÉORÈME DE RIGIDITÉ

Nous avons vu dans la section précédente que l'homologie du complexe de Morse ne dépend pas de la fonction choisie. Sous certaines conditions, nous pouvons obtenir plus que cela. Le théorème de rigidité affirme que si une fonction  $g$  est suffisamment près de la fonction  $f$ , il doit y avoir une inclusion de complexes

de chaînes  $C_*(M, f) \hookrightarrow C_*(g)$ . Nous présentons ici la démonstration du théorème de rigidité.

**Théorème 2.2.1 ([CoRa]).** *Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale. Il existe  $\epsilon_f > 0$  tel que pour toute fonction de Morse-Smale  $g$  satisfaisant  $\|f - g\|_0 < \epsilon_f$ , il existe une inclusion*

$$C_*(M, f) \hookrightarrow C_*(g).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\delta > 0$ . Fixons maintenant une homotopie  $h$  entre  $f + \delta$  et  $g$ , et une homotopie  $h'$  entre  $g$  et  $f - \delta$ . Par la discussion de la section précédente, nous pouvons supposer que  $h$  et  $h'$  sont de Morse-Smale et que leurs points critiques sont sur les deux bouts de  $M \times I$ . Nous supposeront également que

$$\begin{aligned} g(x) &\leq h(x, t) \leq f(x) + \delta, \forall t \in I, \\ f(x) - \delta &\leq h(x, t) \leq g(x) + \delta, \forall t \in I. \end{aligned}$$

Nous avons vu dans la dernière section que les homotopies  $h$  et  $h'$  induisent des isomorphismes

$$\begin{aligned} H : C_*(M, f + \delta) &\longrightarrow C_*(M, g) \text{ et} \\ H' : C_*(M, g) &\longrightarrow C_*(M, f - \delta), \end{aligned}$$

en homologie. Nous voulons simplement montrer que

$$H' \circ H = 1_{C_*(M, f)}.$$

On peut trouver des homotopies naturelles  $k$  et  $k'$  entre  $f + \delta$  et  $f$ , et  $f$  et  $f - \delta$  respectivement, de sorte que les homomorphismes induits,  $K$  et  $K'$ , sur les complexes de chaînes soient des isomorphismes. Par exemple, on peut prendre des homotopies de la forme  $f \pm \delta\alpha$ , où  $\alpha$  est la fonction définie dans la section précédente. On a

$$\begin{aligned} K : C_*(M, f + \delta) &\xrightarrow{\cong} C_*(M, f) \text{ et} \\ K' : C_*(M, f) &\longrightarrow C_*(M, f - \delta). \end{aligned}$$

Soit  $\sigma$  une fonction

$$\sigma : M \times I \times I \longrightarrow \mathbb{R},$$

de sorte que

$$\sigma(\cdot, s, t) = f + \delta, \text{ si } s = t = 1,$$

$$\sigma(\cdot, s, t) = g, \text{ si } s = 0, t = 1,$$

$$\sigma(\cdot, s, t) = f, \text{ si } s = 1, t = 0,$$

$$\sigma(\cdot, s, t) = f - \delta, \text{ si } s = t = 0,$$

voir figure 2.3.

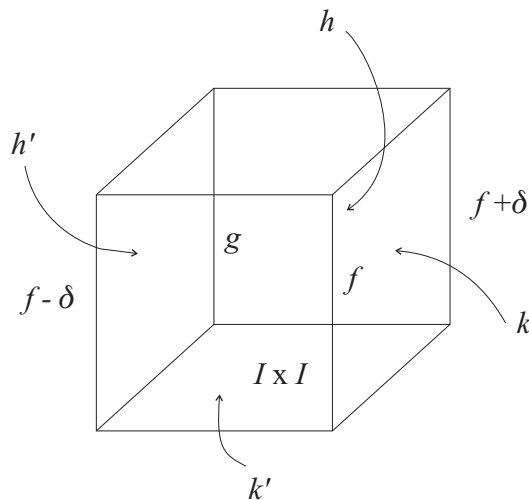


FIG. 2.3.  $M \times I \times I$

On peut supposer que  $\sigma$  est une fonction de Morse-Smale. Prenons maintenant une fonction

$$\eta : I \times I \longrightarrow \mathbb{R},$$

avec  $-\delta < \eta < \delta$ , de sorte que  $\eta$  ait quatre points critiques  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(0, 0)$ , d'indices 2, 1, 1 et 0 respectivement. Quitte à multiplier  $h$  par une constante, on peut supposer que la fonction  $\sigma' = \sigma + \eta$  a comme points critiques

$$\text{Crit}_{q+2}\sigma' = \text{Crit}_q f + \delta \sqcup \text{Crit}_{q+1} f \sqcup \text{Crit}_{q+1} g \sqcup \text{Crit}_{q+2} f - \delta.$$

Soit maintenant  $x \in \text{Crit}_q f + \delta$  et le point correspondant  $\bar{x} \in \text{Crit}_q f - \delta$ . Pour la fonction  $\sigma'$ , on a que

$$\text{ind}_{\sigma'}(x) - \text{ind}_{\sigma'}(\bar{x}) = 2.$$

L'espace de module  $\mathcal{M}_{\bar{x}}^x$  est donc de dimension 1. La frontière de sa compactification  $\overline{\mathcal{M}}_{\bar{x}}^x$  consiste en des lignes de flots brisées de deux types (voir figure 2.4).

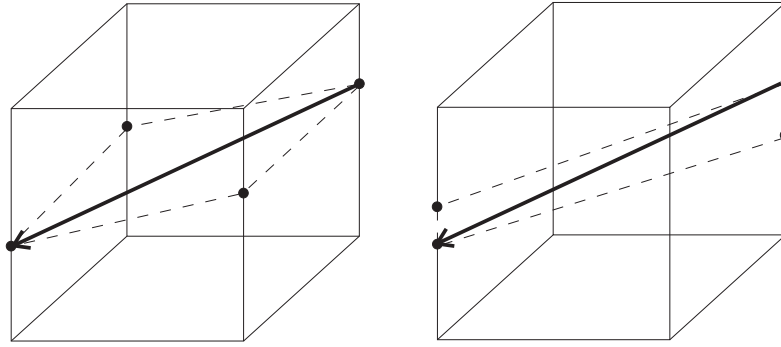


FIG. 2.4. Les différentes brisures possibles : à gauche, la ligne de flot se brise sur un point critique de  $g$  ou de  $f$ , à droite, la ligne de flot se brise sur un point critique de  $f + \delta$  ou de  $f - \delta$ .

Les lignes de flots qui se brisent sur des points critiques de  $f$  ou de  $g$ , comptées avec signes, nous donnent exactement le coefficient de  $\bar{x}$  dans  $H' \circ H(x) + K' \circ K(x)$ .

L'idée est maintenant de fixer  $\epsilon_f > 0$  et  $\delta$  de sorte que les lignes de flot du deuxième type soient impossibles. Nous supposons que tous les points critiques de  $f$  ont des valeurs critiques différentes. Prenons

$$\epsilon_f = \min\{f(x) - f(y) : y \in \text{Crit}_f, \mathcal{M}_y^x \neq \emptyset\}.$$

Si on prend  $\delta < \epsilon_f/2$ , on aura que les lignes de flot joignant  $x$  à  $\bar{x}$  ne pourront se briser sur des points critiques de  $f + \delta$  ou  $f - \delta$ , car le saut serait alors trop grand.

Nous obtenons que le coefficient de  $\bar{x}$  dans  $H' \circ H(x) + K' \circ K(x)$  est exactement  $\partial \mathcal{M}_{\bar{x}}^x = 0$ . Puisque  $K' \circ K$  est un isomorphisme, ce coefficient est soit 1, soit  $-1$ , et l'homomorphisme  $H' \circ H$  est représenté par une matrice triangulaire ayant sur la diagonale des 1 et des  $-1$ . Cette matrice est donc inversible et  $H' \circ H$  est un isomorphisme.  $\square$

### 2.3. PRODUIT CUP

Soit  $T$  l'arbre à trois sommets extérieurs suivant (voir figure 2.5).

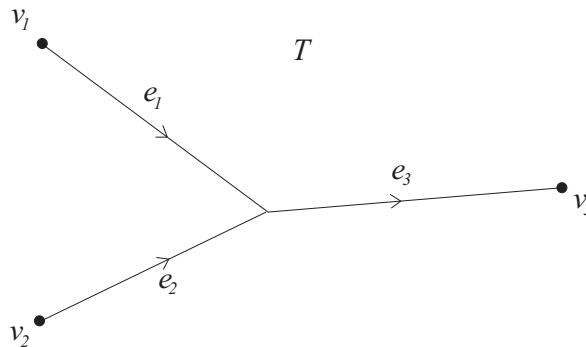


FIG. 2.5. L'arbre  $T$ .

Pour une fonction  $\alpha : T \rightarrow M$ , on note par  $\alpha_i$  la restriction de  $\alpha$  à l'arête  $e_i$ . Soient

$$f_1, f_2, f_3 : M \rightarrow \mathbb{R},$$

choisies de telle sorte que leurs variétés stables et instables s'intersectent toutes transversalement. Un tel choix est générique.

**Définition 2.3.1.** Pour  $x_1 \in \text{Crit}_p f_1$ ,  $x_2 \in \text{Crit}_q f_2$  et  $x_3 \in \text{Crit}_r f_3$ , nous appellerons un tripode de  $x_1$  et  $x_2$  à  $x_3$  une fonction

$$\alpha : T \rightarrow M,$$

telle que

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\nabla f_i, \quad \alpha(v_i) = x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

On définit l'espace de module

$$\mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2} = \{\text{tripodes de } x_1 \text{ et } x_2 \text{ à } x_3\}.$$

On voit aisément que

$$\mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2} = W_{f_1}^U(x_1) \cap W_{f_2}^U(x_2) \cap W_{f_3}^S(x_3).$$

$\mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2}$  a donc une structure de variété orientée de dimension  $p+q-r-n$ . Comme dans le cas du complexe de Morse, on s'intéresse au cas où cet espace de modules

est de dimension 0, c'est-à-dire que  $r = p + q - n$ . On définit

$$\eta : C_p(f_1) \otimes C_q(f_2) \longrightarrow C_{p+q-n}(f_3),$$

$$x_1 \otimes x_2 \mapsto \sum_{x_3 \in \text{Crit}_{p+q-n} f_3} \# \mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2} x_3.$$

**Proposition 2.3.2.**  $\eta$  est un morphisme de complexes de chaînes et définit donc un produit sur  $H_*(M)$ .

DÉMONSTRATION. Si  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont tels que

$$\dim \mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2} = 1,$$

il existe une compactification  $\overline{\mathcal{M}}_{x_3}^{x_1, x_2}$  de  $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2}$  telle que

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{M}}_{x_3}^{x_1, x_2} &= \bigcup_{x' \in \text{Crit}_{\text{ind}(x_1)-1}} \mathcal{M}_{x'}^{x_1} \times \mathcal{M}_{x_3}^{x', x_2} \\ &\quad \bigcup_{x' \in \text{Crit}_{\text{ind}(x_2)-1}} \mathcal{M}_{x'}^{x_2} \times \mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x'} \\ &\quad \bigcup_{x' \in \text{Crit}_{\text{ind}(x_3)+1}} \mathcal{M}_{x'}^{x_1, x_2} \times \mathcal{M}_{x_3}^{x'}. \end{aligned}$$

Voir figure 2.6.

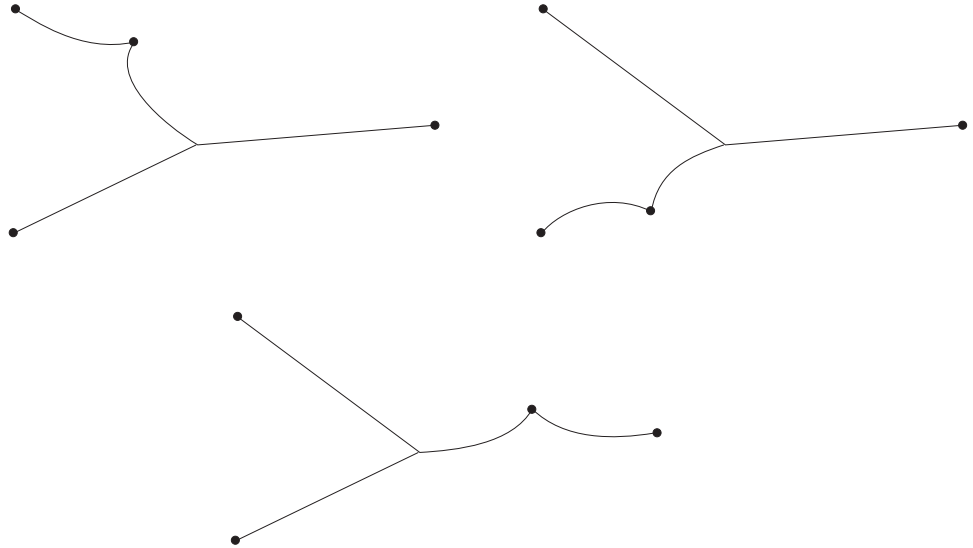


FIG. 2.6. Les différents éléments de  $\partial \overline{\mathcal{M}}_{x_3}^{x_1, x_2}$

Maintenant, pour les mêmes raisons que pour  $d^2 = 0$ , on a

$$\#\partial\overline{\mathcal{M}}_{x_3}^{x_1, x_2} = 0.$$

Ceci nous dit que le produit satisfait une règle de Leibniz

$$d\eta(x_1 \otimes x_2) = \eta(dx_1 \otimes x_2) + (-1)^{\text{ind}_f(x)}\eta(x_1 \otimes dx_2).$$

C'est donc un homomorphisme de complexes de chaînes, celui-ci sera alors bien défini en homologie.  $\square$

**Remarque 2.3.3.** *En passant en cohomologie, à l'aide de la dualité de Poincaré, cette fonction nous donne un produit d'algèbre graduées*

$$H^{n-p}(M) \otimes H^{n-q}(M) \longrightarrow H^{2n-p-q}(M).$$

*Cette fonction est le produit cup. L'interprétation géométrique du produit cup comme intersection des chaînes nous le montre clairement (voir par exemple [Br]).*

## 2.4. INVARIANCE DU PRODUIT CUP

Nous montrons ici que le produit cup est naturel par rapport aux morphismes de comparaison. Ceci nous donnera entre autres que le produit cup ne dépend pas du choix des fonctions choisies pour le définir. À notre connaissance, ceci n'a jamais été fait explicitement. La méthode de preuve est intéressante en soit-même : nous verrons apparaître des doubles brisures dans les espaces de modules, ce qui est assez inusité.

Soient  $f_1, f_2, f_3$ , des fonctions de Morse telles que leurs variétés stables et instables s'intersectent toutes transversalement. Nous avons défini précédemment le produit cup

$$C_p(M, f_1) \otimes C_q(M, f_2) \longrightarrow C_{p+q-n}(M, f_3).$$

Nous noterons ce produit  $\cup_f$ . Soient maintenant  $g_1, g_2$  et  $g_3$  trois autres fonctions possédant les mêmes propriétés, on a alors un produit cup  $\cup_g$ . Pour chaque  $i$ , soit  $h_i$  une homotopie entre  $f_i$  et  $g_i$  ayant toutes les propriétés voulues, de sorte

que l'on puisse construire les morphismes de comparaison  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  entre les complexes de chaînes. On a alors le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} C_p(M, f_1) \otimes C_q(M, f_2) & \xrightarrow{\cup_f} & C_{p+q-n}(M, f_3) \\ \downarrow H_1 \otimes H_2 & & \downarrow H_3 \\ C_p(M, g_1) \otimes C_q(M, g_2) & \xrightarrow{\cup_g} & C_{p+q-n}(M, g_3). \end{array}$$

Puisque les produits  $\cup_f$  et  $\cup_g$  donnent tous les deux le produit cup, il est évident que le diagramme commute en homologie. Nous allons expliciter cela à l'aide de la théorie de Morse, sans faire appel à la topologie algébrique classique.

