MAT 3741 : Algèbre linéaire appliquée, Hiver 2017
Devoir #4

À remettre le mardi le 21 mars avant midi.

1. *On a démontré le théorème de Cayley-Hamilton au cours, par une méthode générale. Ici, je vous demande de dévélopper une preuve plus facile pour le cas spéciale que A soit diagonalisable.*
   Soit A une matrice $n \times n$ diagonalisable. Soit f le polynôme caractéristique de A, tel que
   $$f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$$
   où $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ sont les valeurs propres distinctes de A et m_i est la multiplicité algébrique (donc, aussi, multiplicité géométrique, par notre hypothèse) de λ_i.
   (a) Démontrer que $(A-\lambda I)^m(A-\mu I)^\ell = (A-\mu I)^\ell(A-\lambda I)^m$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\cancel{m, \ell \in \mathbb{N}}$ $m = \ell = 2$. Pour points bonis : Démontrer le cas $m, \ell \in \mathbb{N}$.
   (b) Démontrer ensuite que
   $$(A-\lambda_1 I)^{m_1}(A-\lambda_2 I)^{m_2}\cdots(A-\lambda_k I)^{m_k} = 0,$$
   prenant comme acquis que tous ces facteurs commutent. Utilisez les résultats sur la similitude au besoin.
   Indice : Une option est d'utiliser la similitude de A avec une matrice diagonale. Une autre option est de démontrer que ce produit est une matrice B telle que $Bx = 0$ pour tout x dans une base de $\mathbb{R}^n$, or $B = 0$.
2. Soient $f, g \in \mathbb{R}[x]$ deux polynômes à coéfficients réels. Alors f et g sont relativement premiers ssi il existe $a, b \in \mathbb{R}[x]$ tels que
   $$a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1.$$
   (a) Si $f(x) = x+5$ et $g(x) = x^3 - 1$, trouver a et b pour lesquels $af + bg = 1$. Indice : Faites la division de polynômes. (Plus généralement, on fera l'algorithme d'Euclide étendu. [1].)
   (b) Soit A une matrice, $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$, et $m, \ell \in \mathbb{N}$. Alors $f(x) = (x-\lambda)^m$ et $g(x) = (x-\mu)^\ell$ sont relativement premiers. Sans calculer a et b (qui satisfont à 2(a)), mais sachant qu'ils existent, démontrer que
   $$\text{Noy}(f(A)) \cap \text{Noy}(g(A)) = \{0\}.$$
   (c) Pour points bonis : Avec f et g comme en 2(b), et en utilisant tout résultat dont vous avez besoin, démontrer que $\text{Noy}(f(A)g(A)) = \text{Noy}(f(A)) \oplus \text{Noy}(g(A))$. Indice : Penser à leur dimension.
3. Soit A une matrice 5×5 ayant polynôme caractéristique $f(x) = -(x-4)^2(x+4)^3$. Donner une liste de formes de Jordans possibles de A, telle qu'aucune forme sur votre liste n'est semblable à une autre.
4. Soit A la matrice
   $$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -8 & -8 & -4 \\ -1 & 0 & 8 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$
   Son polynôme caractéristique est $(x-2)^5$. Trouver une base de $\mathbb{R}^5$ qui consiste de chaînes de la forme $\{(A-2I)^s u, (A-2I)^{s-1}u, \cdots, (A-2I)u, (A-2I)u\}$ où le premier vecteur est un vecteur propre de A associée à la valeur propre 2 et $s \geq 0$. (Donc comprenez que si $s = 0$ cette chaîne ne consiste que d'un vecteur propre.) Puis, donner une décomposition de Jordan de A. Attendez-vous

1. extended Euclidean algorithm

à un cas intéressant, au cours duquel vous allez bien explorer ce sujet. [2] Puis, déduire le polynôme minimal de A.

5. La forme de Jordan est instable par rapport aux perturbations. Explorons cet idée en MATLAB.
   (a) Choisir une valeur $\lambda \in \mathbb{N}$ et créer la matrice
   $$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$
   Alors toute matrice semblable à J aura J comme sa forme de Jordan.
   (b) Soit U une matrice aléatoire de taille 3×3, et soit $A = UJU^{-1}$. Demander à MATLAB de calculer sa forme de Jordan K avec matrice de vecteurs propres généralisés P. (Si par chance $K = J$, veuillez répetez les étapes précédentes jusqu'à ce que vous obteniez $K \neq J$.)
   (c) Selon vous, est-ce que cette erreure s'est glissée dans : le polynôme caractéristique ? Leurs racines ? La méthode que MATLAB utilise pour déterminer les valeurs propres ? Le calcul de MATLAB des vecteurs propres ? Le calcul de MATLAB des vecteurs propres généralisés ? Le conditionnement de A, ou de $A - \lambda I$? Supporter votre réponse avec des calculs en MATLAB. Plusieurs réponses valables sont possibles, selon le cas.
   (d) Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier assez grand. Calculer les trois matrices : A^k, UJ^kU^{-1} et PK^kP^{-1}. Déterminer la taille de l'erreure entre ces trois calculs.

   Je vous invite à explorer ce genre d'exemple avec des matrices aléatoires entières aussi, où qu'on dirait que les erreures d'arrondissement n'entreraient pas. Pour créer une matrice U entière dont l'inverse est aussi entière, créer des matrices $C, D \in M_3(\mathbb{Z})$ qui sont triangulaire inférieure (respectivement, supérieure) avec des 1 sur le diagonale, et poser $U = CD$.

```
Voir la page web de ressources pour quelques indications et bouts de code;
quelques commandes utiles seront:
>> inv(U)
>> [V,D]=eig(A)
>> format long e     ---- pour mieux voir les erreures d'arrondissement

Si vous avez le ``Symbolic Math Toolbox'' alors vous auriez accès à
>> charpoly(A,x)
>> minpoly(A,x)
>> [P,J]=jordan(A)

Autrement, vous pouvez résoudre ce qu'il faut directement, avec par exemple
>> (A-5*eye(3))^2          ---- qui calcule (A-5I)^2 avec A 3x3
>> rref([A-5*eye(3) v])     ---- pour le système (A-5I)(x) = v

Afin de résoudre le système (A-5I)x = au+bv+cw, pour des inconnues a,b,c
 (dans l'absence du Symbolic Math Toolbox) on fait:
>> C = rref([A-5*eye(3) eye(3) u v w])  --- réduire [A-5I  I  u v w]
>> [U V W]=C(:,7:9)    ---  qui sort les dernières trois colonnes de C
>> R= C(:,1:3)           --- qui sort la matrice RREF de A-5I
```

L'effet d'insérer le $eye(3)$ est de forcer à MATLAB de ne pas mettre un pivot dans une colonne avec une de nos vecteurs u, v, w — tous les pivots apparaîteront dans les premières 6 colonnes. Et donc si vous voulez savoir la réponse à $(A - 5I)x = au + bv + cw$, c'est comme si on aurait fait à la main, et la réponse était
$$[R \mid aU + bV + cW]$$

2. Vous pouvez certainement vous servir de MATLAB pour effectuer ou vérifier vos calculs, et en particulier vous n'avez pas besoin de soumettre des réductions gaussiennes de matrices écrites à la main. Par contre, veuillez noter que l'objectif de cet exercice est de pratiquer le processus logique de trouver la forme de Jordan d'une matrice, que vous allez devoir faire à la main sur l'examen, et donc je n'accorderai aucun point pour une réponse qui évite ce processus.