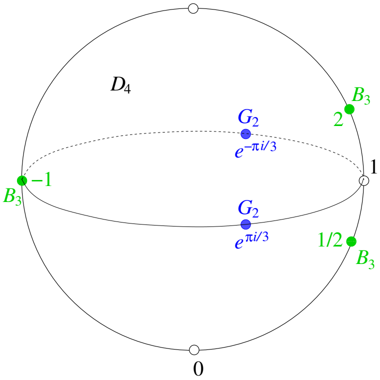
Représentations des algèbres de fonctions équivariantes

Alistair Savage
L'Université d'Ottawa



Projections : www.mathstat.uottawa.ca/$\sim$asavag2

Résumé

En collaboration :

- Neher-Senesi (arXiv :0906.5189, à paraître à TAMS)
- Neher (arXiv :1103.4367)

Plan :

1. Algèbres de fonctions équivariantes
2. Exemples
3. Représentations d'évaluation
4. Classification des irréductibles de dimension finie
5. Extensions
6. Décompositions en blocs

Terminologie :

petite = irréductible de dimension finie

Algèbres de fonctions (non tordues)

Notation

k - corps algébriquement clos de caractéristique zéro

X - schéma (ou variété algébrique) sur k

$A = A_X = \mathcal{O}_X(X)$ - algèbre de coordonnées de X

$\mathfrak{g}$ - algèbre de Lie de dimension finie sur k

Définition (Algèbre de fonctions non tordue)

$M(X, \mathfrak{g})$ = algèbre de Lie des fonctions régulières de X dans $\mathfrak{g}$

Multiplication point par point :

$$[\alpha, \beta]_{M(X,\mathfrak{g})}(x) = [\alpha(x), \beta(x)]_{\mathfrak{g}} \text{ for } \alpha, \beta \in M(X, \mathfrak{g})$$

Note : $M(X, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes A_X$

Exemples

Espaces discrets

Si X est un espace discret, alors

$$M(X, \mathfrak{g}) \cong \prod_{x \in X} \mathfrak{g}, \quad \alpha \mapsto (\alpha(x))_{x \in X}, \quad \alpha \in M(X, \mathfrak{g}).$$

En particulier, si $X = \{x\}$ est un point, alors

$$M(X, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}, \quad \alpha \mapsto (\alpha(x)), \quad \alpha \in M(X, \mathfrak{g}).$$

Les isomorphismes sont donnés par évaluation.

Algèbres des courants

$$X = k^n \implies A_X = k[t_1, \dots, t_n]$$

Donc, $M(X, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes k[t_1, \dots, t_n]$ est une algèbre des courants.

Algèbres de fonctions équivariantes (AFEs)

- Γ - groupe fini
- Supposons que Γ agit sur X et $\mathfrak{g}$ par automorphismes

Définition (algèbres de fonctions équivariantes)

L'algèbre de fonctions équivariantes est l'algèbre des fonctions Γ-équivariantes de X dans $\mathfrak{g}$:

$$M(X,\mathfrak{g})^\Gamma = \{\alpha \in M(X,\mathfrak{g}) : \alpha(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot \alpha(x) \ \forall\, x \in X,\ \gamma \in \Gamma\}$$

Note : Si X est un schéma quelconque, alors $M(X,\mathfrak{g})^\Gamma \cong M(X_{\mathrm{aff}},\mathfrak{g})^\Gamma$ où $X_{\mathrm{aff}} = \operatorname{Spec} A_X$ est le schéma affine avec le même algèbre de coordonnées que X. Donc on peut supposer que X est affine.

Exemple : algèbres de lacets multiples

$$\Gamma = \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}, \quad X = (k^\times)^n$$

- Pour $i = 1, \ldots, n$, soit ξ_i une m_i-ième racine primitive de l'unité.
- Définissons une action de Γ sur X par

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (\xi_1^{a_1} z_1, \ldots, \xi_n^{a_n} z_n)$$

- Définissons une action de Γ sur $\mathfrak{g}$ en donnant des automorphismes commutants σ_i, $i = 1, \ldots, n$, tels que $\sigma_i^{m_i} = 1$.

Alors $M(X, \mathfrak{g})^\Gamma$ et l'algèbre de lacets multiples (tordue).

Si $n = 1$, alors c'est l'algèbre de lacets (tordue).