**Proposition 2.4.1.** *Dans le contexte précédent, il existe une homotopie de complexes de chaînes entre  $H_3 \circ \cup_f$  et  $\cup_g \circ (H_1 \otimes H_2)$ . Celle-ci sera donnée par un morphisme  $\phi$ .*

$$\begin{array}{ccc} C_*(M, f_1) \otimes C_*(M, f_2) & \xrightarrow{\cup_f} & C_*(M, f_3) \\ \downarrow H_1 \otimes H_2 & \dashrightarrow \phi & \downarrow H_3 \\ C_*(M, g_1) \otimes C_*(M, g_2) & \xrightarrow{\cup_g} & C_*(M, g_3). \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Soit  $x \in \text{Crit} f_i$ , on note par  $\tilde{x}$ , le point critique de  $h_i$  correspondant à  $x$ . De même pour les points critiques des fonctions  $g_i$ . On note que

$$\text{ind}_{h_i}(\tilde{x}) = \text{ind}_{f_i}(x) + 1 \text{ et } \text{ind}_{h_i}(\tilde{x}) = \text{ind}_{g_i}(x).$$

Soient  $x_1 \in \text{Crit}_p f_1$ ,  $x_2 \in \text{Crit}_q f_2$  et  $x_3 \in \text{Crit}_n g_3$  de telle sorte que

$$\dim \left( \mathcal{M}_{\tilde{x}_3}^{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2} \right) = 0,$$

où cet espace de module est relatif aux fonctions  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ . Pour cela, il faut que  $\text{ind}_g(x_3) = p + q - n + 1$ . Nous pouvons alors définir le morphisme

$$\begin{aligned} \phi : C_p(M, f_1) \otimes C_q(M, f_2) &\longrightarrow C_{p+q-n+1}(M, g_3), \\ x_1 \otimes x_2 &\mapsto \sum_{x_3} \# \mathcal{M}_{\tilde{x}_3}^{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2} x_3. \end{aligned}$$

Nous voulons montrer que nous avons l'identité

$$H_3 \circ \cup_f + \cup_g \circ (H_1 \otimes H_2) = \pm(\phi \circ d_f + d_g \circ \phi).$$

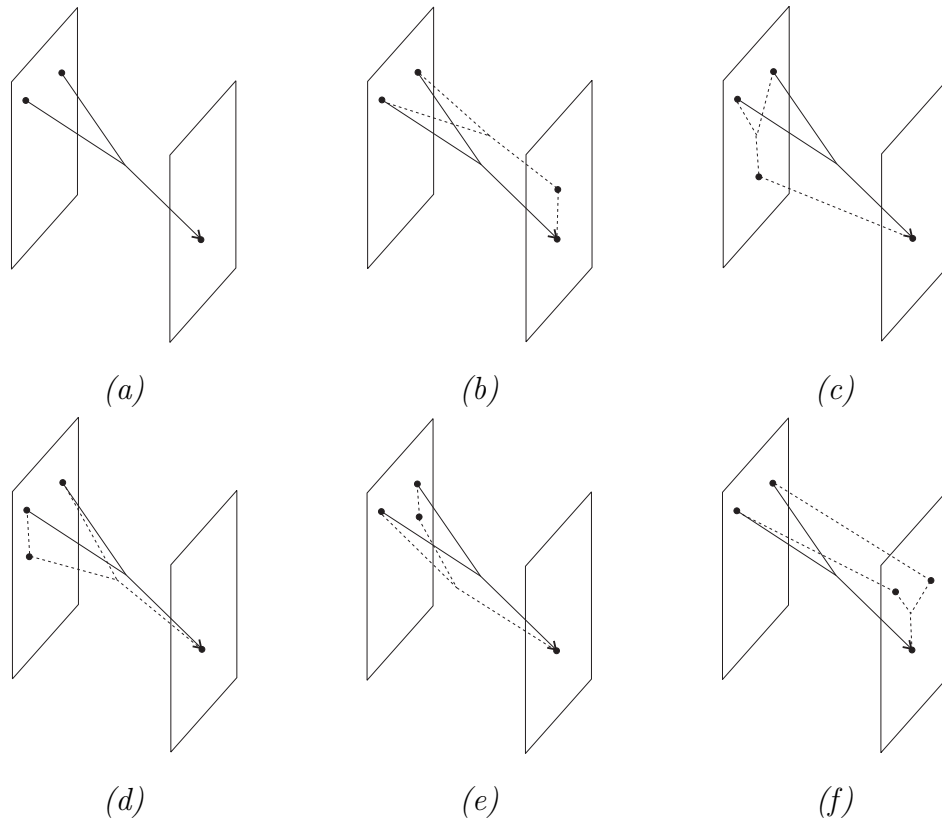


FIG. 2.7. En (a), le tripode initial qui peut se briser de 5 manières différentes illustrées dans les figures (b)–(f).

Pour faire cela, nous trouvons un bon espace de modules. Soient  $x_1 \in \text{Crit}_p f_1$ ,  $x_2 \in \text{Crit}_q f_2$  et  $x_3 \in \text{Crit} g_3$  de telle sorte que

$$\dim \left( \mathcal{M}_{x_3}^{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2} \right) = 1.$$

Il est possible de compactifier naturellement cet espace de modules, les points limites apparaissent naturellement quand le temps pour parcourir une ligne de flot tend vers l'infini, la ligne de flot se brise alors sur un point critique. Les possibilités sont représentées à la figure 2.7.

Les lignes de flot de types (b) représentent le terme

$$H_3 \circ \cup_f.$$

C'est-à-dire que le nombre algébrique de ces lignes de flots est le coefficient de  $x_3$  dans  $H_3 \circ \cup_f$ . De même, les lignes de flot de type  $(c)$  représentent le terme

$$d_g \circ \phi.$$

Celles de type  $(d)$  et  $(e)$ , représentent les termes  $\phi \circ (d_{f_1} x_1 \otimes x_2)$  et  $\phi \circ (x_1 \otimes d_{f_2} x_2)$ , c'est-à-dire, le terme de la forme

$$\phi \circ d_f.$$

Il est plus délicat de voir qu'il y a des lignes de flots de type  $(f)$ . Les seules brisures qu'il nous reste à investiguer sont celles lorsqu'une des branches initiales du tripode se brise sur un point critique  $y_1$  de  $g_1$ . Si tel est le cas, il faut absolument que le point milieu  $m$  du tripode soit dans  $M \times \{1\}$ , car le flot y est interne. Pour la même raison, il est impossible qu'une ligne de flot entre dans  $M \times \{1\}$  par un point non critique. Comme le point  $m$  ne peut être critique, il faut que l'autre branche initiale se brise sur un autre point critique  $y_2$  de  $g_2$ . On obtient la situation  $(f)$ , qui correspond au terme de la forme

$$\cup_g \circ (H_1 \otimes H_2).$$

Nous avons bien entendu que  $\#\partial\mathcal{M}_{x_3}^{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2} = 0$ , ce qu'il nous reste à vérifier, c'est que c'est bien le coefficient de  $x_3$  dans

$$H_3 \circ \cup_f + \cup_g \circ (H_1 \otimes H_2) + \phi \circ d_f + d_g \circ \phi.$$

C'est-à-dire que les tripodes brisés ajoutés à  $\mathcal{M}_{x_3}^{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2}$  admettent des voisinages paramétrés par  $[0, \epsilon]$ . Pour les tripodes de type  $(b)$ ,  $(c)$ ,  $(d)$  et  $(e)$ , nous sommes dans la situation classique. Dans le cas  $(f)$ , il faut remarquer qu'un tripode est entièrement déterminé par son point central. Puisque  $\dim\mathcal{M}_{x_3}^{y_1, y_2} = 0$ , le point central ne peut bouger dans  $M \times \{1\}$ . On peut donc paramétrer les tripodes dans un voisinage de ce tripode brisé par la distance du point central à  $M \times \{1\}$ , c'est-à-dire  $[0, \epsilon]$  (voir figure 2.8).

□

Nous pouvons donc conclure que

$$\cup_f = \cup_g$$

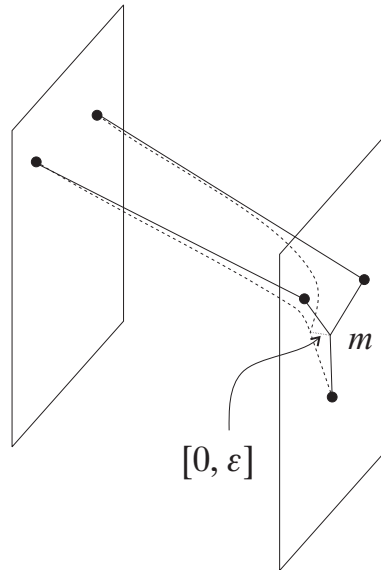


FIG. 2.8. Les tripodes dans un voisinage de la brisure sont paramétrés par  $[0, \epsilon]$ .

en homologie.

## 2.5. UNE FORMULE DE TYPE MAYER-VIETORIS

Dans ce mémoire, notre but principal est de voir que l'on peut reconstruire le produit cup et la dualité de Poincaré à l'aide d'informations locales. Ceci sera particulièrement intéressant dans le cas du complexe de Morse-Novikov, où nous pourrons reconstruire le complexe à l'aide du domaine fondamental. Pour cela, nous aurons besoin d'une formule de type Mayer-Vietoris. Nous résumons ici un résultat de Cornea et Ranicki ([CoRa]).

Soient  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale et  $N$  une hypersurface régulière. Nous supposons que 0 est une valeur régulière de  $f$  et que

$$N = f^{-1}(0).$$

$N$  divise alors  $M$  en deux parties

$$M^- = f^{-1}((-\infty, 0]) \text{ et}$$

$$M^+ = f^{-1}([0, +\infty)).$$

$M^-$  et  $M^+$  sont munies de fonctions de Morse-Smale  $f^- = f|_{M^-}$  et  $f^+ = f|_{M^+}$ .

Une formule de type Mayer-Vietoris devrait nous permettre de reconstruire le complexe  $C_*(M, f)$  à partir des complexes  $C_*(M^-, f^-)$  et  $C_*(M^+, f^+)$ . On voit qu'en fait

$$C_*(M, f) = C_*(M^+, f^+) \oplus C_*(M^-, f^-),$$

avec la différentielle

$$d_f = \begin{pmatrix} d_{f^+} & 0 \\ \phi & d_{f^-} \end{pmatrix},$$

où  $\phi$  est la fonction

$$\begin{aligned} \phi : C_*(M^-, f^+) &\longrightarrow C_*(M^+, f^-) \\ x &\mapsto \sum_y n_f(x, y)y. \end{aligned}$$

Le problème est que cette fonction  $\phi$  n'est pas connue, on ne peut la déduire à partir des informations de  $f^-$  et de  $f^+$ . Pour que l'on soit capable de reconstituer  $C_*(M, f)$ , il faudrait que  $f$  soit d'un type très spécial : il faudrait que les lignes de flot qui traversent de  $M^+$  à  $M^-$  se brisent sur des points critiques de l'intersection  $N = M^- \cap M^+$ .

La démarche que nous allons suivre va aller en ce sens, nous allons approcher  $f$  par une fonction  $h$ , qui elle a les propriétés voulues. Nous aurons pour cela besoin d'une fonction de Morse-Smale  $g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $h$  sera alors appelée un scindement de  $f$  le long de  $g$ . Nous avons besoin de la définition de cobordisme linéaire.

**Définition 2.5.1.** *Soient  $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de Morse-Smale telles que  $g \geq f$ . Un cobordisme linéaire entre  $f$  et  $g$  est un cobordisme simple*

$$h : N \times ([0, 1], \{0\}, \{1\}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

*entre  $f$  et  $g$  tel que pour chaque  $t \in [0, 1]$ , la fonction  $h_t$  soit une combinaison linéaire convexe de  $f$  et  $g$ , et que  $\partial h / \partial t > 0$  pour tout point de  $N \times (0, 1)$ .*

**Définition 2.5.2.** *Un scindement  $(\epsilon, \tau)$  d'une fonction de Morse-Smale  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  le long d'une fonction de Morse-Smale  $g : N = f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Morse-Smale*

$$h : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que  $h$ ,  $h^- = h|_{M^-}$  et  $h^+ = h|_{M^+}$  satisfont les propriétés suivantes :

(1)  $h^-|_N = h^+|_N = \tau g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\tau \in \mathbb{R}^+$ .

(2)  $h = f$ , sauf dans un voisinage tubulaire  $W = N \times [-\epsilon, \epsilon] \subseteq M$  de  $N = N \times \{0\} \subseteq M$ .

(3) Avec cette paramétrisation, on a  $f(x, t) = t$  pour chaque  $(x, t) \in W$  et

$$\text{Crit}_q h = \text{Crit}_q f \sqcup (\text{Crit}_{q-1} g \times \{-\epsilon/2\}) \sqcup (\text{Crit}_q g \times \{\epsilon/2\}),$$

$$\text{Crit}_q h^- = \text{Crit}_q f^- \sqcup (\text{Crit}_{q-1} g \times \{-\epsilon/2\}),$$

$$\text{Crit}_q h^+ = \text{Crit}_q f^+ \sqcup (\text{Crit}_q g \times \{\epsilon/2\}),$$

(4) Si  $W_\epsilon = N \times [-\epsilon/2, \epsilon/2]$ ,  $g_\epsilon = h|_{W_\epsilon}$  est un cobordisme linéaire.

Voir figure 2.9.

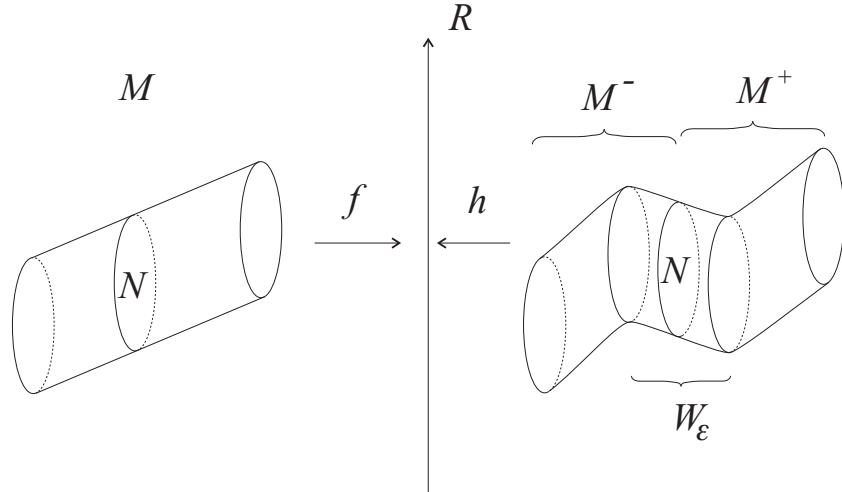


FIG. 2.9. La fonction  $f$  et son scindement  $h$ .

**Proposition 2.5.3.** Soit  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale. Alors pour toute fonction de Morse-Smale  $g : N = f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{R}$  et pour tout  $\delta > 0$ , il existe un scindement  $(\epsilon, \tau) h$  de  $f$  le long de  $g$ , de sorte que

$$\|h - f\|_0 \leq \delta.$$

DÉMONSTRATION. La construction est semblable à celle du morphisme de comparaison.  $\square$

On a clairement que

$$\begin{aligned} C_*(M^+, h^+) &= C_*(M^+, f^+) \oplus C_*(N, g) \text{ et} \\ C_*(M^-, h^-) &= C_{*-1}(N, g) \oplus C_*(M^-, f^-), \end{aligned}$$

avec les différentielles

$$\begin{aligned} d_{h^+} &= \begin{pmatrix} d_{f^+} & 0 \\ \theta^+ & d_g \end{pmatrix} \text{ et} \\ d_{h^-} &= \begin{pmatrix} d_{f^-} & 0 \\ \theta^- & d_g \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \theta^+ : C_*(M^+, f^+) &\longrightarrow C_{*-1}(N, g), \\ x &\mapsto \sum_y n_{h^+}(x, y)y \text{ et} \\ \theta^- : C_*(N, g) &\longrightarrow C_*(M^-, f^-), \\ x &\mapsto \sum_y n_{h^-}(x, y)y. \end{aligned}$$

Maintenant, à partir des complexes  $C_*(M^-, h^-)$  et  $C_*(M^+, h^+)$ , il est aisé de reconstruire le complexe  $C_*(M, h)$ , car  $C_*(M, h) = C_*(M^+, h^+) \oplus C_*(M^-, h^-)$  et

$$d_h = \begin{pmatrix} d_{h^-} & 0 \\ \phi & d_{h^+} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \phi : C_*(M^-, f^-) \oplus C_{*-1}(N, g) &\longrightarrow C_{*-1}(N, g) \oplus C_{*-1}(M^+, f^+), \\ \phi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous aimerions faire plus, c'est-à-dire être capable de reconstituer le complexe de  $f$  à partir de ceux de  $h^-$  et de  $h^+$ . Remarquons tout d'abord que  $C_*(W, h_\epsilon) =$

$C_*(N, g) \oplus C_{*-1}(N, g)$ , où  $h_\epsilon = h|_W$ , a pour différentielle

$$d_{h_\epsilon} = \begin{pmatrix} d_g & -1 \\ 0 & d_g \end{pmatrix}.$$

Définissons

$$\begin{aligned} \eta : C_*(W, h_\epsilon) = C_*(N, g) \oplus C_{*-1}(N, g) &\longrightarrow C_*(M, h) = \\ &C_*(M^+, f^+) \oplus C_*(N, g) \oplus C_{*-1}(N, g) \oplus C_*(M^-, f^-), \\ (x, y) &\mapsto (0, x, y, \theta^-x). \end{aligned}$$

On remarque que  $\eta$  est un morphisme de complexes de chaînes, car

$$\eta(d_{h_\epsilon}(x, y)) = \eta(d_gx - y, d_gy) = (0, d_gx - y, d_gy, \theta^-(d_gx) + \theta^-(y))$$

et

$$d_h(\eta(x, y)) = d_h(0, x, y, \theta^-(x)) = (0, d_gx - y, d_gy, d_f\theta^-(x) + \theta^-(y)).$$

L'égalité est immédiate car  $\theta^-$  est un morphisme de complexes de chaînes.

Posons

$$C_*\widehat{(M, h)} = \text{Coker}(\eta).$$

**Théorème 2.5.4** (Théorème de gluing, [CoRa]). *Soient  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : N = f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de Morse-Smale. Soit  $\epsilon_f > 0$  obtenu par le théorème de rigidité et  $h$  un scindement  $(\epsilon, \tau)$  de  $f$  le long de  $g$  tel que*

$$\|f - h\|_0 \leq \epsilon_f.$$

Alors la composition

$$j : C_*(M, f) \hookrightarrow C_*(M, h) \longrightarrow C_*\widehat{(M, h)}$$

est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. On voit aisément que  $C_*(\widehat{M, h})$  a pour générateurs les éléments  $[(x, 0, 0, y)]$ . En prenant  $\epsilon$  petit, la fonction  $h$  sera suffisamment près de  $f$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \min_{x \in \text{Crit } f^+} f(x) &\geq \max_{x \in \text{Crit } h \setminus \text{Crit } f} h(x) \\ \min_{x \in \text{Crit } h \setminus \text{Crit } f} h(x) &> c + \max_{x \in \text{Crit } f^-} f(x). \end{aligned}$$

Puisque  $h = f$  partout sur  $M \setminus W$ , on voit que l'homomorphisme

$$j : C_*(M, f) \longrightarrow C_*(\widehat{M, h})$$

est de la forme

$$j = \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, la différentielle de  $h$  est donnée ici par

$$d_h(x, y, z, t) = (d_{f^+}x, \theta^+ x d_g y - z, d_g z, d_{f^-}t + \theta^- z).$$

La différentielle de  $C_*(\widehat{M, h})$  est donc donnée par

$$d_{C_*(\widehat{M, h})}[(x, 0, 0, y)] = [(d_{f^+}x, \theta^+ x, 0, d_{f^-}y)] = [(d_{f^+}x, 0, 0, d_{f^-}y + \theta^- \theta^+ x)]$$

Puisque  $j$  est un morphisme de complexes de chaînes, nous avons

$$d_{C_*(\widehat{M, h})} \circ j = j \circ d_f.$$

En effectuant la multiplication matricielle, ceci nous donne

$$\begin{pmatrix} d_{f^+} & 0 \\ \theta^- \theta^+ + d_{f^-} \psi & d_{f^-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{f^+} & 0 \\ \psi d_{f^+} + \phi & d_{f^-} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\theta^- \theta^+ - \phi = d_{f^-} \psi - \psi d_{f^+}.$$

$\psi$  est donc une homotopie de chaînes entre  $\theta^- \theta^+$  et  $\phi$ . □

**Remarque 2.5.5.** *Le théorème nous dit donc un peu plus : nous avons vu dans la démonstration que  $C_*(M, f)$  est en fait un rétract de  $C_*(M, h)$ .*

Il est possible d'obtenir une version plus fine du théorème si la fonction  $g$  est bien choisie. Pour cela nous aurons besoin du concept de fonction adaptée.

