DÉRIVÉES FAIBLES

OLIVIER ROUSSEAU

Dans la recherche de solution d'une équation aux dérivées partielles, il faut souvent avoir recours à des solutions faibles, soit parce qu'il n'existe pas de solution régulière, soit parce qu'il faut passer par une solution faible pour obtenir une solution différentiable. Différentes notions de dérivées faibles sont présentées ici. Elles sont par ordre croissant de régularité : les fonctions intégrables ($L^1(\Omega)$), à variation bornée ($BV(\Omega)$), de Sobolev($W^{1,1}(\Omega)$) et dérivables. Ce qui donne lieu à une suite d'espaces

$$L^1(\Omega) \quad \subseteq \quad BV(\Omega) \quad \subseteq \quad W^{1,1}(\Omega) \quad \subseteq \quad C^1(\Omega).$$

0.1. **Distributions.** Soit $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ sur Ω avec support compact avec la topologie suivante : une suite ϕ_n converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si il existe un compact K avec $\mathrm{spt}\phi_n \subseteq K$ pour chaque n et ϕ_n converge uniformément vers ϕ sur K.

Définition 1. *L'espace des distributions est le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$, c'est-à-dire*

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{L : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : \ L \text{ est une fonctionnelle linéaire continue } \}.$$

Exemple 2. *Soit $f \in L^1$, alors*

$$L_f : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto L_f\phi = \int_\Omega f\phi,$$

est la distribution associée à f. Si $f \in (L^1)^n$, on pose de la même facon

$$L_f : \mathcal{D}(\Omega)^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto L_f\phi \int_\Omega f \cdot \phi.$$

Remarque 3. *Le théorème de Green et le fait que $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ montrent que*

$$L_{Df}\phi = \int_\Omega Df \cdot \phi = \int_\Omega f \mathrm{div}\phi = L_f \mathrm{div}\phi.$$

Ceci suggère

Définition 4. *La dérivée d'une distribution L est la distribution*

$$DL : \mathcal{D}(\Omega)^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto L\mathrm{div}\phi,$$

De l'exemple précédent, on note que $L_{DF} = DL_f$.

Définition 5. *Soit $f \in L^1$. La dérivée au sens des distributions de f est DL_f.*

0.2. **Espaces de Sobolev.**

Définition 6. *Une fonction $f \in L^1$ est de Sobolev si D_f est représentable par $g \in (L^1)^n$. C'est-à-dire s'il existe $g \in (L^1)^n$ tel que*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)^n \qquad DL_f = \int_\Omega f\mathrm{div}\phi = \int_\Omega g \cdot \phi.$$

L'espace des fonctions de Sobolev est dénoté par $W^{1,1}(\Omega)$.

Date: 2 novembre 2005.

0.3. Fonctions à variation bornée.

Définition 7. *Une fonction $f \in L^1$ est à variation bornée si D_f est représentable par une mesure de Radon finie $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)^n$. C'est-à-dire s'il existe $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)^n$ tel que*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)^n \qquad DL_f = \int_\Omega f \operatorname{div} \phi = \int_\Omega \phi d\mu.$$

L'espace des fonctions à variation bornée est dénoté par $BV(\Omega)$.

0.4. Conclusion.

Les notions de différentiabilité se classent comme suit :

$$L^1(\Omega) \quad \subseteq \quad W^{1,1}(\Omega) \quad \subseteq \quad BV(\Omega) \quad \subseteq \quad C^1(\Omega)$$

Dépt. de mathématiques et statistique, Université d'Ottawa
E-mail address: rousseauoli@gmail.com