MAT 3741 : Algèbre linéaire appliquée, Hiver 2017
Devoir #2

À remettre le vendredi le 10 février avant 10h.

Partie A : à l'écrit. Ici, je vous demande de pratiquer les méthodes en classe à la main, puisque sur les examens je n'offrira pas accès à MATLAB. Mais je suggère que vous vérifiez vos réponses par l'ordi, afin de vous assurer que vous faites la bonne démarche !

1. Soit A la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
Faites la réduction Gaussienne à la matrice A, sans intervertir de lignes, puis utiliser ces étapes afin d'écrire les matrices L et U telles que $A = LU$.

   Indice : Veuillez noter que si vous ne suivez pas l'algorithme Gaussienne précise, vous ne seriez pas en mesure de déterminer les éléments de votre matrice L en lisant vos opérations de gauche à droite.

2. Soit B la matrice
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$
Faites une réduction Gaussienne (cette fois, avec des permutations de lignes au besoin) et utiliser votre résultat pour obtenir une décomposition P-L-U (où maintenant, le U n'est pas une matrice carrée, mais est quand même triangulaire supérieure avec des 1 comme pivots).

   Indice : on a fait de tels exemples en classe.

3. Soit $L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}$ une matrice $n \times n$, écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de notre base standard.

   Indice : Rappel que e_{ij} est la matrice ayant un 1 à la position (i, j) et 0 à tout autre position.

   (a) Donner les critères sur les coéfficients a_{ij} pour que L soit une matrice triangulaire inférieure.

   (b) Étant donnée que si $L' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} e_{ij}$ est une autre matrice $n \times n$, alors
$$LL' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{kj} e_{ij}, \tag{1}$$
   démontrer, à l'aide de votre critére en (a), que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est encore triangulaire inférieure.

4. Clarification : Étant donnée que
   — le produit de matrices triangulaire supérieures ayant des 1 sur le diagonale est encore triangulaire supérieure ayant des 1 sur le diagonale
   — le résultat de la question précédente ;
   — l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure ayant des 1 sur le diagonale est encore triangulaire supérieure ayant des 1 sur le diagonale ; et
   — l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est encore triangulaire inférieure,

   démontrer que si A admet une décomposition L-U, alors les matrices L et U sont uniques. (C'est-à-dire : Si LU et $L'U'$ étaient deux candidats pour la décomposition L-U de A, on aura $L = L'$ et $U = U'$.)

   Indice : Faites un argument par contradiction.

5. Trouver toute inverse à gauche et toute inverse à droite de chacune des matrices suivantes, avec la méthode de réduction Gaussienne ; si l'une ou l'autre de ces inverses n'existe pas, expliquer pourquoi en faisant référence au rang de la matrice :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

6. Expliquer le phenomène en partie B, question 4 ci-dessous, à l'aide de la multiplication par blocs et la théorie des matrices carrées inversibles. C-à-d : Si C est une inverse à droite de A ayant les dernières $m-n$ lignes nulles, démontrer qu'il existe une sous-matrice de A qui est inverse à gauche de la matrice formée des lignes non-nulles de C, et qu'en plus ces sous-matrices sont des vraies inverses l'une de l'autre.

Partie B : à l'ordi

1. Donner une matrice A de taille 4×4 et deux décompositions P-L-U de A distinctes. Attention : la commande

```
[L,U,P]=lu(A,'matrix')
```

   est utile mais MATLAB choisira toujours de faire une permutation pour s'arranger que L soit stable !

   Indice : Vous pouvez soit utiliser le nouveau programme (dev2q1.m), soit procéder théoriquement.

2. Avec l'aide des fichier dev2q2.m et dev2q2a.m, determiner le nombre (ou le pourcentage) de matrices de permutation P pour lesquelles PA admet une décomposition L-U, où, en premier lieu, A est une matrice aléatoire de taille 4×4. Utilisez le critére vu en classe – des mineures non-nulles. Pour cette question, puisqu'il y a tant de cas à considérer, il faudra écrire un petit programme. Les fichiers contiennent une ébauche pour vous aider.

   Indice : Voir notre page web Ressources pour plusieurs indices comment compléter ce programme, y compris des commandes MATLAB utiles ! Quand vous auriez faites cette question, vous pouvez utiliser votre programme afin de vous aider avec les parties 1 et 3.

3. Construire une matrice inversible 4×4 A pour laquelle il n'existe qu'une seule permutation (nontriviale) qui donne une décomposition P-L-U.

   Indice : En premier lieu, tenter de produire une matrice B telle que $B = LU$ admet une décomposition L-U mais que aucune permutation nontrivialle de B en admet une.

4. Question simplifiée ; si vous avez déjà complété cette question, ne tenez pas compte de ces modifications !. MATLAB a plusieurs fonctions reliés aux inverses et la solution des systèmes, mais quand il y a une infinité de solutions, elle retourne un choix. Voici un expériment (voir dev2q3.m pour quelques commandes utiles) :
   - Trouver une matrice A de taille 3×5 telle que rref(A) retourne une matrice ayant pivots dans les premiers trois colonnes.
   - Trouver toute inverse à droite C, avec la procédure qu'on a dévéloppé en classe, c-à-d, extraire de rref([A eye(3)]) la solution générale. Vous n'avez qu'à produire une inverse particulière C_0 et une matrice N dont les colonnes forment une base du noyau de A.
   - Identifier une inverse à droite de A dont les deux dernières lignes sont nulles.
   - Choisir B, une sous-matrice de C[1] de taille 3×3 telle que BA contient une sous-matrice I_3. (C'est le phénomène intéressant de cette question.)
   - Trouver une sous-matrice inversible de A de taille 3×3.

   Que pouvez-vous faire de semblable avec une matrice de taille 5×3 ?

1. a-à-d une matrice formée de 3 lignes de C