**Définition 2.5.6.** Une fonction de Morse-Smale  $g : N = f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$  est adaptée à  $f$  sur  $N$  si

(1)  $\phi_g = \phi_f|_N$ , où  $\phi_f$  et  $\phi_g$  sont les flots pseudo-gradients de  $f$  et de  $g$  respectivement.

(2) Pour chaque point critique  $x \in \text{Crit}_q f$ ,

$$W_f^U(x) \cap N \subseteq \bigcup_{y \in \text{Crit}_{\leq q-1} g} W_g^U(y).$$

(3) Pour chaque  $q \in \text{Crit} f$  et  $y \in \text{Crit} g$ , les intersections  $W_f^U(x) \cap W_g^S(y)$  et  $W_f^S(x) \cap W_g^U(y)$  sont transverses.

**Remarque 2.5.7.** Les fonctions adaptées existe et sont génériques.

**Théorème 2.5.8** ([CoRa]). Soient  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale. Pour une fonction  $g : N = f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$  de Morse-Smale adaptée à  $f$  sur l'hypersurface  $N$ . Soit  $\epsilon_f > 0$  obtenu par le théorème de rigidité et  $h$  un scindement  $(\epsilon_f, \tau)$  de  $f$  le long de  $g$  tel que

$$\|f - h\|_0 \leq \epsilon_f.$$

Alors la composition

$$j : C_*(M, f) \hookrightarrow C_*(M, h) \longrightarrow \widehat{C_*(M, h)}$$

est l'identité.

**Remarque 2.5.9.** Si  $j$  est l'identité, alors on voit qu'on a l'égalité

$$\theta^- \theta^+ = \phi.$$

## 2.6. MAYER-VIETORIS ET PRODUIT CUP

Le résultat que l'on démontre ici est complètement nouveau. Il affirme qu'il est possible de reconstituer le produit cup sur  $M$  si on le connaît sur  $M^-$  et  $M^+$ .

**Théorème 2.6.1.** Soient  $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, 2, 3$ , des fonction de Morse-Smale de sorte que  $N = f_i^{-1}(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  et pour chaque  $i$ ,  $g_i : N = f_i^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale et  $h_i$  un scindement  $(\epsilon_f, \tau)$  de  $f_i$  le long de  $g_i$ . Alors le produit cup est donné par

$$x \cup y = q_1^{-1}(x) \cup_h q_2^{-1}(y),$$

où  $q_i$  est la projection  $q_i : C_*(M, h_i) \longrightarrow C_*(\widehat{M}, h_i)$  et  $\cup_h$  dénote le produit cup des fonctions  $h_i$ . Si les fonctions  $g_i$  sont adaptées aux fonctions  $f_i$  le long de  $N$ , alors le produit cup sur  $\widehat{C}_*(h)$  est donné par

$$[(x, 0, 0, y)] \cup [(x', 0, 0, y')] = [(x, 0, \theta^+ x, y) \cup_h (x', 0, \theta^+ x', y')].$$

**Remarque 2.6.2.** Le théorème nous permet de calculer le produit cup à l'aide du produit pour les fonctions  $h_i$ . Ce produit est plus simple car aucune ligne de flot ne traverse de  $M^+$  à  $M^-$ . Il suffit donc de le calculer sur ces deux morceaux.

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que nous avons une courte suite exacte

$$C_*(W_i, h_i) \xrightarrow{\rho_i} C_*(M, h_i) \xrightarrow{q_i} C_*(\widehat{M}, h_i)$$

L'homologie de  $C_*(W_i, h_i)$  est nulle car elle est isomorphe à  $H_*(N \times I, N \times \{0\})$ .

Alors la projection naturelle

$$q_i : C_*(M, h_i) \longrightarrow C_*(\widehat{M}, h_i)$$

induit un isomorphisme en homologie (par la longue suite exacte).

Le produit cup est donc donné par

$$x \cup y = q_1^{-1}(x) \cup_h q_2^{-1}(y),$$

Si les fonctions  $g_i$  sont adaptées aux fonctions  $f_i$  le long de  $N$ , alors  $\theta_i^- \theta_i^+ = \phi_i$ .

Pour chaque  $i$ , l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \rho_i : C_*(M, f_i) &\hookrightarrow C_*(M, h_i), \\ (x, y) &\mapsto (x, 0, \theta_i^+ x, y), \end{aligned}$$

est une inclusion de complexes de chaînes, car

$$\begin{aligned} d_{h_i} \rho_i(x, y) &= d_{h_i}(x, 0, \theta_i^+ x, y) = (d_{f_i} x, \theta_i^+ x - \theta_i^+ x, d_{g_i} \theta_i^+ x, d_{f_i} y + \theta^- \theta^+ x) \\ &= (d_{f_i} x, 0, d_{g_i} \theta_i^+ x, d_{f_i} y + \theta^- \theta^+ x) = (d_{f_i} x, 0, \theta_i^+ d_{f_i} x, d_{f_i} y + \theta_i^- \theta_i^+ x) \\ &= \rho_i(d_{f_i} x, d_{f_i} y + \phi_i x) = j d_{f_i}(x, y). \end{aligned}$$

Pour chaque  $i$ , la composition

$$j_i : C_*(M, f_i) \hookrightarrow C_*(M, h_i) \longrightarrow C_*(\widehat{M}, h_i)$$

est l'identité. On obtient donc des isomorphismes en homologie

$$H_*(M, f_i) \xrightarrow{\cong} H_*(M, h_i) \xrightarrow{\cong} H_*(\widehat{M}, h_i).$$

On voit alors que le produit cup sur  $H_*(\widehat{M}, h_i)$  est donné par

$$[(x, 0, 0, y)] \hat{\cup} [(x', 0, 0, y')] = [(x, 0, \theta^+ x, y) \cup_h (x', 0, \theta^+ x', y')].$$

□

# Chapitre 3

---

## HOMOTOPIE ET INDICE DE CONLEY

Dans ce chapitre, nous investiguerons les propriétés de flots sur les variétés. Cette étude plus générale permettra d'aborder la dualité de Poincaré. De plus elle aidera à clarifier certains concepts ou méthodes que nous avons utilisés pour les flots de Morse-Smale.

### 3.1. COFIBRATIONS ET SUITES COEXACTES

Dans cette section, nous travaillons dans la catégorie des espaces pointés. Toutes les fonctions seront des fonctions continues d'espaces pointés.

Soient  $X$  et  $Y$ , deux espaces topologiques, on dénote par  $[X, Y]$  l'ensemble des classes d'homotopie de fonctions de  $X$  dans  $Y$ . Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  induit, pour chaque espace  $W$ , une fonction

$$\begin{aligned} f^\# : [Y, W] &\longrightarrow [X, W], \\ g &\longmapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Ceci se passe de manière fonctorielle, dans le sens que si on a une suite

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z,$$

alors

$$(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#.$$

On peut définir le noyau d'une application  $\phi : [Y, W] \longrightarrow [X, W]$ , comme :

$$\ker \phi = \{[h] \in [Y, W] : \phi([h]) \simeq *\}.$$

**Définition 3.1.1.** Une suite

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z,$$

est dite coexacte si la suite induite

$$[X, W] \xleftarrow{f^\#} [Y, W] \xleftarrow{g^\#} [Z, W],$$

est exacte. C'est-à-dire,  $\ker f^\# = \text{Im} g^\#$ .

**Définition 3.1.2.** Une fonction  $A \rightarrow X$  est une cofibration si toute homotopie  $h : A \times I \rightarrow W$  sur  $A$  s'étend à une unique homotopie sur  $X$  dès que l'on peut étendre  $h(\cdot, 0)$  à  $X$ . C'est-à-dire que pour chaque fonction  $h : A \times I \rightarrow W$  et  $g : X \times \{0\} \rightarrow W$  qui étend  $h(\cdot, 0)$ , le problème suivant a une solution :

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \xrightarrow{f} & X \times \{0\} \\ \downarrow & \searrow & \swarrow \\ & X \times I & \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow g \\ A \times I & \xrightarrow{h} & W, \end{array}$$

ou plus brièvement, le problème

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup_f A \times I & \xrightarrow{g} & W, \\ \downarrow & \nearrow & \\ X \times I & & \end{array}$$

a une solution pour chaque fonction  $g : X \times \{0\} \cup_f A \times I \rightarrow W$ .

**Proposition 3.1.3.** Si  $A$  est un sous-espace de  $X$  et que l'inclusion  $i : A \hookrightarrow X$  est une cofibration, alors la suite

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A$$

est coexacte.

DÉMONSTRATION. Pour un espace  $W$  quelconque on a

$$[X/A, W] \xrightarrow{q^\#} [X, W] \xrightarrow{i^\#} [A, W].$$

On montre

- (1)  $\text{Im}q^\# \subseteq \text{ker}i^\#$ . Pour cela, il suffit de voir que  $i^\# \circ q^\# = (q \circ i)^\# = 0$ . Ce qui vient du fait que la fonction  $q \circ i$  est constante, car elle se factorise :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q \circ i} & X/A \\ & \searrow & \nearrow \\ & A/A & \end{array}$$

- (2)  $\text{ker}i^\# \subseteq \text{Im}q^\#$ . Soit  $f \in \text{ker}i^\#$ , c'est-à-dire, il existe une homotopie

$$h : A \times I \longrightarrow W,$$

entre la fonction  $f \circ i$  et la fonction constante sur  $A$ . Puisque  $i$  est une cofibration, le problème suivant a une solution :

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \xrightarrow{i} & X \times \{0\} \\ \downarrow & \searrow & \swarrow \\ & X \times I & \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ A \times I & \xrightarrow{h} & W, \end{array} \quad \exists \tilde{h}$$

où  $\tilde{h}$  est une homotopie entre la fonction  $f$  et une fonction qui est constante sur  $A$ . Cette nouvelle fonction nous donne une fonction  $\tilde{f}$  sur  $X/A$ , telle que

$$[q^\#(\tilde{f})] = [f].$$

Donc  $\text{ker}i^\# \subseteq \text{Im}q^\#$ .

□

**Remarque 3.1.4.** Si la fonction  $f : A \longrightarrow X$  n'est pas une inclusion, on remplace  $X$  par le cylindre d'application

$$M_f = X \cup_f A \times I = \frac{X \sqcup A \times I}{(a, 0) \sim f(a)}$$

et  $f$  par l'inclusion

$$i : A \hookrightarrow M_f,$$

$$a \mapsto (a, 1).$$

Les espaces  $M_f$  et  $X$  ont le même type d'homotopie (il suffit d'écraser le cylindre). En écrasant le cylindre, l'inclusion  $i$  devient la fonction  $f$ . La fonction  $f$  peut donc être remplacée par  $i$  car ces fonctions induisent la même chose en homotopie.

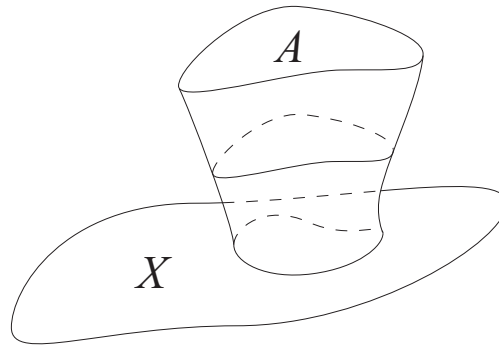


FIG. 3.1. Le cylindre d'application  $M_f$ .

**Définition 3.1.5.** Soit  $X$  un espace métrique et  $A \subseteq X$ , un sous-ensemble fermé. On dit que  $(X, A)$  est une paire NDR (Neighbourhood Deformation Retract), si il existe des fonctions continues

$$r : X \times I \longrightarrow X$$

et

$$\alpha : X \longrightarrow [0, 1],$$

satisfaisant :

- (1)  $\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$ ,
- (2)  $r(x, 0) = x, \forall x \in X$ ,
- (3)  $r(a, t) = a, \forall a \in A, t \in I$ ,
- (4)  $r(x, 1) \in A, \forall x \in X$ , tel que  $\alpha(x) < 1$ .

**Remarque 3.1.6.** Si  $(X, A)$  est une paire NDR, alors  $A$  est un rétract de déformation du voisinage  $U = \alpha^{-1}([0, 1])$ . D'où le nom NDR.

**Proposition 3.1.7.** *Soit  $X$  un espace métrique et  $A \subseteq X$ , un sous-ensemble fermé. Alors, les trois énoncés suivants sont équivalents :*

(1)  $A \xrightarrow{i} X$  est une cofibration.

(2) Il existe une fonction continue

$$G : X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I,$$

telle que  $G|_{X \times \{0\} \cup A \times I} = id$ . C'est-à-dire,  $X \times \{0\} \cup A \times I$  est un rétract de  $X \times I$ .

(3)  $(X, A)$  est une paire NDR.

DÉMONSTRATION. (3)  $\Rightarrow$  (2). On définit

$$G(x, t) = \begin{cases} (r(x, 1), t - 2\alpha(x)), & \text{si } 0 \leq \alpha(x) \leq t/2, \\ (r(x, 2 - 2\alpha(x)/t), 0), & \text{si } t/2 \leq \alpha(x) \leq t, \\ (x, 0), & \text{si } t \leq \alpha(x) \leq 1. \end{cases}$$

Définie de cette façon, on vérifie que la fonction  $G$  est continue.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Soit  $g : X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow W$ . Alors la fonction  $g \circ G$  est une solution au problème

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow & \nearrow_{g \circ G} & \\ X \times I & & \end{array}$$

(1)  $\Rightarrow$  (2) Il suffit de prendre  $W = X \times \{0\} \cup A \times I$  et  $g = id$ . La solution du problème est alors une fonction  $G$  ayant les propriétés voulues.

(2)  $\Rightarrow$  (3) On regarde la fonction

$$G(\cdot, 1) : X \times \{1\} \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I.$$

On prétend que  $G(\cdot, 1)^{-1}(A \times 1)$  est un voisinage fermé de  $A$ . Puisque  $G$  est l'identité sur  $A \times I$ , on a que  $A \subseteq G(\cdot, 1)^{-1}(A \times 1)$ . De plus, si  $a \in \partial A$ , alors, par la continuité de  $G$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que

$$G(B(a, \delta), 1) \subseteq A \times I.$$

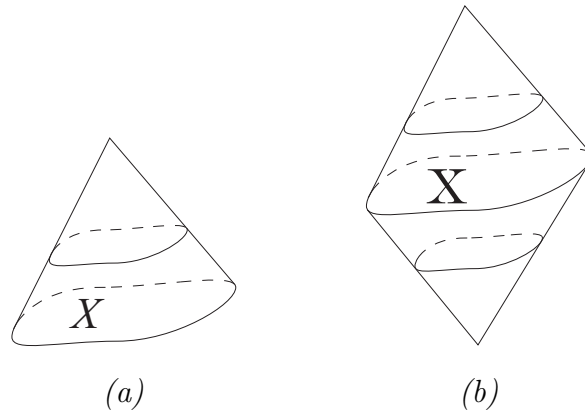


FIG. 3.2. (a) Le cône sur  $X$ . (b) La suspension de  $X$ .

$G(\cdot, 1)^{-1}(A \times 1)$  est donc bien un voisinage fermé de  $A$ .

On peut prendre une fonction  $\alpha : X \rightarrow [0, 1]$  qui vaut 0 sur  $A$  et 1 sur  $\overline{X \setminus G(\cdot, 1)^{-1}(A \times 1)}$  et qui est strictement comprise entre 0 et 1 ailleurs. On définit alors la fonction  $r : X \times I \rightarrow X$  en faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\quad r \quad} & X, \\ & \searrow G & \nearrow p \\ & X \times \{0\} \cup A \times I & \end{array}$$

où  $p$  est la projection sur  $X$ . La fonction  $r$  est continue et alors  $(X, A)$  est une paire NDR.  $\square$

**Définition 3.1.8.** Pour  $X$  un espace, on définit

(1)  $CX$ , le cône sur  $X$ .

$$CX = \frac{X \times I}{X \times \{1\}}.$$

(2)  $\Sigma X$ , la suspension de  $X$ .

$$\Sigma X = \frac{X \times I}{X \times \{0\}, X \times \{1\}}.$$

(3) Si on a une fonction  $f : X \rightarrow Y$ , on définit une fonction

$$\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y,$$

$$[x, t] \mapsto [f(x), t].$$

**Proposition 3.1.9.** *Soit  $(X, A)$  une paire NDR, alors*

$$X/A \simeq X \cup_{A \times \{0\}} CA.$$

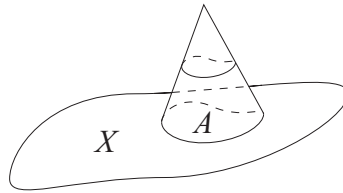


FIG. 3.3.  $X \cup CA$ .

