

MAT 3741 : Algèbre linéaire appliquée, Hiver 2017
Devoir #5

À remettre le mardi le 4 avril avant midi.

Vous pouvez utiliser Matlab pour simplifier ou pour vérifier vos calculs. En tout cas, justifiez vos réponses.

1. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -15 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Trouver une décomposition de Jordan de A (elle sera joli, donc ne me pas donner les nombres décimales).
- (b) Soit t un paramètre scalaire ; alors si $A = PJP^{-1}$ nous avons $tA = P(tJ)P^{-1}$. Déterminer la matrice $\exp(tA)$ (donnée comme la somme d'une série) avec l'aide de la décomposition de Jordan ; une réponse qui est exprimé comme de produit de trois matrices sera acceptable. Vous pouvez utiliser le fait que $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y)$ quand $XY = YX$, pour n'importe quels objets algébriques X, Y .
- (c) (bonus) Démontrer que $(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$ ssi toute valeur propre λ de B satisfait à $|\lambda| < 1$. (Si vous n'avez pas suivi un cours de nombres complexes, vous pouvez supposer que les valeurs propres sont réelles.)

2. Soit B la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2+i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 1+4i & 1+2i & 1-i \end{bmatrix}.$$

Trouver une décomposition de Schur de B , suivant l'exercice en classe. Est-ce que c'est possible de trouver une forme de Schur diagonale de B ?

- 3. Soit $v = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ et $w = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$. Calculer les matrices de Householder H_v et H_w , qui représentent des réflexions dans les plans orthogonales à v et à w , et puis démontrer que leur produit $H_v H_w$ est une matrice de rotation autour l'axe des z . Quel est l'angle de rotation ?
- 4. Soit C la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que C est une matrice hermitienne définie positive, et puis déterminer sa décomposition de Cholesky en utilisant la procédure du cours.

5. Soit D la matrice

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ 4 & -8 & -8 \end{bmatrix}.$$

Trouver la décomposition en valeurs singulières de D avec la procédure du cours. Quelles sont ses valeurs singulières ?

- 6. (bonus) Démontrer que si A et B sont deux matrices $n \times n$ diagonalisables telles que $AB = BA$ alors il existe une base de $\mathbb{C}^n$ telle que chaque vecteur de la base est un vecteur propre de A ainsi qu'un vecteur propre de B . Donner un exemple qui démontre que les valeurs propres n'ont pas besoin d'être égales.
- 7. (bonus) Avec l'aide du programme proposée, convertir une image en matrice, et prenez sa décomposition en valeurs singulières. Puis, créer un graphique qui compare l'erreur de l'approximation (avec votre choix de norme) avec l'image (l'axe des y) avec le nombre de valeurs singulières utilisées (l'axe des x).