MAT 3741 : Algèbre linéaire appliquée, Hiver 2017
Devoir #1
(Version du 12 janvier ; voir les ajouts à Partie A et à Partie B)

À remettre avant 9h, mardi le 24 janvier.

Partie A : à l'écrit

Posons $V = \mathbb{R}^n$ et pour chaque $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in V$, on pose $\|v\|_\infty = \max\{|v_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$.

1. Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ définie une norme sur V.

2. Démontrer que pour tout v, on a $\|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$.

3. Tracer l'ensemble $D = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|_\infty \leq 1\}$.

4. Démontrer que la norme opérateur subordonnée sur $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ à la propriété que $\|A\|_{\infty,\infty}$ est égale au maximum des 1-normes des lignes de A.

5. Soient $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ des normes quelconques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement. Démontrer que si $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ alors
$$\|A + B\|_{p,q} \leq \|A\|_{p,q} + \|B\|_{p,q}.$$

6. Soient $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ et $\|\cdot\|_s$ des normes quelconques sur $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^k$ respectivement. Démontrer que si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{Mat}_{k\times m}(\mathbb{R})$ alors
$$\|AB\|_{p,q} \leq \|A\|_{p,s}\|B\|_{s,q}.$$

Partie B : avec Matlab ou Sage

1. Créer une matrice inversible 4×4 avec les chiffres de votre numéro d'étudiant. (exemple : `A=[1 2 3 4 ; 5 6 7 1 ; 2 3 4 5 ; 6 7 1 2]` en MATLAB ; mais il faudra peut-être modifier votre matrice afin d'avoir une matrice inversible.)
   (i) Démontrer que A est inversible (i.e. trouver la bonne commande dans votre logiciel).
   (ii) Déterminer le conditionnement de A par rapport à la 1-norme (directement, et/ou avec une commande MATLAB).
   (iii) Choisir b, b' afin de créer deux systèmes linéaires tels que (a) $Ax = b$ soit bien conditionné (autant que possible) et (b) $Ax = b'$ soit maximalement mal conditionné, c-à-d, que l'amplification de l'erreure relative soit égale au maximum possible pour ce choix de A.
   (iv) Trouver une matrice singulière la plus proche à A par rapport à la 1-norme.
2. Un des atouts d'un tel logiciel est la capacité de produire des exemples de matrices ou systèmes aléatoires, qui nous permettent de faire des expériences aisément.

   Soyez créative : choisir 3 façons différentes pour créer une matrice carrée "aléatoire". Expliquer la définition d'aléatoire que vous avez utilisé dans chaque cas et donner la matrice. Vérifier qu'elle est inversible (ou expliquer comment que c'est possible qu'elle ne l'est pas).
3. Le fichier devoir1qB3.m contient un petit programme (script) qui trouve la moyenne des conditionnements de 25 matrices, de chacune des tailles 3×3, 8×8, $13 \times 13, \cdots$, 28×28. Modifier le programme afin de trouver la moyenne des conditionnements de 100 matrices, de chaque taille paire de 2×2 à 20×20, en utilisant une de vos autres méthodes de la question précédente de créer une matrice aléatoire. Discutez vos observations brièvement.

Directions par rapport à la soumission du la partie B :

Il faut soumettre cette partie électroniquement dans un ficher `votrenomdevoir1.txt` (ou .mlx ou .m, si vous utilisez MATLAB) sur Blackboard.

Par exemple, en MATLAB, vous pouvez utiliser la commande `diary monnomdevoir1.txt` et `diary off` ; vous pouvez insérer vos commentaires explicatives avec `% mes explications`, ou les ajouter (avec le signe %, svp) manuellement au fichier .txt. Indiquer clairement où se trouve votre solution à chaque question en insérant genre `%%%%% Question 2 %%%%%` dans votre fichier.

Il faut que vous justifiez que vos réponses sont correctes, soit en faisant appel à la théorie vue en classe, soit à l'aide d'un calcul ou d'une commande du logiciel.