DÉMONSTRATION. On définit

$$f : X \cup CA \xrightarrow{/CA} X/A.$$

On remarque que la fonction  $r$  nous donne une rétraction  $\bar{r}$  d'un voisinage de  $[A] \subseteq X/A$  sur  $[A]$  et que la fonction  $\alpha$  est bien définie sur  $X/A$ . Soit

$$g : X/A \longrightarrow X \cup CA,$$

$$[x] \mapsto (r(x, 1), 1 - \alpha(x)).$$

Alors  $f \circ g = r(\cdot, 1)$  qui est homotope à la fonction identité grâce à l'homotopie  $r(\cdot, t)$ . La fonction  $g \circ f$  est la fonction

$$g \circ f : X \cup CA \longrightarrow X \cup CA,$$

$$CA \mapsto [A \times \{1\}], \text{ et}$$

$$x \mapsto (r(x, 1), 1 - \alpha(x)), \text{ si } x \in X.$$

Cette fonction est homotope à l'identité à l'aide de l'homotopie  $(r(x, t), t(1 - \alpha(x)))$ . □

**Corollaire 3.1.10.** *Soit  $(X, A)$  une paire NDR, alors pour chaque  $k$ , on a un isomorphisme*

$$H_k(X/A, *) \xrightarrow{\cong} H_k(X, A).$$

DÉMONSTRATION. L'équivalence d'homotopie  $f$  de la proposition 3.1.9 nous donne une équivalence entre les paires  $(X \cup CA, CA)$  et  $(X/A, [A])$ , on a donc

$$\begin{aligned} H_k(X/A, *) &\xrightarrow[\text{prop.3.1.9}]{\cong} H_k(X \cup CA, CA) \xrightarrow[\text{excision}]{\cong} \\ &H_k(X \cup (A \times [0, 1/2]), A \times [0, 1/2]) \cong H_k(X, A). \end{aligned}$$

□

**Remarque 3.1.11.** Si  $A \xrightarrow{i} X$  est une cofibration, alors  $X \xrightarrow{i} X \cup CA$  en est également une, car  $(X \cup CA, X)$  est une paire NDR. Pour cela, on peut voir que  $X \cup A \times \{1/2\}$  est un voisinage de  $X$  qui se rétracte sur  $X$ .

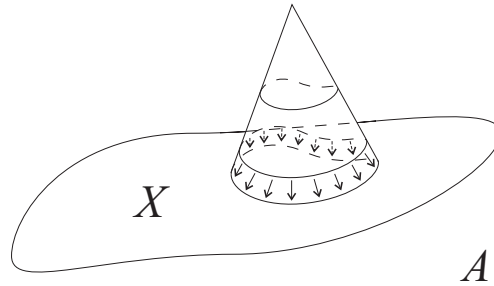


FIG. 3.4.  $(X, X \cup CA)$  est une paire NDR.

**Exemple 3.1.12.** On peut décrire l'attachement d'une  $k$ -cellule à un espace  $X$  à l'aide de la suite coexacte

$$S^{k-1} \longrightarrow X \longrightarrow X \cup CS^{k-1},$$

car on peut identifier  $CS^{k-1}$  et  $D^k$ .

En remplaçant  $X/A$  par  $X \cup CA$ , on obtient que

$$A \xrightarrow{i} X \hookrightarrow X \cup CA \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX \hookrightarrow \dots$$

est coexacte. Si pour chaque terme, on passe au quotient par le cône nouvellement ajouté, on obtient une longue suite coexacte

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma q} \Sigma(X/A) \xrightarrow{\Sigma \delta} \dots$$

La fonction  $\delta$  est donnée par

$$\begin{array}{ccc} X/A & \xrightarrow{\delta} & \Sigma A. \\ & \searrow g & \nearrow /X \\ & X \cup CA & \end{array}$$

$\simeq$

$\delta$  est appelée la fonction connectante.

**Corollaire 3.1.13.** *Soit  $(X, A)$  une paire NDR, on a alors une longue suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(A) \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X/A) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow \cdots$$

DÉMONSTRATION. On a

$$H_{k+1}(\Sigma A) \xrightarrow{\cong} H_k(A).$$

□

## 3.2. INDICE DE CONLEY

**Définition 3.2.1.** *Soit  $X$  un espace topologique, un flot sur  $X$  est donné par une action de  $\mathbb{R}$  sur  $X$ . C'est-à-dire*

$$\gamma : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$$

$$(x, t) \mapsto x \cdot t$$

telle que

$$x \cdot (t_1 + t_2) = (x \cdot t_1) \cdot t_2.$$

**Exemple 3.2.2.** *Un des exemples qui nous intéressera beaucoup est le flot donné par le gradient négatif,  $-\nabla f$ , d'une fonction de Morse*

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

sur une variété  $M$ .

Pour ce qui suit, on fixe un flot  $\gamma$  sur un espace topologique  $X$ .

**Définition 3.2.3.** (1) *Un sous-ensemble compact  $S$  de  $X$  est dit invariant si*

$$\forall x \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \text{ on a } x \cdot t \in S.$$

- (2) Pour un sous-ensemble compact  $N$  de  $X$ , on définit son sous-ensemble invariant maximal

$$I(N) = \{x \in N : x \cdot t \in N, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

- (3) Un sous-ensemble invariant  $S$  est dit isolé s'il existe un voisinage compact  $N$  de  $S$  tel que

$$S = I(N).$$

**Exemple 3.2.4.** Si  $\gamma$  est le flot donné par le gradient d'une fonction de Morse  $f$ , alors les points critiques de  $f$  sont des ensembles invariants isolés (par la condition de Morse). De même, si on prend deux points critiques de  $f$  et les lignes de flot les liant, c'est encore un ensemble isolé.

**Définition 3.2.5.** Soit  $S$  un ensemble invariant isolé, une paire d'indices pour  $S$  est une paire de sous-ensembles compacts  $(N_1, N_0)$ ,  $N_0 \subseteq N_1$  telle que

- (1)  $N_1 \setminus N_0$  est un voisinage de  $S$ .
- (2)  $S = I(N_1)$ .
- (3) Pour  $x \in N_1$ , s'il existe  $t > 0$ , tel que  $x \cdot t \notin N_1$ , alors, il existe  $0 \leq \tau < t$  tel que  $x \cdot \tau \in N_0$ .
- (4)  $N_0$  est positivement invariant dans  $N_1$ , c'est-à-dire, pour chaque  $x \in N_0$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour  $0 \leq t \leq \epsilon$ ,

$$x \cdot t \in N_1 \implies x \cdot t \in N_0.$$

Un paire d'indices est donc un voisinage isolant ( $N_1$ ), pour lequel on spécifie la zone de sortie ( $N_0$ ) du flot. Nous nous intéressons alors à l'espace  $N_1/N_0$ .

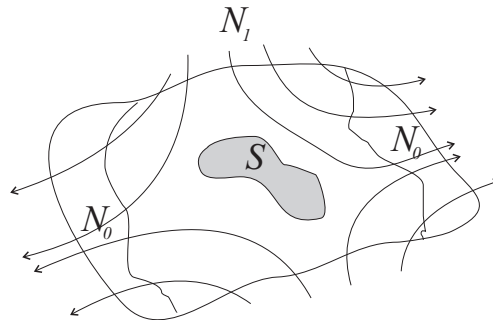


FIG. 3.5. Exemple d'une paire d'indices.

**Théorème 3.2.6.** *Soit  $S$  un ensemble invariant isolé, alors il existe une paire d'indices pour  $S$ .*

DÉMONSTRATION. Voir [Sa1]. □

**Théorème 3.2.7.** *Soient  $S$  un ensemble invariant isolé,  $(N_1, N_0)$  et  $(N'_1, N'_0)$ , deux paires d'indices pour  $S$ . Alors  $N_1/N_0$  et  $N'_1/N'_0$  ont le même type d'homotopie.*

DÉMONSTRATION. (Idée de la preuve) Soient  $(N_1, N_0)$  et  $(N'_1, N'_0)$  deux paires d'indices. On peut choisir  $T \geq 0$  tel que pour  $t \geq T$ , on a :

$$(1) \quad x \cdot [-t, t] \subseteq N_1/N_0 \implies x \in N'_1/N'_0,$$

$$(2) \quad x \cdot [-t, t] \subseteq N'_1/N'_0 \implies x \in N_1/N_0.$$

On le montre seulement pour la première condition. Supposons le contraire, il y aurait alors des suites  $x_k \notin N'_1/N'_0$  et  $t_k \in \mathbb{R}^+$  telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty \text{ et}$$

$$x_k \cdot [-t_k, t_k] \subseteq N_1/N_0.$$

Tout point limite des  $x_k$  doit être dans  $S$ , mais aussi dans la fermeture de  $(N'_1/N'_0) \setminus (N_1/N_0)$ , ce qui est impossible.

À l'aide d'un tel  $T$ , la fonction

$$f : N_1/N_0 \times [T, \infty) \longrightarrow N'_1/N'_0,$$

$$([x], t) \mapsto \begin{cases} [x \cdot 3t], & \text{si } x \cdot [0, 2t] \subseteq N_1 \setminus N_0, x \cdot [t, 3t] \subseteq N'_1 \setminus N'_0, \\ [N'_0], & \text{sinon,} \end{cases}$$

est continue. Pour  $t \geq T$  fixé, on définit la fonction

$$f^t = f(\cdot, t) : N_1/N_0 \longrightarrow N'_1/N'_0.$$

On définit de manière similaire une fonction

$$g^t : N'_1/N'_0 \longrightarrow N_1/N_0.$$

On a alors que

$$g^t \circ f^t(x) = \begin{cases} [x \cdot 6t], & \text{si } x \cdot [0, 6t] \subseteq N_1 \setminus N_0, \\ [N_0], & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est clairement homotope à l'identité (en poussant le long du flot).  $\square$

En fait, la paire d'ensembles

$$I_O = \{(N_1, N_0) : \text{paire d'indices pour } S\}$$

et

$$I_M = \{f^t : N_1/N_0 \longrightarrow N'_1/N'_0\}$$

forment ce qu'on appelle un système connexe simple.

**Définition 3.2.8.** *On définit la catégorie  $Top^*$  comme étant la catégorie ayant pour objets les espaces topologiques et comme morphismes les classes d'homotopie de fonctions continues. Un système connexe simple est une sous-catégorie  $\mathcal{C}$  de  $Top^*$  telle que pour chaque  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  consiste en un seul élément.*

**Remarque 3.2.9.** *Dans un système connexe simple, on a que tous les morphismes sont des équivalences d'homotopie.*

**Définition 3.2.10.** *L'indice de Conley de  $S$ , noté  $c_\gamma(S)$ , est le système simple connexe  $(I_O, I_M)$ . Souvent, on l'identifiera simplement à l'espace  $N_1/N_0$ .*

### 3.3. DÉCOMPOSITION ATTRACTEUR-RÉPULSEUR

**Remarque 3.3.1.** *Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse. L'indice de Conley d'un point critique d'indice de Morse  $k$  est une sphère de dimension  $k$ .*

**Définition 3.3.2.** *Soit  $S$  un ensemble invariant isolé. Une paire d'indices  $(N_1, N_0)$  pour  $S$  est dite régulière si pour tout  $x \in N_0$ , et pour tout  $\epsilon > 0$  on a que*

$$x \cdot [0, \epsilon] \not\subseteq \overline{N_1 \setminus N_0}.$$

Une paire d'indices est donc régulière si le flot est transverse à  $N_0$ . Cette notion de régularité est justifiée par le fait suivant.

**Proposition 3.3.3.** *Soient  $S$  un ensemble invariant isolé et  $(N_1, N_0)$  une paire d'indices régulière pour  $S$ . Alors la fonction  $T : N_1 \rightarrow [0, +\infty)$ , définie par*

$$T(x) = \begin{cases} \sup\{t > 0 : x \cdot [0, t] \subseteq N_1 \setminus N_0\}, & \text{si } x \in N_1 \setminus N_0, \\ 0, & \text{si } x \in N_0, \end{cases}$$

*est continue.*

DÉMONSTRATION. Soient  $x \in N_1 \setminus N_0$  et  $\epsilon > 0$ . Soit  $\delta > 0$  tel que  $B((T(x) - \epsilon/2) \cdot x, \delta) \subseteq N_1 \setminus N_0$  et  $B((T(x) + \epsilon/2) \cdot x, \delta) \cap N_1 \setminus N_0 = \emptyset$ . C'est la régularité qui nous permet de choisir le deuxième ensemble.

Il existe alors  $\delta' > 0$  tel que pour chaque  $y \in B(x, \delta')$ , on a

$$(T(x) - \epsilon/2) \cdot y \in B((T(x) - \epsilon/2) \cdot \delta),$$

$$(T(x) + \epsilon/2) \cdot y \in B((T(x) + \epsilon/2) \cdot \delta).$$

Donc  $y$  devra passer par  $\partial N_0$  dans un temps entre  $T(x) - \epsilon/2$  et  $T(x) + \epsilon/2$ . Nous pouvons prendre  $\delta'$  assez petit, de sorte qu'il ne soit pas possible que  $t \cdot y$  soit dans  $\partial N_0$  pour  $t < T(x) - \epsilon/2$ . On a donc que pour  $y \in B(x, \delta')$ ,

$$|T(y) - T(x)| < \epsilon.$$

□

**Proposition 3.3.4.** *Soient  $S$  un ensemble invariant isolé et  $(N_1, N_0)$  une paire d'indices pour  $S$ . Il est possible de déformer  $N_0$  pour obtenir une paire d'indices régulière  $(N_1, N'_0)$ .*

**Définition 3.3.5.** *Soit  $x \in X$ , on définit*

$$(1) \omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{x \cdot [t, +\infty)},$$

$$(2) \omega^*(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{x \cdot (-\infty, -t]}.$$

**Définition 3.3.6.** *Soit  $S$  un ensemble invariant isolé, on dit qu'un sous-ensemble  $A$  de  $S$  est un attracteur si  $A$  est un ensemble invariant isolé et il existe un voisinage  $U$  de  $A$  tel que*

$$\omega(U) = A.$$

De la même façon, on dit que  $A'$  est un répulseur s'il possède un voisinage  $U$  tel que

$$\omega^*(U) = A'.$$

Si  $A$  est un attracteur, on définit son répulseur complémentaire dans  $S$ ,

$$A^* = \{x \in S : \omega(x) \notin A\}.$$

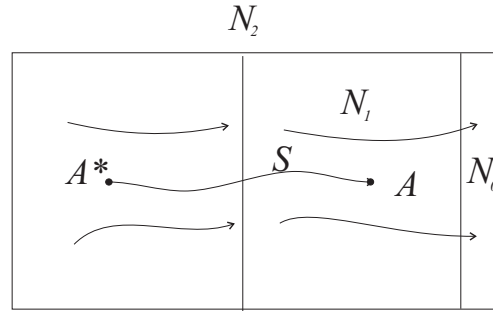


FIG. 3.6. Exemple d'une décomposition attracteur-répulseur

**Proposition 3.3.7.** Soient  $S$  un ensemble invariant isolé,  $A$  un attracteur dans  $S$  et  $A^*$ , son répulseur complémentaire. Alors on peut trouver trois ensembles  $N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2$  de sorte que  $(N_2, N_1)$ ,  $(N_1, N_0)$  et  $(N_2, N_0)$  soient des paires d'indice pour  $A^*$ ,  $A$  et  $S$  respectivement.

DÉMONSTRATION. Voir [Sa1]. □

On peut supposer que la paire d'indices  $(N_2, N_1)$  est régulière. On a alors que  $(N_2, N_1)$  est une paire NDR, car le flot est transverse à la frontière de  $N_1$ . On a alors également que  $(N_2/N_0, N_1/N_0)$  est une paire NDR, donc l'inclusion

$$i : N_1/N_0 \hookrightarrow N_2/N_0$$

est une cofibration. On peut définir les fonctions

$$\alpha : N_2/N_0 \longrightarrow [0, 1]$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} T(x), & \text{si } 0 \leq T(x) \leq 1, \\ 1, & \text{si } T(x) > 1, \end{cases}$$

et

$$r : N_2/N_0 \times I \longrightarrow N_2/N_0,$$

$$r(x, t) = \begin{cases} x \cdot T(x), & \text{si } 0 \leq T(x) \leq 1, \\ x \cdot 1, & \text{si } T(x) > 1. \end{cases}$$

On obtient donc une longue suite coexacte

$$N_1/N_0 \xrightarrow{i} N_2/N_0 \xrightarrow{q} N_2/N_1 \xrightarrow{\delta} \Sigma N_1/N_0 \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma N_2/N_0 \xrightarrow{\Sigma q} \dots$$

La fonction  $r$  permet d'écrire la fonction connectante  $\delta$  explicitement. On obtient

$$\delta([x]) = \begin{cases} [x \cdot T(x), 1 - T(x)], & \text{si } 0 \leq T(x) \leq 1, \\ [N_0 \times \{0\}], & \text{si } T(x) > 1. \end{cases}$$

### 3.4. LIENS AVEC LE COMPLEXE DE MORSE

Soient  $M$  une variété fermée et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale. Sans perdre de généralité, on peut supposer que tous les points critiques de même indice ont la même valeur critique. La théorie de Morse nous dit qu'on a une suite d'espaces

$$\{x_0\} = X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_n \cong M,$$

où l'espace  $X_k$  est obtenu en recollant un certain nombre de  $k$ -cellules à  $X_{k-1}$  (une par point critique d'indice  $k$ ).

On définit

$$S_k = \text{Crit}_{k-1}f \cup \text{Crit}_k f \cup \{\text{lignes de flot entre ces points critiques}\}.$$

Pour chaque  $k$ , on a une décomposition attracteur-répulseur de  $S_k$  avec

$$A_k = \text{Crit}_{k-1}f \quad \text{et} \quad A_k^* = \text{Crit}_k f.$$

On voit aisément que  $(X_k, X_{k-2})$ ,  $(X_{k-1}, X_{k-2})$  et  $(X_k, X_{k-1})$  forment des paires d'indices pour  $S_k$ ,  $A_k$  et  $A_k^*$  respectivement. Pour chaque  $k$ , on sait que  $X_k/X_{k-1}$  est un bouquet de sphères, une par point critique d'indice  $k$ . Puisque  $\Sigma S^k \vee S^k = S^{k+1} \vee S^{k+1}$ , on a une longue suite coexacte

$$\bigvee_{y \in \text{Crit}_{k-1}f} S_y^{k-1} \xrightarrow{i} X_k/X_{k-2} \xrightarrow{q} \bigvee_{x \in \text{Crit}_k f} S_x^k \xrightarrow{\delta} \bigvee_y S_y^k \xrightarrow{\Sigma i} \dots$$

On remarque que  $X_k/X_{k-2}$  est obtenu de  $X_{k-1}/X_{k-2}$  en recollant une  $k$ -cellule par point critique d'indice  $k$ . On peut donc allonger la suite coexacte du côté gauche pour obtenir

$$\bigvee_x S_x^{k-1} \xrightarrow{\psi} \bigvee_y S_y^{k-1} \hookrightarrow X_k/X_{k-2} \xrightarrow{q} \bigvee_x S_x^k \xrightarrow{\delta} \bigvee_y S_y^k \xrightarrow{\Sigma i} \dots$$

où  $\psi$  est la fonction d'attachement. On voit alors que la fonction connectante  $\delta$  est la suspension de la fonction d'attachement. On note par  $\delta_{xy}$  la fonction composée :

$$\delta_{xy} : S_x^k \longrightarrow \bigvee_y S_y^k \longrightarrow S_y^k,$$

où la première fonction est la restriction de  $\delta$  et la deuxième est le quotient naturel. On peut alors définir

$$\begin{aligned} d : C_k(M, f) &\longrightarrow C_{k-1}(M, f) \\ x &\mapsto \sum_y \deg(\delta_{xy})y. \end{aligned}$$

Ceci nous donne donc que  $d$  est la différentielle donnée par la fonction d'attachement.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème

**Théorème 3.4.1** (R. Thom, S. Smale, J. Milnor, C. Conley, E. Witten).  $(C_q(M, f), d)$  est un complexe de chaîne et

$$H_*(C_q(M, f), d) \cong H_*(M, \mathbb{Z}),$$

où  $H_*(M, \mathbb{Z})$  est l'homologie cellulaire de la variété  $M$ .

DÉMONSTRATION. Nous démontrons simplement que la différentielle du complexe de Morse est la même que celle donnée par la fonction d'attachement. Pour cela, nous utilisons le fait que l'indice de Conley est indépendant du choix de la paire d'indices. Nous pouvons donc en choisir une qui nous plaît particulièrement.

Soient  $y \in \text{Crit}_{q+1}f$  et  $x \in \text{Crit}_q f$ . Nous voulons montrer que  $n_f(y, x) = \deg \delta_{y,x}$ . Posons  $f(y) = b$ ,  $f(x) = a$ . Nous supposons que  $x$  et  $y$  sont les seuls points critiques dont la valeur critique soit dans  $[a, b]$ .

Pour un  $\epsilon > 0$  assez petit,  $T > 0$  assez grand et  $c \in (a, b)$ , on pose

$$N_y = \{z \in M : f(z \cdot (-T)) \leq b + \epsilon, f(z) \geq c\}, L_y = \{z \in N_y : f(z) = c\},$$

$$N_x = \{z \in M : f(z \cdot (T)) \geq a - \epsilon, f(z) \leq c\}, L_x = \{z \in N_x : f(z \cdot (T)) = c\}.$$

On voit qu'il existe des difféomorphismes

$$\psi_x : N_x \xrightarrow{\simeq} D^k \times D^{n-k}, \quad \psi_y : N_y \xrightarrow{\simeq} D^{k+1} \times D^{n-k-1},$$

tels que  $\psi_x(W^S(x) \cup N_x) = \{0\} \times D^{n-k}$ ,  $\psi_x(L_x) = \partial D^k \times D^{n-k}$ ,  $\psi_y(W^U(y) \cup N_y) = D^{k+1} \times \{0\}$  et  $\psi_y(L_y) = \partial D^{k+1} \times D^{n-k-1}$ .

Maintenant, si on pose  $A = \{x\}$ ,  $A^* = \{y\}$  et  $S = A \cup A^* \cup M_{y,x}$ , on a des paires d'indices  $(N_2, N_0)$ ,  $(N_2, N_1)$  et  $(N_1, N_0)$  pour  $S$ ,  $A^*$  et  $A$  respectivement, données par

$$N_2 = N_x \cup N_y,$$

$$N_1 = N_x \cup L_y,$$

$$N_0 = L_x \cup \overline{(L_y \setminus N_x)}.$$

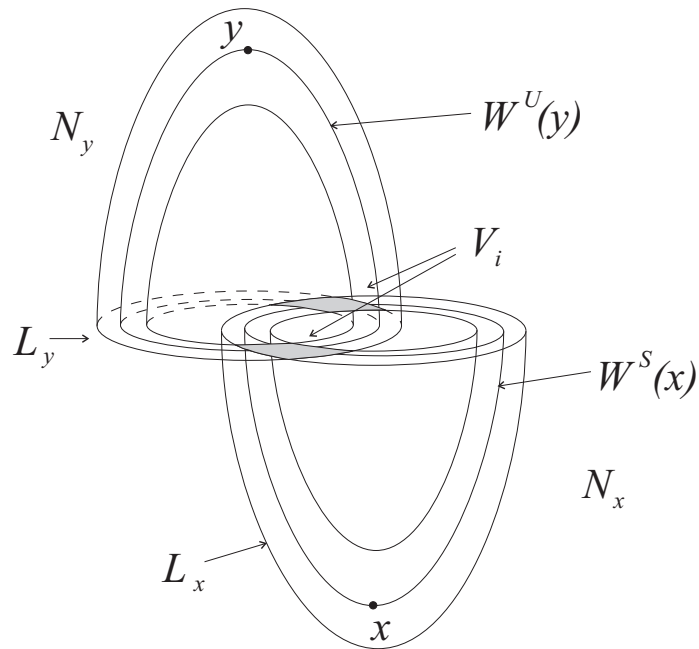


FIG. 3.7. Les ensembles  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $L_x$ ,  $L_y$ .

On voit que

$$N_2/N_1 \simeq N_y/L_y, \quad N_1/N_0 \simeq N_x/L_x.$$

On voit également que  $W^U(y) \cap N_x \cap \{f = c\}$  est constitué d'un nombre fini de composantes  $V_i$ , données par

$$\psi_x(V_i) = D^k \times \{\theta_i\},$$

pour un certain  $\theta_i \in \partial D^{n-k}$ . En particulier, chaque  $V_i$  est une variété avec frontière  $W_i$  difféomorphe à  $\partial D^k$ . Dans chaque  $V_i$ , il y a un seul point  $z_i \in W^U(y) \cap W^S(x)$ .

On s'intéresse à la fonction

$$\delta : N_2/N_1 \longrightarrow N_1/N_0.$$

Si on pose

$$N'_y = N_y \cap W^U(y), \quad \text{et} \quad L'_y = L_y \cap W^U(y),$$

on voit (à l'aide de  $\psi_y$ ) que les paires  $(N_y, L_y)$  et  $(N'_y, L'_y)$  sont équivalentes. Si on regarde la fonction  $\delta$  sur  $N'_y/L'_y$ , elle se factorise :

$$\begin{array}{ccc} N'_y/L'_y & \xrightarrow{\delta} & N_x/L_x, \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & \bigvee_i (V_i/W_i) & \end{array}$$

car si  $\delta(x) \notin N_i$ , on a que  $\delta(x) = [N_0]$ , on pose alors  $g(x) = [W_i]$ .

On obtient en homologie

$$\begin{array}{ccc} H_{k+1}(N'_y/L'_y) & \xrightarrow{\delta_*} & H_k(N_x/L_x). \\ & \searrow g_* & \nearrow h_* \\ & H_k(\bigvee_i (V_i/W_i)) & \end{array}$$

L'orientation sur  $W^U(y)$  est donnée par un générateur  $\beta \in H_{k+1}(N'_y, L'_y)$ . L'orientation sur  $W^U(x)$  est donnée par un générateur  $\alpha \in H_k(N_x, L_x)$ . L'identité

$$T_{z_i} V_i \cong \nu_{z_i} W_x^S \cong T_x W_x^U,$$

assigne une orientation  $\alpha_i \in H_k(V_i/W_i)$  à  $V_i$ , compatible avec  $\alpha$ . Donc la fonction  $h$  induit en homologie

$$h_* : \bigoplus_i \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$\sum_i m_i \alpha_i \mapsto \sum_i m_i.$$

Maintenant, on regarde  $N'_y/L'_y \longrightarrow \Sigma V_i/W_i$ . Cette fonction se factorise par

$$\begin{array}{ccc} N'_y/L'_y & \xrightarrow{g} & V_i/W_i. \\ & \searrow & \nearrow \\ & (V_i \times I)/(\partial(V_i \times I)) & \end{array}$$

Pour  $p \in V_i \times I$ , cette fonction induit, une décomposition

$$\begin{aligned} T_p(V_i \times I) &\cong T_p\gamma \oplus T_pV_i \\ &\cong T_p\gamma \oplus T_xW^U(x). \end{aligned}$$

On a donc

$$g_*(\beta) = \sum_i n_i \alpha_i,$$

où  $n_i = 1$  si la ligne de flot correspondante a une orientation  $+1$ , sinon  $n_i = -1$ .

On obtient finalement

$$\delta(\beta) = h \circ g(\beta) = \sum_i n_i = n_f(y, x).$$

□

# Chapitre 4

---

## DUALITÉS

Un des buts de ce mémoire sera de bien comprendre la dualité de Poincaré pour le complexe de Morse-Novikov. Dans ce chapitre, nous utiliserons l'indice de Conley pour donner une interprétation géométrique de la dualité de Poincaré.

### 4.1. PRODUIT SLANT

Pour  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques, on définit le produit slant

$$/ : H^n(X \times Y) \otimes H_q(Y) \longrightarrow H^{n-q}(X).$$

Pour ce faire, nous commençons par le définir sur les chaînes. Pour  $\alpha \in \text{Hom}(C_n(X \times Y), \mathbb{Z})$  et  $\gamma \in C_q(Y)$ , on définit  $\alpha/\gamma \in \text{Hom}(C_{n-q}, \mathbb{Z})$  par

$$\langle \alpha/\gamma, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \times \gamma \rangle.$$

On doit vérifier que ce produit est bien défini en homologie. C'est-à-dire, si  $\alpha$  est un cocycle ( $\delta\alpha = 0$ ) et  $\gamma$  est un cycle ( $d\gamma = 0$ ), alors pour tout cycle  $\beta$  ( $d\beta = 0$ ), on a

$$\langle \delta(\alpha/\gamma), \beta \rangle = \langle \alpha/\gamma, d\beta \rangle = \langle \alpha/\gamma, 0 \rangle = 0.$$

Aussi, si  $\alpha$  est une image, c'est-à-dire que  $\alpha = \delta\alpha'$ , on a

$$\langle \alpha/\gamma, \beta \rangle = \langle \delta\alpha', \beta \times \gamma \rangle = \langle \alpha', d(\beta \times \gamma) \rangle = 0,$$

car  $\beta \times \gamma$  est un cycle. De même si  $\gamma = d\gamma'$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \alpha/d\gamma', \beta \rangle &= \langle \alpha, \beta \times d\gamma' \rangle \\ &= \langle \alpha, (-1)^{\|\beta\|} (d(\beta \times \gamma') - d\beta \times \gamma') \rangle \\ &= \langle \alpha, (-1)^{\|\beta\|} d(\beta \times \gamma') \rangle = \langle \delta a, (-1)^{\|\beta\|} \beta \times \gamma' \rangle = 0. \end{aligned}$$

On obtient donc le produit slant

$$/ : H^n(X \times Y) \otimes H_q(Y) \longrightarrow H^{n-q}(X),$$

que l'on peut voir comme l'évaluation de la classe  $\alpha$  sur  $\gamma$ . Pour  $\alpha \in H^n(X \times Y)$ , on peut définir

$$\begin{aligned} \alpha/ : H_q(Y) &\longrightarrow H^{n-q}(X), \\ \gamma &\mapsto \alpha/\gamma. \end{aligned}$$

**Remarque 4.1.1.** On peut également considérer le produit slant sur  $X \wedge Y$  en composant avec le pullback  $p^*$  de la projection naturelle  $X \times Y \xrightarrow{p} X \wedge Y$ .

## 4.2. DUALITÉ DE SPANIER-WHITEHEAD

On note par  $i_n \in H_n(S^n)$  la classe fondamentale de  $S^n$ , et par  $i^n$  la classe de  $H^n(S^n)$  telle que  $\langle i^n, i_n \rangle = 1$ .

**Définition 4.2.1.** Deux espaces  $X$  et  $X'$  sont Spanier-Whitehead  $n$ -duaux ( $n$ -duaux) s'il existe une fonction

$$u : X \wedge X' \longrightarrow S^n,$$

telle que l'application

$$\phi_u = u^*(i^n)/ : H_q(X') \longrightarrow H^{n-q}(X),$$

est un isomorphisme pour  $1 \leq q \leq n$ . On dit alors que la fonction  $u$  est une dualité.

**Remarque 4.2.2.** Si  $X$  et  $X'$  sont  $n$ -duaux, alors  $\Sigma^q X$  et  $\Sigma^p X'$  sont  $n + q + p$ -duaux à l'aide de l'application

$$\begin{aligned} \Sigma^q X \wedge \Sigma^p X' &\longrightarrow \Sigma^{q+p} S^n = S^{n+q+p}, \\ ((x, t_1, \dots, t_q), (x', s_1, \dots, s_p)) &\mapsto (u(x, x'), t_1, \dots, t_q, s_1, \dots, s_p). \end{aligned}$$

**Définition 4.2.3.** Soient  $X$  et  $X'$ ,  $n$ -duaux, et  $Y$  et  $Y'$ ,  $n$ -duaux par des dualités respectives  $u$  et  $v$ . On dit que  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y' \rightarrow X'$  sont des applications duales si il existe  $k$  et  $k'$  tels que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^k X \wedge \Sigma^{k'} Y' & \xrightarrow{f \wedge 1} & \Sigma^k Y \wedge \Sigma^{k'} Y' \\ 1 \wedge g \downarrow & & \downarrow v \\ \Sigma^k X \wedge \Sigma^{k'} X' & \xrightarrow{u} & S^{n+q+p}. \end{array}$$

**Exemple 4.2.4.** Si  $X = S^p$  et  $X' = S^q$ , alors  $X$  et  $X'$  sont  $p + q$ -duaux à l'aide de l'application

$$u : X \wedge X' \xrightarrow{Id} S^{p+q}.$$

Si deux applications  $f : S^p \rightarrow S^p$  et  $g : S^q \rightarrow S^q$  sont duales, on a que le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} & f \wedge 1 & \\ & \curvearrowright & \\ S^p \wedge S^q & & S^{p+q}. \\ & \curvearrowleft & \\ & 1 \wedge g & \end{array}$$

Ceci nous donne que les applications  $f$  et  $g$  ont le même degré, car  $\deg(1 \wedge f) = \deg(1) \cdot \deg(f) = \deg f$ .

**Proposition 4.2.5.** Soient  $A, B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , deux ensembles complémentaires dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . C'est-à-dire que  $B$  est un rétracte de déformation de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ . Si on définit

$$u : A \wedge B \rightarrow S^n,$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

Alors  $u$  est une dualité.

**DÉMONSTRATION.** Bien que nous ayons retrouvé cet énoncé à plusieurs endroits dans la littérature, nous n'avons pu en trouver une démonstration. Celle que nous donnons est donc originale.

Il est assez simple de voir que les groupes  $H_q(A)$  et  $H^{n-q}(B)$  sont isomorphes :

$$\begin{aligned} H_q(A) &\underset{\text{l.s.e.}}{\cong} H_{q+1}(\mathbb{R}^{n+1}, A) \underset{\text{excision}}{\cong} H_{q+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A, \partial A) \\ &\cong H_{q+1}(B, \partial B) \underset{\text{Poincaré}}{\cong} H^{n+1-(q+1)}(B) = H^{n-q}(B). \end{aligned}$$

Où le premier isomorphisme vient de la longue suite exacte associée au couple  $(\mathbb{R}^{n+1}, A)$ , cet isomorphisme n'est valide que pour  $q \geq 1$ . Ce qui est plus subtil, c'est de voir qu'en fait cet isomorphisme est induit par le produit slant avec  $u^*(i^n)$ .

On définit une application

$$\phi : C_q(A) \otimes C_{n-q}(B) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} C_q(A) \otimes C_{n-q}(B) & \longrightarrow & C_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\cong} & C_n(S^n) \xrightarrow{i^n} \mathbb{Z} \\ \cong \downarrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\ C_n(A \times B) & \xrightarrow{(x-y)_*} & C_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) & \xrightarrow{u_*} & C_n(S^n) \end{array}$$

Il est équivalent de considérer l'application  $\frac{x-y}{\|x-y\|}$  avec image dans  $S^n$  ou de considérer la fonction  $x-y$  avec image dans  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . On voit que l'homomorphisme

$$\tilde{\phi} : C_q(A) \longrightarrow C_{n-q}(B),$$

$$\alpha \mapsto (\beta \mapsto \phi(\alpha \otimes \beta))$$

est induit par le produit slant car

$$\phi(\alpha \otimes \beta) = \langle i^n, u_*(\alpha \times \beta) \rangle = \langle u^*i^n, \alpha \times \beta \rangle.$$

Si la fonction  $\phi$  est non dégénérée, nous aurons un isomorphisme. Celle-ci est bien définie en homologie car elle donnée par le produit slant. Au lieu de considérer la fonction  $\phi$ , nous allons montrer que la fonction  $\psi$  est non-dégénérée :

$$\begin{array}{ccc} H_{q+1}(\mathbb{R}^{n+1}, A) \otimes H_{n-q}(B) & \xrightarrow{\cong} & H_q(A) \otimes H_{n-q}(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}. \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \psi \end{array}$$

Cette fonction s'obtient comme le passage en homologie de la fonction

$$(\mathbb{R}^{n+1}, A) \times B \xrightarrow{x-y} (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}),$$

Cette dernière fonction se factorise :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{n+1}, A) \times B & \xrightarrow{x-y} & (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \\ \downarrow j & \nearrow p_1 - p_2 & \\ (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta) & & \end{array}$$

Où  $\Delta$  est la diagonale et  $p_1$  et  $p_2$  sont les projections. On obtient au niveau des chaînes

$$\begin{array}{ccc} C_{q+1}(\mathbb{R}^{n+1}, A) \otimes C_{n-q}(B) & \xrightarrow{(x-y)_*} & C_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \\ \downarrow j_* & \nearrow (p_1 - p_2)_* & \downarrow i^{n+1} \\ C_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta) & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Or, on remarque que l'application  $p_1 - p_2$  nous donne un fibré de fibre  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Il y a alors une équivalence d'homotopie entre les couples  $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$  et  $(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta)$ . Il est donc suffisant d'étudier l'application  $j_*$ . Maintenant, nous allons prendre des bases de  $C_{q+1}(\mathbb{R}^{n+1}, A)$  et de  $C_{n-q}(B)$  bien choisies et allons montrer que  $i^{n+1} \circ j_*$  est non dégénérée.

On prend une fonction de Morse-Smale

$$f : B \longrightarrow \mathbb{R},$$

telle que la fonction

$$-f : (\mathbb{R}^{n+1}, A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

nous permette de construire le complexe de Morse de  $(\mathbb{R}^{n+1}, A)$ . Ici, le fait que  $A$  et  $B$  soient complémentaires dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  est crucial pour l'existence d'une telle fonction. Nous pouvons maintenant expliciter des bases

$$C_{n-q} = \langle W^U(p_{n-q}^i) \rangle \quad \text{et} \quad C_{q+1}(\mathbb{R}^{n+1}, A) = \langle W^S(p_{n-q}^i) \rangle.$$

On peut voir un générateur de  $(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Delta)$  comme étant une fibre de  $p_1 - p_2$ . Nous avons donc qu'en fait

$$i^{n+1} \circ j_*(W^U(p_{n-q}^i) \otimes W^S(p_{n-q}^k)) = \#((W^U(p_{n-q}^i) \times W^S(p_{n-q}^k)) \cap \Delta).$$

Or  $(W^U(p_{n-q}^i) \times W^S(p_{n-q}^k)) \cap \Delta$  est non vide si et seulement si  $i = k$ , ceci nous donne que  $i^{n+1} \circ j_*$  est diagonale et donc, non-dégénérée.  $\square$

**Corollaire 4.2.6.** Soient  $A, B \subseteq S^{n+1}$ , deux ensembles complémentaires dans  $S^{n+1}$ . On prend un point  $x_0 \notin A \cup B$ , alors  $S^{n+1} \setminus \{x_0\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{n+1}$ , à l'aide de cet homéomorphisme, on définit

$$u : A \wedge B \longrightarrow S^n,$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

Alors  $u$  est une dualité.

DÉMONSTRATION. On prend un petit disque  $D$  autour de  $x_0$  que l'on relie par un chemin  $\gamma$  à  $A$ , de sorte que

$$A' = A \cup D \cup \gamma$$

soit disjoint de  $B$ . Alors  $A'$  a le même type d'homotopie que  $A$ . On définit

$$A'' = A' \setminus \{x_0\}.$$

Maintenant, si on «ouvre» la sphère, les ensembles  $A''$  et  $B$  sont complémentaires dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , donc  $u^*(i^n)/$  nous donne un isomorphisme entre  $H_k(A'')$  et  $H^{n-k}(B)$ , pour  $1 \leq q \leq n$ . Nous avons donc un isomorphisme entre  $H_k(A)$  et  $H^{n-k}(B)$ . Le diagramme commutatif suivant nous assure que cet isomorphisme est donné par  $u^*(i^n)/$ .

$$\begin{array}{ccc} A'' \times B & \xrightarrow{(x-y)} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}. \\ \uparrow i & \nearrow (x-y) & \\ A \times B & & \end{array}$$

Ceci donne en homologie

$$\begin{array}{ccc} H_q(A'') & \xrightarrow[u^*(i^n)/]{\cong} & H^{n-q}(B). \\ \uparrow & \nearrow u^*(i^n)/ & \\ H_q(A) & & \end{array}$$

Regardons la longue suite exacte

$$0 \longrightarrow H_{q+1}(A) \xrightarrow{i^*} H_{q+1}(A'') \xrightarrow{j} H_{q+1}(S^{n+1}) \longrightarrow H_q(A) \longrightarrow \dots$$

$H_{q+1}(A)$  est clairement 0 et  $j$  est un isomorphisme il envoie, par définition, la classe fondamentale sur le générateur de  $H_{q+1}(S^{n+1})$ . Nous avons donc que  $i$  est un isomorphisme pour  $1 \leq q \leq n$  et par conséquent  $u^*(i^n)/$ .  $\square$

### 4.3. LIENS AVEC L'INDICE DE CONLEY

**Définition 4.3.1.** *Un triplet  $(N_1, N_0, N_2)$  est un triplet d'indices pour un ensemble invariant isolé  $S$  si  $(N_1, N_0)$  est une paire d'indice pour  $S$  et  $(N_1, N_2)$  est une paire d'indice pour  $S$  pour le flot  $-\gamma$ . Un triplet d'indices est un bloc d'indices si  $N_0$  et  $N_2$  s'intersectent transversalement sur  $\partial N_0 = \partial N_2$ .*

**Proposition 4.3.2.** *Soit  $S$  un ensemble invariant isolé. Il existe un bloc d'indices régulier  $(N_1, N_0, N_2)$  pour  $S$ . C'est-à-dire que les paires  $(N_1, N_0)$  et  $(N_1, N_2)$  sont régulières.*

Une esquisse de la démonstration peut être trouvée dans [Co2]

**Proposition 4.3.3.** *Soit  $S$  un ensemble invariant isolé pour un flot  $\gamma$  sur une variété  $M^{n-1}$ . Soit  $(N_1, N_0)$ , un bloc d'indices régulier pour  $S$ . S'il existe un plongement  $N_1 \hookrightarrow S^{n-1}$ , alors les espaces  $c_\gamma(S)$  et  $c_{-\gamma}(S)$  sont Spanier-Whitehead duaux.*

DÉMONSTRATION. On montre simplement que les espaces  $N_1/N_2$  et  $N_1/N_0$  sont complémentaires dans  $S^n$ .

On écrit

$$S^n = \frac{S^{n-1} \times [-1, 1]}{S^{n-1} \times \{-1\}, S^{n-1} \times \{1\}}.$$

On considère

$$X = N_1 \cup CN_0 \simeq N_1/N_0.$$

On pose

$$CN_0 = N_0 \cup \{\text{géodésiques reliant } N_0 \text{ au pôle nord}\}.$$

Nous voulons maintenant trouver une copie de  $N_1 \cup CN_2$  qui soit disjointe de  $X$ .

Pour cela, on pose

$$N'_i = N_i \times \{1/2\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

On remarque que  $N'_1 \cap X = N'_0$ . Nous allons pousser  $N'_0$  de sorte que cette intersection soit vide. Il existe un voisinage tubulaire  $U \subseteq S^{n-1} \times \{1/2\}$  de  $N'_0$ .

C'est un fibré normal en ligne, il est trivial, car  $N'_0$  sépare  $S^{n-1} \times \{1/2\}$ . Puisque  $N'_0$  et  $N'_1$  s'intersectent transversalement, il existe un homéomorphisme

$$\phi : U \xrightarrow{\cong} N'_0 \times [-1, 1],$$

de sorte que

$$\phi^{-1}(\partial N'_0 \times [-1, 1]) \subseteq N'_2.$$

On peut alors définir une rétraction

$$H_0 : N'_1 \times I \longrightarrow N'_1$$

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin U, \\ \phi^{-1}((x_0, s + (1-s)t)) & \text{si } \phi(x) = (x_0, s). \end{cases}$$

L'inclusion  $N''_1 = H_0(N'_1, 1) \hookrightarrow H_0(N'_1, 0) = N'_1$  est évidemment une équivalence d'homotopie. On obtient une nouvelle paire d'indices  $(N''_1, N''_0)$  disjointe de  $X$ . On voudrait considérer

$$N''_1 \cup CN''_2 = N''_1 \cup (N''_2 \times (-\pi/2, \pi/4]) \cup \{\text{pôle sud}\},$$

or  $\emptyset \neq (N''_1 \cup CN''_2) \cap X \subseteq N_2$ . On veut donc «pousser»  $N''_2$  un peu de sorte que cette intersection soit vide. De la même façon, on trouve un voisinage tubulaire  $V \subseteq S^{n-1} \times \{1/2\}$  de  $N''_2$  avec un homéomorphisme

$$\psi : V \xrightarrow{\cong} N''_2 \times [-1, 1],$$

de sorte que

$$\psi^{-1}(\partial N''_2 \times [-1, 1]) \subseteq N''_0.$$

On note

$$N_1^{(3)} = N''_1 \cup \psi^{-1}(N''_2 \times [-1, 1]),$$

$$N_2^{(3)} = \psi^{-1}(N''_2 \times \{-1\}),$$

$$N_0^{(3)} = N''_0 \cup \psi^{-1}(\partial N''_2 \times [-1, 1]).$$

On définit alors

$$H_2 : (N_1^{(3)} \cup V) \times I \longrightarrow N_1^{(3)} \cup V$$

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin V, \\ \psi^{-1}((x_0, s + 1/2(s+1)t)) & \text{si } \psi(x) = (x_0, s), -1 \leq s \leq 0, \\ \psi^{-1}((x_0, s + (1/2 - s)t)) & \text{si } \psi(x) = (x_0, s), 0 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

On peut restreindre  $H_2$  à  $N_1'' \times I$ , on voit alors que l'inclusion  $N_1'' \hookrightarrow N_1'''$  est une équivalence d'homotopie. On obtient une nouvelle paire d'indices  $(N_1^{(3)}, N_0^{(3)})$  pour laquelle

$$(N_1^{(3)} \cup CN_2^{(3)}) \cap X = \emptyset.$$

On définit

$$Y = N_1^{(3)} \cup CN_2^{(3)}$$

avec

$$CN_2^{(3)} = N_2^{(3)} \cup \{\text{géodésiques reliant } N_2^{(3)} \text{ au pôle sud}\}.$$

La situation obtenue est illustrée à la figure 4.1

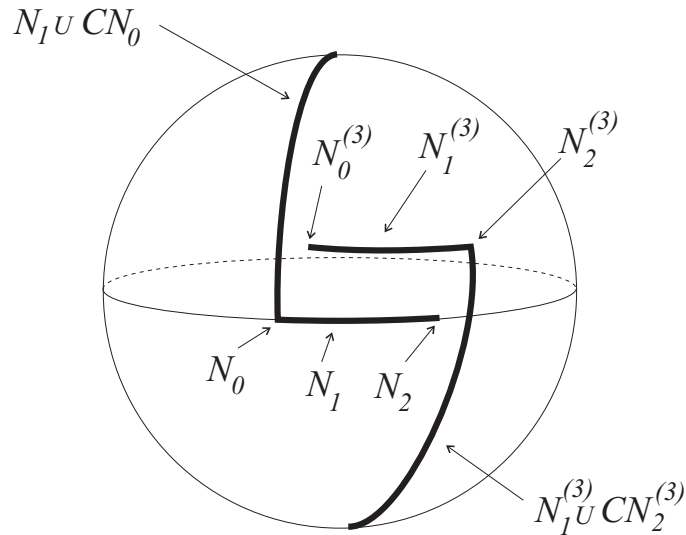


FIG. 4.1. Dessin de la situation.

On prétend que  $S^n \setminus X$  se rétracte sur  $Y$ , et donc que  $X$  et  $Y$  sont Spanier-Whitehead duaux.

On peut étendre les fonctions  $H_0$  et  $H_2$  sur toute la sphère en posant

$$H_0([(x, r)], t) = [(H_0(x, t), r)].$$

On peut maintenant construire une rétraction de  $S^n \setminus X$  sur  $Y$ .

$$H : (S^n \setminus X) \times I \longrightarrow S^n \setminus X,$$

$$\left( [(x, r)], t \right) \mapsto \begin{cases} [(x_e, r)] & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, r \geq 0, \\ & (x, 1/2) \notin \phi^{-1}(N'_0 \times [-1, 0]), \\ [(H_0(x, 2t), r)] & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, r \geq 0, \\ & (x, 1/2) \in \phi^{-1}(N'_0 \times [-1, 0]), \\ [(x, r + (-1 - r)(2t - 1)), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1, \\ & -1 \leq r \leq 1/2, (x, 1/2) \notin V, \\ [(H_2(x, 2t - 1), r + (-1 - r)(2t - 1)), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1, \\ & -1 \leq r \leq 1/2, (x, 1/2) \in V. \end{cases}$$

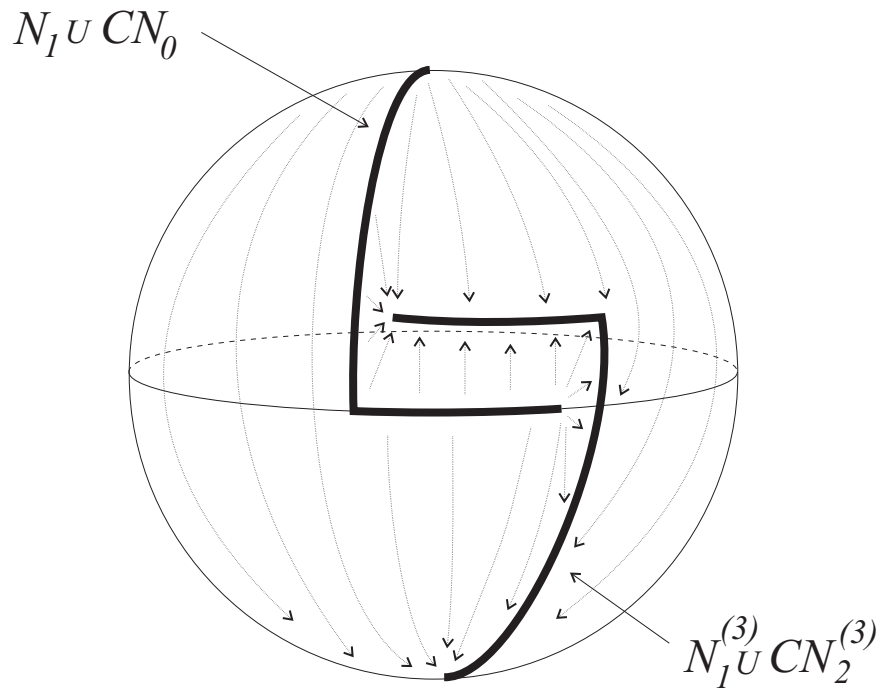


FIG. 4.2. La rétraction  $H$ .

On prétend que  $H$  est continue et que  $H(S^n \setminus X, 1) = Y$ . Nous avons donc que  $Y$  est un rétracte de déformation de  $S^n \setminus X$  et donc que  $X$  et  $Y$  sont Whitehead duaux.  $\square$

On a donc dans ce cas que  $c_\gamma(S)$  et  $c_{-\gamma}(S)$  sont Spanier-Whitehead duaux. Plus généralement, on a le résultat suivant.

**Théorème 4.3.4 ([Co2]).** *Soient  $M$  stablement parallélisable,  $\gamma$  un flot sur  $M$  et une paire attracteur-répulseur  $(S, A, A^*)$ . Alors les applications*

$$\delta : c_\gamma(A^*) \longrightarrow c_\gamma(A)$$

et

$$\delta' : c_{-\gamma}(A) \longrightarrow c_{-\gamma}(A^*)$$

sont Spanier-Whitehead duales.

DÉMONSTRATION. (Idée) Soit  $(N_1, N_0, N_2)$  un triplet d'indices pour  $S$ . On a un plongement  $N_1 \hookrightarrow M \hookrightarrow S^m$ , pour un  $m$  assez grand. On peut étendre le flot  $\gamma$  sur un voisinage tubulaire  $U$  de  $M$  en rajoutant une composante radiale positive : on prend la fonction

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, t) &\mapsto \|t\|^2. \end{aligned}$$

Alors  $\nabla g$  nous donne un champs de vecteurs sur  $U$ , qui définit un flot  $\tilde{\gamma}$  sur  $U$ . Nous travaillerons maintenant avec le flot

$$\gamma' = \gamma + \tilde{\gamma}.$$

Alors  $S$  est un ensemble invariant isolé pour  $\gamma'$  et  $(D(N_1), S(N_1) \cup D(N_0), D(N_2))$  est un triplet d'indices pour  $S$ , où  $D(\cdot)$  et  $S(\cdot)$  représentent les fibrés en disque et en sphère du fibré normal.

Puisque qu'on a maintenant un plongement

$$U \hookrightarrow S^m,$$

la proposition précédente nous dit que  $D(N_1)/(S(N_1) \cup D(N_0))$  et  $D(N_1)/D(N_2)$  sont Spanier-Whitehead duaux. Mais on a que

$$\frac{D(N_1)}{D(N_2)} \simeq \frac{N_1}{N_2}$$

et

$$\frac{D(N_1)}{S(N_1) \cup D(N_0)} \simeq \frac{D(N_1)/S(N_1)}{D(N_0)/S(N_0)} \simeq \frac{T^\nu(N_1)}{T^\nu(N_0)},$$

où  $T^\nu(\cdot)$  est l'espace de Thom associé au fibré normal  $\nu$ . Si  $M$  est stablement parallélisable, il est possible de choisir  $m$  assez grand pour que le fibré normal soit trivial. On a alors que  $T^\nu(N_i) \simeq \Sigma^k N_i$ , où  $k = \text{rang}(\nu)$ . Alors

$$\frac{T^\nu(N_1)}{T^\nu(N_0)} \simeq \frac{\Sigma^k N_1}{\Sigma^k N_0} \simeq \Sigma^k \left( \frac{N_1}{N_0} \right).$$

On a donc que  $c_{-\gamma}(S)$  et  $\Sigma^k c_\gamma(S)$  sont Spanier-Whitehead duaux. On peut se référer à [Co2] pour le fait que les applications  $\delta$  et  $\delta'$  sont duales.  $\square$

#### 4.4. DUALITÉ DE POINCARÉ

On regarde maintenant le cas où le flot est donné par le gradient d'une fonction de Morse-Smale. Pour  $x, y \in \text{Crit} f$ , tels que  $\mu(x) - \mu(y) = 1$ , on peut définir une paire attracteur-répulseur avec  $A = \{y\}$ ,  $A^* = \{x\}$  et  $S = A \cup A^* \cup M_y^x$ . On obtient que les applications  $\delta_{xy}$  et  $\delta'_{yx}$ , données par  $f$  et  $-f$  respectivement sont Spanier-Whitehead duales, donc de même degré. À chaque point critique  $x \in \text{Crit}_k f$  correspond un point critique  $\bar{x} \in \text{Crit}_{n-k} -f$ . La fonction  $f$  induit

$$\begin{aligned} C_k(f) &\xrightarrow{d} C_{k-1}(f), \\ x &\mapsto \sum_y n_f(x, y)y. \end{aligned}$$

De même,  $-f$  induit

$$\begin{aligned} C_{n-k+1}(-f) &\xrightarrow{\bar{d}} C_{n-k}(-f), \\ \bar{y} &\mapsto \sum_{\bar{x}} n_{-f}(\bar{x}, \bar{y})\bar{y}. \end{aligned}$$

Mais la dualité nous dit que

$$n_f(x, y) = n_{-f}(\bar{x}, \bar{y}).$$

On applique le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$  pour l'application  $\bar{d}$  et on obtient

$$\begin{aligned} C^{n-k}(-f) &\longrightarrow C^{n-k+1}(-f), \\ \bar{x} &\mapsto \sum_{\bar{y}} n_f(x, y)\bar{y}. \end{aligned}$$

Les deux complexes de chaînes  $((C_*(f), d)$  et  $(C^{n-*}(-f), \delta)$  sont donc essentiellement les mêmes. Ceci nous donne

$$H_k(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-k}(M).$$

En fait, ceci nous dit que la différentielle en cohomologie est simplement

$$C^q(M, f) \longrightarrow C^{q+1}(M, f),$$

$$x \mapsto \sum_y n_f(y, x)y.$$

# Chapitre 5

---

## COMPLEXE DE MORSE-NOVIKOV

Dans ce chapitre, nous étudierons plus en profondeur quelques propriétés du complexe de Morse-Novikov.

### 5.1. ZÉROS DE 1-FORMES

La théorie de Morse-Novikov a pour but d'étudier l'information fournie par les points critiques d'une fonction

$$f : M \longrightarrow S^1.$$

Cette étude entre dans le cadre d'un sujet plus vaste : l'étude des zéros d'une 1-forme  $\omega$ .

**Définition 5.1.1.** *Soit  $\omega$ , une 1-forme sur  $M$ .*

- (1) *On dit que  $x \in M$  est un zéro de  $\omega$  si  $\omega(x) = 0 \in \text{Hom}(T_x^*M, \mathbb{R})$ .*
- (2) *Un zéro  $x$  est dit non dégénéré si  $\omega : M \longrightarrow T^*M$  est transverse à la section nulle de  $T^*M$  en  $x$ .*
- (3)  *$\omega$  est dite de Morse si tous ses zéros sont non-dégénérés.*

Localement, sur un petit ouvert  $U$ , une 1-forme  $\omega$  peut s'écrire comme  $\omega = df$  pour une fonction  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ . On peut alors définir le flot gradient négatif de la même façon que pour une fonction de Morse, l'indice de Morse d'un point critique ainsi que ses variétés stables et instables.

**Définition 5.1.2.** *Soit  $\omega$ , une 1-forme sur  $M$ . On dit que  $\omega$  est de Morse-Novikov si les variétés stables et instables s'intersectent transversalement.*

**Exemple 5.1.3.** Sur  $S^1$ , on peut considérer la forme angulaire  $d\theta$ , où  $\theta(x) = (1/2\pi)\phi$  et  $\phi$  est la fonction multivoque donnant l'angle sur le cercle.  $d\theta$  est une forme fermée sans zéros. En fait, on a

$$\int_{S^1} d\theta = 1.$$

**Exemple 5.1.4.** Soit  $f : M \rightarrow S^1$ , on obtient une 1-forme  $\omega = f^*d\theta$ .

Nous nous intéresserons ici aux 1-formes obtenues de cette manière. Nous pouvons en fait les caractériser. Soit  $\omega$  une 1-forme fermée. Elle détermine un élément  $[\omega] \in H^1(M)$ . Puisqu'alors l'intégrale de  $\omega$  sur un chemin ne dépend que de la classe d'homotopie de celui-ci, on a un homomorphisme

$$\begin{aligned} \pi_1(M) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \gamma &\longmapsto \int_{\gamma} \omega. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbb{R}$  est abélien, cet homomorphisme se factorise uniquement par

$$\text{Per}_{\omega} : H_1(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On appelle  $\text{Per}_{\omega}$ , l'homomorphisme de périodes.  $\text{Per}_{\omega}$  caractérise entièrement  $\omega$ .

**Proposition 5.1.5.**  $\omega \in H^1(M)$  peut s'écrire comme  $\omega = f^*d\theta$  pour une certaine fonction  $f : M \rightarrow S^1$ , si et seulement si la forme  $\omega$  est entière.

DÉMONSTRATION. Soit  $f : M \rightarrow S^1$  et  $\omega = f^*d\theta$ . Alors pour tout  $\gamma \in \pi_1(M)$ , on a que

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} f^*d\theta = \int_{f\#\gamma} d\theta \in \mathbb{Z}.$$

De même, si  $\omega$  est entière, pour chaque  $x \in M$ , l'intégrale  $\int_{x_0}^x \omega$  est bien définie à l'addition d'un entier près. Alors la fonction

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow S^1, \\ x &\longmapsto \exp\left(2\pi i \int_{x_0}^x \omega\right), \end{aligned}$$

est bien définie et on a  $\omega = f^*d\theta$ . □

## 5.2. MORPHISME DE COMPARAISON

Nous regardons maintenant les propriétés du complexe de Morse-Novikov, que nous avons défini au chapitre 1. Les techniques utilisées ici seront très semblables à celles pour le complexe de Morse.

Comme dans le cas classique

**Proposition 5.2.1.** *Soient  $f, g : M \longrightarrow S^1$  deux fonctions de Morse-Novikov et*

$$h : M \times I \longrightarrow S^1,$$

*une homotopie entre  $f$  et  $g$ . Alors il y a un isomorphisme naturel*

$$H_*(M; f) \xrightarrow{\cong} H_*(M; g).$$

DÉMONSTRATION. On procède comme dans le cas d'une fonction de Morse-Smale. On suppose que  $h$  est une homotopie de Morse-Novikov. Soit

$$\alpha : I \longrightarrow S^1$$

une fonction avec points critiques 0 et 1 d'indices 1 et 0 respectivement. On considère la fonction

$$h' = h + \alpha.$$

Quitte à multiplier  $h$  par une constante, on peut supposer que

$$\text{Crit}_q h' = \text{Crit}_{q-1} f \sqcup \text{Crit}_q g.$$

Alors la différentielle  $d_{h'}$  nous donne une application

$$H : C_q(M; f) \longrightarrow C_q(M; g),$$

qui passe en homologie car  $d_{h'}^2 = 0$ . En suivant toujours la démonstration du cas classique, on obtient une longue suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \cdots & \longrightarrow & & H_q(M; f) \\
 & & & & \searrow^{\delta} & & \nearrow \\
 H_q(M; g) & \xrightarrow{i^*} & H_q(C_*(M \times I; h'), d_{h'}) & \xrightarrow{q^*} & H_{q-1}(M; f) & & \\
 & & & \searrow^{\delta} & & & \nearrow \\
 H_{q-1}(M; g) & \longrightarrow & \cdots & & & & 
 \end{array}$$

Il reste seulement à identifier  $H_q(C_*(M \times I; h'), d_{h'})$ . Or on voit que c'est simplement  $H_q(M \times I, M \times \{0\}; h')$  en allongeant les deux bouts de  $M \times I$  et en y prolongeant la fonction  $h'$  sans point critique. Or  $M \times I / M \times \{0\}$  est contractile, donc  $H_q(C_*(M \times I; h'), d_{h'}) = 0$ , d'où le résultat.  $\square$

### 5.3. LIENS AVEC L'HOMOLOGIE À COEFFICIENTS LOCAUX

Nous présentons les rudiments de l'homologie à coefficients locaux.

Soit

$$\sigma : \pi_1(M) \times G \longrightarrow G$$

une action sur un groupe abélien  $G$ .

Le groupe fondamental agit sur le revêtement universel  $\tilde{M}$  de  $M$ , et donc sur l'homologie singulière  $C_*(\tilde{M})$  par composition avec l'action. Les groupes  $G$  et  $C_*(\tilde{M})$  ont alors tous les deux des structures de  $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules. On peut former un complexe de chaîne  $(C_*(M; G), d)$ , avec

$$C_q(M; G) = C_q(M) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} G,$$

$$d_G = d \otimes id.$$

**Définition 5.3.1.** *Soit  $\sigma : \pi_1(M) \times G \longrightarrow G$  une action. L'homologie à coefficients locaux est définie par*

$$H_*(M; G) = H_*(C_q(M; G), d_G).$$

On peut également définir une version cohomologique. Pour cela on pose

$$C^q(M; G) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi]}(C_q(\tilde{M}), G),$$

avec la différentielle  $\delta$  naturelle. Ce complexe nous donne la cohomologie à coefficients locaux  $H^*(M; G)$ .

**Remarque 5.3.2.** *Le produit cup passe à la cohomologie à coefficients locaux de la manière naturelle. La dualité de Poincaré également.*

Il est possible de définir une version un peu plus générale du complexe de Morse-Novikov. Soient  $f : M \rightarrow S^1$  une fonction de Morse-Smale,  $\overline{M} = f^*\mathbb{R}$  et  $\rho : M' \rightarrow \overline{M}$  un revêtement régulier de  $\overline{M}$  avec groupe d'automorphisme  $\pi$ . On a donc que le groupe  $\Pi$  d'automorphismes du revêtement régulier  $M' \rightarrow M$  s'écrit comme le produit semi-direct

$$\Pi = \pi \rtimes_{\zeta} \mathbb{Z},$$

avec

$$\begin{aligned} \zeta : \pi &\longrightarrow \pi, \\ g &\mapsto z^{-1}gz. \end{aligned}$$

On peut alors construire l'anneau de Novikov

$$\mathbb{Z}[\pi]_{\zeta}((z)) = \left\{ \sum_{k=-l}^{\infty} a_k z^k : l \in \mathbb{Z}^+, a_k \in \mathbb{Z}[\pi] \right\},$$

où  $\mathbb{Z}[\pi]$  est l'anneau groupal de  $\pi$ . On définit le complexe de Morse-Novikov  $(C_*(M; f, \rho), d)$ , où

$$C_q(M; f, \rho) = \mathbb{Z}[\pi]_{\zeta}((z)) \langle \text{Crit}_q f \rangle$$

avec la différentielle

$$\begin{aligned} d : C_q(M; f, \rho) &\longrightarrow C_{q-1}(M; f, \rho) \\ x &\mapsto \sum_{y \in \text{Crit}_{q-1} f} \sum_{g \in \pi} \sum_{k \geq 0} n_f(x, z^k gy) z^k gy. \end{aligned}$$

On pose  $n_f(x, z^k gy) = n_{\tilde{f}}(x, z^k gy)$ , où  $\tilde{f} = \bar{f} \circ \rho$ .

Soit  $\omega$  la 1-forme sur  $M$  correspondant à la fonction  $f$ . L'homomorphisme des périodes

$$\text{Per}_{\omega} : \pi_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

nous permet de former une action de  $\pi_1(M)$  sur l'anneau de Novikov,

$$\begin{aligned} \pi_1(M) \times \mathbb{Z}[\pi]_\zeta((z)) &\longrightarrow \mathbb{Z}[\pi]_\zeta((z)), \\ \left( g, \sum_i a_i z^i \right) &\mapsto \sum_i a_i z^{i+\text{Per}_\omega(g)}. \end{aligned}$$

On peut alors construire l'homologie à coefficients locaux  $H_*(M; G)$ .

**Proposition 5.3.3.** *Il y a un isomorphisme*

$$H_*(M; f, \rho) \cong H_*(M; G).$$

DÉMONSTRATION. On peut construire le complexe de chaîne du revêtement universel  $\tilde{M}$  à l'aide de la fonction  $\tilde{f}$ , on voit

$$C_q(\tilde{M}) = \langle \text{Crit}_q f \rangle \mathbb{Z}[\pi_1(M)].$$

Pour  $g \in \pi_1(M)$ , on peut écrire de manière unique

$$g = z^{\text{Per}_\omega(g)} g', \quad g' \in \pi.$$

On définit alors

$$\begin{aligned} C_q(\tilde{M}) \times \mathbb{Z}[\pi]_\zeta((z)) &\longrightarrow \langle \text{Crit}_q f \rangle \mathbb{Z}[\pi]_\zeta((z)) = C_q(M; f, \rho), \\ \left( gx, \sum_i a_i z^i \right) &\mapsto \sum_i z^{i+\text{Per}_\omega(g)} g' a_i. \end{aligned}$$

Cette fonction est clairement bilinéaire et surjective. Elle a comme noyau les éléments de la forme

$$\left( gx, \sum_i z^i a_i \right) - \left( g'x, \sum_i z^{i+k} g'' a_i \right),$$

où  $g' = z^k g''$ . Donc la fonction se factorise par l'isomorphisme

$$C_q(\tilde{M}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} \mathbb{Z}[\pi]_\zeta((z)) \xrightarrow{\cong} C_q(M; f, \rho).$$

C'est clairement un homomorphisme de complexes de chaînes. □

## 5.4. THÉORÈME DE «GLUING» POUR LE COMPLEXE DE MORSE-NOVIKOV

Le théorème dans le cas d'une fonction de Morse se généralise pour une fonction de Morse-Novikov, nous permettant d'obtenir le complexe à partir de l'information obtenue sur le domaine fondamental. L'idée est, comme avant, de remplacer  $f$  par une fonction ayant un meilleur comportement autour de  $f^{-1}(0)$ . Celle-ci sera appelée un scindement de  $f$  et aura comme particularité que toutes les lignes de flots doivent se briser dans un voisinage de  $f^{-1}(0)$ . Il n'y aura donc plus de lignes de flots de longueur arbitrairement grande.

**Définition 5.4.1. [CoRa]** *Un scindement  $(\epsilon, \tau)$  d'une fonction de Morse-Novikov  $f : M \rightarrow S^1$  le long d'une fonction de Morse-Smale  $g : N = f^{-1}(0) \rightarrow S^1$  est une fonction de Morse-Novikov*

$$h : M \rightarrow S^1$$

telle que  $h, h^- = h|_{M^-}$  et  $h^+ = h|_{M^+}$  satisfont les propriétés suivantes :

- (1)  $h|_N = e^{2\pi i \tau} g : N \rightarrow J$  pour un certain intervalle  $J \subseteq S^1$ .
- (2)  $h = f$ , sauf dans un voisinage tubulaire  $W = N \times [-\epsilon, \epsilon] \subseteq M$  de  $N = N \times \{0\} \subseteq M$ , posons  $M^- = M \setminus W$ .
- (3) Avec cette paramétrisation, on a  $f(x, t) = e^{2\pi i t} \in J'$  pour chaque  $(x, t) \in W$ , pour  $J' \subseteq S^1$ , un intervalle contenant 1 et

$$\text{Crit}_q h = \text{Crit}_q f \sqcup (\text{Crit}_{q-1} g \times \{-\epsilon/2\}) \sqcup (\text{Crit}_q g \times \{\epsilon/2\}),$$

- (4) Les restrictions de  $h$  aux sous-variétés

$$W_\epsilon = N \times [-\epsilon/2, \epsilon/2] \subseteq W,$$

$$M'_\epsilon = M^- \setminus (N \times (-\epsilon/2, \epsilon/2)) \subseteq M^-$$

sont des cobordismes de Morse

$$g_\epsilon : W_\epsilon; N \times \{\epsilon/2\}, N \times \{-\epsilon/2\} \rightarrow J''$$

$$h^- : (M'_\epsilon; N \times \{\epsilon/2\}, N \times \{-\epsilon/2\}) \rightarrow J''' \subseteq S^1 \setminus \{1\},$$

de sorte que  $J'' \cup J''' = S^1$

(5) Le cobordisme  $g_\epsilon$  est linéaire.

**Proposition 5.4.2.** *Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale. Alors pour toute fonction de Morse-Smale  $g : N = f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$  et pour tout  $\delta > 0$ , il existe un scindement  $(\epsilon, \tau)$   $h$  de  $f$  le long de  $g$ , de sorte que*

$$\|h - f\|_0 \leq \delta.$$

DÉMONSTRATION. Comme dans le cas de Morse. □

Posons  $D_* = C_*(N, g)$ ,  $F_* = C_*(M_N, f_N)$ . On définit

$$\theta : F_q \rightarrow D_{q-1}$$

$$x \mapsto \sum_{y \in \text{Crit}_{q-1}g} n_h(x, y \times \{\epsilon/2\})y,$$

$$\theta' : D_q \rightarrow F_q$$

$$x \mapsto \sum_{y \in \text{Crit}_q f_N} n_h(x \times \{1 - \epsilon/2\}, y)y,$$

$$\psi : D_q \rightarrow zD_q$$

$$x \mapsto \sum_{y \in \text{Crit}_q g} n_h(x \times \{1 - \epsilon/2\}, y \times \{\epsilon/2\})y$$

(voir figure 5.1)

Soit maintenant

$$C_*(\widehat{M}; h) = F_q \otimes \mathbb{Z}((z))$$

avec la différentielle

$$d_{C_*(\widehat{M}; h)} = d_{f_N} + \sum_{j \geq 0} z^{j+1} \theta' \psi^j \theta.$$

En fait  $C_*(\widehat{M}; h)$  est le conoyau de l'inclusion

$$C_*(W; h|_W) \rightarrow C_*(M; h),$$

$$(s, t) \mapsto (s, t, z\theta't).$$

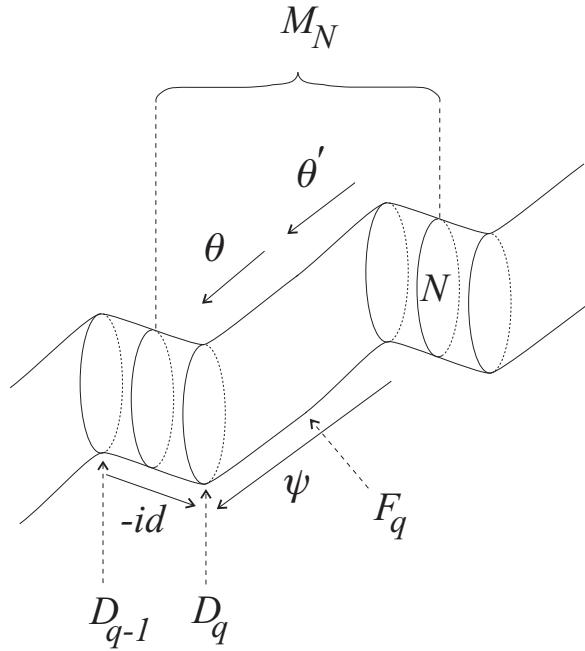


FIG. 5.1. Les applications  $\theta$ ,  $\theta'$  et  $\psi$ .

avec la différentielle induite.

**Théorème 5.4.3.** [CoRa] *Soit  $f : M \rightarrow S^1$  une fonction de Morse-Novikov et  $g : N = f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction de Morse-Smale. Il existe  $\epsilon$  et  $\tau$  assez petits et  $h$  un scindement  $(\epsilon, \tau)$  de  $f$  le long de  $g$  de sorte que la composition*

$$C_*(M; f) \hookrightarrow C_*(M; h) \longrightarrow C^*(\widehat{M}; h)$$

*est un isomorphisme.*

Il est donc possible de reconstruire le complexe de  $f$  uniquement à l'aide du complexe de  $h|_{M_N}$  pour le domaine fondamental  $M_N$ .

**Remarque 5.4.4.** *On peut également suivre cet argument en cohomologie pour obtenir*

$$C^*(\widehat{M}; h) = (F^q \otimes \mathbb{Z}((z^{-1})), \hat{\delta}) \cong (C^*(M; f), \delta),$$

avec  $\hat{\delta}$  donnée par

$$\hat{\delta}(e_x) = \delta_{f_N} e_x + \sum_{j \geq 0} e_x (z^{-j-1} \theta' \psi^j \theta)$$

## 5.5. DUALITÉ DE TYPE POINCARÉ POUR LE COMPLEXE DE MORSE-NOVIKOV

Une contribution de ce mémoire est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 5.5.1.** *Soit  $f : M \rightarrow S^1$  une fonction de Morse-Novikov. La dualité de Poincaré*

$$C_*(M_N, \bar{f}_N) \xrightarrow{\cong} C^{n-*}(M, M_N, -\bar{f}_N),$$

sur un domaine fondamental  $M_N \subseteq \bar{M}$  s'étend à une dualité

$$C_*(M; f) \xrightarrow{\cong} C^{n-*}(M; -f),$$

où  $C^*(M; f)$  est le complexe défini précédemment (définition 1.3.7). Cette dualité correspond à une dualité globale que l'on obtient en remplaçant  $f$  par  $-f$ .

DÉMONSTRATION. On précise tout d'abord la dualité globale

$$C_*(M; f) \xrightarrow{\cong} C^{n-*}(M; -f).$$

Pour cela, on procède comme pour le complexe de Morse. Chaque point critique  $x$  d'indice  $q$  de  $f$ , devient un point critique d'indice  $n - q$  de  $-f$ . On voit que  $C_{n-q}(M; -f) = \mathbb{Z}((z^{-1})) \langle \text{Crit}_q f \rangle$ . La différentielle devient

$$d : C_{n-q+1}(M; -f) \rightarrow C_{n-q}(M; -f),$$

$$y \mapsto \sum_{x \in \text{Crit}_q f, k} n_{-f}(y, z^{-k}x) z^{-k}x.$$

La dualité pour l'indice de Conley nous donne que  $n_{-f}(y, z^{-k}x) = n_f(x, z^k y)$ .

Nous voulons maintenant interpréter ce que ceci nous donne en cohomologie. On se rappelle que  $C^*(M; f)$  a comme générateurs  $\{e_{z^i x}, z^i x \in C_*(M; f)\}$ . Le complexe de cochaînes  $C^*(M; f)$  a été défini de la sorte pour qu'il soit, comme pour le complexe de chaînes, un groupe abélien libre sur les points critiques de  $\bar{f}$ .

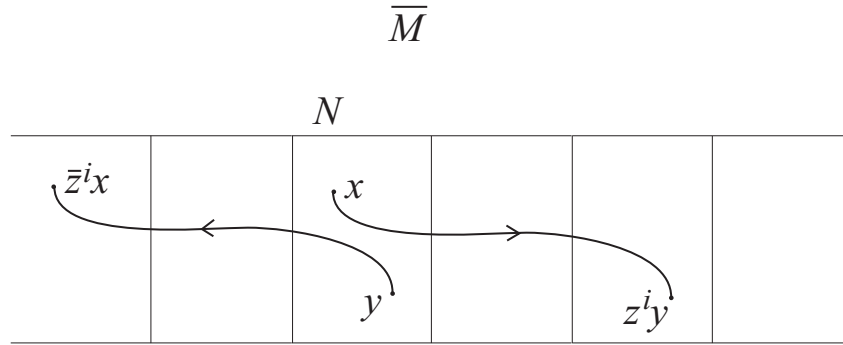


FIG. 5.2.  $n_{-f}(y, \bar{z}^i x) = n_f(x, z^i y)$

Si l'on regarde la différentielle  $d_{-f} : C_{n-q+1}(M; -f) \rightarrow C_{n-q}(M; -f)$  en cohomologie, on obtient

$$\delta : C^{n-q}(M; -f) \rightarrow C^{n-q+1}(\cdot; -f),$$

$$e_x \mapsto \sum_{y \in \text{Crit}_{q-1} f} \left( \sum_{k \leq 0} n_f(x, z^k y) z^k \right) e_y,$$

car

$$C^{n-q}(M; -f) \xrightarrow{\cong} C_{n-q}(M; -f) \xrightarrow{\cong} C_q(M; f),$$

$$z \mapsto \quad \quad z^{-1} \mapsto \quad \quad z.$$

On a donc que les complexes  $(C_*(M; f), d)$  et  $(C^{n-*}(M; -f), \delta)$  sont les mêmes (à isomorphisme près). On obtient

$$H_q(M; f) \xrightarrow{\cong} H^{n-q}(M; -f).$$

Cette dualité peut être décrite de manière locale. Nous savons que la dualité est vraie pour un domaine fondamental  $M_N$ . Nous allons utiliser la formule de Mayer-Vietoris pour montrer que celle-ci s'étend à la dualité globale.

Soit  $g : N = f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale et  $h$  un scindement  $(\epsilon, \tau)$  de sorte que le théorème 5.4.3 soit valide. Nous avons donc un isomorphisme

$$C_*(M; f) \rightarrow F_q \otimes \mathbb{Z}((z)) = \widehat{C_*(M; h)},$$

où  $F_* = C_*(M_N, f_N)$ .

Posons

$$\bar{F}^* = C^*(M_N, -f_N).$$

La dualité de Poincaré appliquée au domaine fondamental nous donne un isomorphisme de complexes de chaînes

$$i : F_* \longrightarrow \bar{F}^{n-*}.$$

On a

$$\hat{i} : C_*(M; f) \cong F_* \otimes \mathbb{Z}((z)) \cong \bar{F}^{n-*} \otimes \mathbb{Z}((z^{-1})) \cong C^{n-*}(M; -f)$$

Nous savons que le premier et le dernier isomorphisme sont des morphismes de complexes de chaînes. Il nous reste à vérifier que l'isomorphisme central en est un. Remarquons pour cela que la différentielle de  $\widehat{C}_*(-h)$  est donnée par des homomorphismes  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\theta}'$  et  $\bar{\psi}$  définis à l'aide de  $-h$ . Pour chaque  $j$ , la dualité locale nous montre clairement que

$$\theta' \psi^j \theta = \bar{\theta}' \bar{\psi}^j \bar{\theta}.$$

C'est-à-dire que le coefficient de  $y$  dans  $\theta' \psi^j \theta(x)$  est le même que le coefficient de  $x$  dans  $\bar{\theta}' \bar{\psi}^j \bar{\theta}(y)$ . Nous avons donc  $d_q = \hat{\delta}^{n-q}$ .  $\square$

## 5.6. PRODUIT CUP POUR LE COMPLEXE DE MORSE-NOVIKOV

Nous définissons ici le produit cup pour le complexe de Morse-Novikov. Cette définition est naturelle, mais n'a jamais été observée dans la littérature.

Soient

$$f_1, f_2, f_3 : M \longrightarrow S^1,$$

de sorte que toutes les variétés stables et instables des trois fonctions s'intersectent transversalement. Pour chacune de ces fonctions, on obtient un revêtement  $\bar{M}_i = f_i^* \mathbb{R}$ . Soit  $\rho : M' \longrightarrow M$  un revêtement commun, c'est-à-dire qu'il y a un diagramme

commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M' & & \\
 & p_1 \swarrow & \downarrow p_2 & \searrow p_3 & \\
 \overline{M}_1 & & \overline{M}_2 & & \overline{M}_3, \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & M & & 
 \end{array}$$

Le revêtement  $\rho$  est la composition  $M' \longrightarrow \overline{M}_i \longrightarrow M$ . On obtient alors trois fonctions de Morse-Smale  $f'_i : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ , obtenues comme composition

$$M' \xrightarrow{p_i} \overline{M}_i \xrightarrow{\bar{f}_i} \mathbb{R}.$$

On peut alors définir le cup produit comme dans le cas classique

$$\begin{aligned}
 C_p(M; f'_1, \rho) \otimes C_q(M; f'_2, \rho) &\longrightarrow C_{p+q-n}(M; f'_3, \rho), \\
 z^i gp \otimes z^j g'q &\mapsto \sum_k \sum_{h \in \pi} \sum_{r \in \text{Crit}_{p+q} f_3} \# \mathcal{M}_{z^k hr}^{z^i gp, z^j g'q} z^k hr.
 \end{aligned}$$

**Proposition 5.6.1.** (1) *Le produit cup est bien défini en homologie.*

(2) *Si  $g_1, g_2$  et  $g_3$  sont des fonctions homotopes à  $f_1, f_2$  et  $f_3$  respectivement, alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(M; f_1) \otimes H_*(M; f_2) & \xrightarrow{\cup_f} & H_*(M; f_3) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 H_*(M; g_1) \otimes H_*(M; g_2) & \xrightarrow{\cup_g} & H_*(M; g_3).
 \end{array}$$

DÉMONSTRATION. (1) Pour chaque points critiques  $z^i gp, z^j g'q$  et  $z^k hr$ , les tripodes appartenant à l'espace de modules  $\mathcal{M}_{z^k hr}^{z^i gp, z^j g'q}$  sont inclus dans une partie compacte de  $M'$ . Le résultat classique (2.3.2) nous montre alors que le produit cup satisfait une règle de Leibniz. Le produit passe donc en homologie.

(2) Même démonstration que dans le cas de Morse, en remarquant que l'espace de modules  $\mathcal{M}_{x_3}^{x_1, x_2}$ , pour  $x_1 \in \text{Crit} f_1, x_2 \in \text{Crit} f_2$  et  $x_3 \in \text{Crit} g_3$  est inclus dans une partie compacte de  $M'$ .

□

**Remarque 5.6.2.** Si  $M' = \tilde{M}$ , le revêtement universel de  $M$ , alors le cup produit est celui donné par le cup produit pour la cohomologie à coefficient locaux. Notre définition nous permet de «descendre» le produit à un revêtement intermédiaire  $M'$ .

Si  $f_2$  et  $f_3$  sont des fonctions homotopes à  $f_1$ , alors le revêtement commun est simplement  $\overline{M}_1$  et on obtient en cohomologie un produit cup

$$H^p(M; f_1) \otimes H^q(M; f_1) \longrightarrow H^{p+q}(M; f_1).$$

**Théorème 5.6.3.** Soient  $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, 2, 3$ , des fonction de Morse-Novikov de sorte que  $N = f_i^{-1}(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  et pour chaque  $i$ ,  $g_i : N = f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse-Smale et  $h_i$  un scindement  $(\epsilon_f, \tau)$  de  $f_i$  le long de  $g_i$ . Alors le produit cup est donné par

$$x \cup y = q_1^{-1}(x) \cup_h q_2^{-1}(y),$$

où  $q_i$  est la projection  $q_i : C_*(M; h_i) \longrightarrow \widehat{C}_*(h_i)$  et  $\cup_h$  dénote le produit cup des fonctions  $h_i$ .

DÉMONSTRATION. Même démonstration que dans le cas de Morse. □

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [BaCo] J.-F. Barraud, O. Cornea, Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence, *preprint 2003*
- [Br] G. E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New-York, 1993.
- [Be] M. Betz, R. L. Cohen, Graph moduli spaces and cohomology operations, *Turkish J. Math* **18** (1994), no.1, 23–41.
- [Ch] Y. Chen, A brief history of Morse homology, *preprint*.
- [Coh] R. L. Cohen, Morse theory and classifying spaces, *Warwick University preprint*, 1995.
- [Co2] O. Cornea, Homotopical dynamics : suspension and duality, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **20** (2000), no. 2, 379–391.
- [Co3] O. Cornea, Homotopical dynamics. II. Hopf invariants, smoothings and the Morse complex, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35** (2002), no. 4, 549–573.
- [CoRa] O. Cornea, A. Ranicki, Rigidity and gluing for Morse and Novikov complexes, *J. Eur. Math. Soc* **5** (2003), 343–394.
- [Fa1] M. Farber, *Topology of closed one-forms*, Mathematical Surveys and Monographs, 108. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Fu1] K. Fukaya, Morse homotopy,  $A^\infty$ -category and Floer homologies, *Proc. of Garc Work shop in Geometry*, Seoul National University, 1993.
- [Fu2] K. Fukaya, Morse homotopy, and its quantization, *Geometric topology (Athens, GA, 1993)*, 409–440, AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [Hu1] M. Hutchings, Y. Lee, Circle-valued Morse theory and Reidemeister torsion, *Geom. Topol.* **3** (1999) 369–396.

- [Hu2] M. Hutchings, Y. Lee, Circle-valued Morse theory, Reidemeister torsion, and Seiberg-Witten invariants of 3-manifolds, *Topology* **38** (1999) 861–888.
- [Hu3] M. Hutchings, Lecture notes on Morse homology (with an eye towards Floer theory and pseudoholomorphic curves), 2002.
- [Ma] J. P. May, *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [Mi1] J. W. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1963.
- [Mi2] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1997.
- [Sa1] D. Salamon, Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **291** (1985), no. 1, 1–41.
- [Sa2] D. Salamon, Morse Theory, the Conley Index and Floer Homology, *Bull. London Math. Soc.* **22** (1990), 113–140.
- [Sc1] M. Schwarz, *Morse homology*, Progress in Mathematics 111, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [We] J. Weber, The Morse-Witten complex via dynamical systems, *preprint*, Munich, 2004.

# INDEX

---

Bloc d'indices, 70

Cône, 50

Cobordisme de Morse-Smale, 22, 23

Cobordisme linéaire, 37

Cofibration, 46

Cohomologie à coefficients locaux, 81

Complexe de Morse, 11

Complexe de Morse-Novikov, 17

Dualité de Spanier-Whitehead, 65

Flot, 53

Flot pseudo-gradient, 8

Fonction de Morse, 7

Fonction de Morse-Novikov, 15

Fonction de Morse-Smale, 10

Homologie à coefficients locaux, 80

Indice de Conley, 56

Indice de Morse, 7

Morphisme de comparaison de Morse, 23

Paire d'indices régulière, 56

Paire NDR, 48

Point critique, 6

Point régulier, 6

Produit cup, 32

Scindement, 37, 83  
Sous-ensemble invariant, 53  
Suite coexacte, 46  
Suspension, 50  
Système connexe simple, 56

Théorème de gluing, 40  
Triplet d'indices, 70  
Tripode, 30

Valeur critique, 6  
Valeur régulière, 6  
Variété instable, 8, 77  
Variété stable, 8, 77