Algèbres de Lie affines

Les algèbres de Lie affines peuvent être construites comme des extensions centrales des algèbres de lacets plus une différentielle :

$$\widehat{\mathfrak{g}} = M(X, \mathfrak{g})^\Gamma \oplus kc \oplus kd \qquad (n = 1)$$

Exemple : algèbres d'Onsager généralisées

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \{1, \sigma\}, \quad X = k^\times, \quad \mathfrak{g} = \text{algèbre de Lie simple}$$

- Γ agit sur X par $\sigma \cdot x = x^{-1}$
- Γ agit sur $\mathfrak{g}$ par une involution quelconque

Dans le cas où Γ agit sur $\mathfrak{g}$ par l'involution de Chevalley, on écrit

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g}) = M(X, \mathfrak{g})^\Gamma$$

Remarques

- Si $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\mathfrak{sl}_2)$ est isomorphe à l'algèbre d'Onsager (Roan 1991)
  - Élément important dans la solution d'Onsager d'origine du modèle d'Ising en dimension deux
- Pour $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\mathfrak{sl}_n)$ a été étudié par Uglov et Ivanov (1996)

Évaluation

Si $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$, on a la fonction d'évaluation

$$\mathrm{ev}_{\mathbf{x}} : M(X, \mathfrak{g})^\Gamma \to \mathfrak{g}^{\oplus n}, \quad \alpha \mapsto (\alpha(x_i))_i$$

Important : Cette fonction n'est pas surjective en général !

Pour $x \in X$, définissons

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot x = x\} \\ \mathfrak{g}^x &= \{u \in \mathfrak{g} : \Gamma_x \cdot u = u\} \end{aligned}$$

Lemme

Pour X affine, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$, $x_i \notin \Gamma \cdot x_j$ pour $i \neq j$,

$$\operatorname{im} \mathrm{ev}_{\mathbf{x}} = \oplus_i \mathfrak{g}^{x_i}.$$

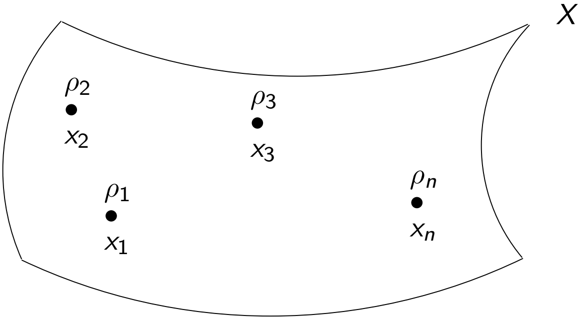
Représentations d'évaluation

Étant donné

- $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$, et
- représentations $\rho_i : \mathfrak{g}^{x_i} \to \operatorname{End}_k V_i$, $i = 1, \ldots, n$,

on définit la représentation d'évaluation comme étant la composition

$$M(X, \mathfrak{g})^\Gamma \xrightarrow{\mathrm{ev}_{\mathbf{x}}} \oplus_i \mathfrak{g}^{x_i} \xrightarrow{\otimes_i \rho_i} \operatorname{End}_k(\otimes_i V_i).$$



Remarques importantes

Cette notion de représentation d'évaluation est différente de la définition classique.

- Quelques auteurs utilisent le terme représentation d'évaluation seulement dans le cas où l'évaluation est en un seul point et ils appellent le cas général un produit tensoriel de représentations d'évaluation.
- À un point $x \in X$, on associe une représentation de $\mathfrak{g}^x$ au lieu de $\mathfrak{g}$. Si Γ agit sans points fixes, les deux concepts sont les mêmes.
- Rappelons que (quand $\mathfrak{g}^x \subsetneq \mathfrak{g}$) toutes les reps de $\mathfrak{g}^x$ ne s'étendent pas toujours à reps de $\mathfrak{g}$ – donc la nouvelle définition est plus générale.

On verra que la définition plus générale donne une classification des représentations plus uniforme.

Représentations d'évaluation

$$\mathcal{R}_x = \{\text{classes d'isomorphismes des reps petites de } \mathfrak{g}^x\}$$

$$\mathcal{R}_X = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{R}_x$$

On a une action de Γ sur $\mathcal{R}_X$: si $[\rho] \in \mathcal{R}_x$, alors

$$\gamma \cdot [\rho] = [\rho \circ \gamma^{-1}] \in \mathcal{R}_{\gamma \cdot x}, \quad \gamma \in \Gamma.$$

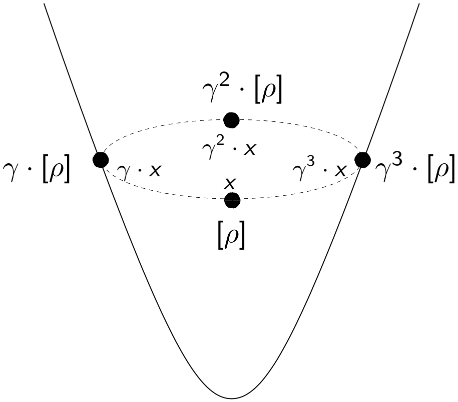
Définition ($\mathcal{E}$)

$\mathcal{E}$ est l'ensemble de tout $\psi : X \to \mathcal{R}_X$ telle que

1. ψ est Γ-équivariante,
2. $\psi(x) \in \mathcal{R}_x$ pour tout $x \in X$, et
3. $\operatorname{supp} \psi = \{x \in X : \psi(x) \neq 0\}$ est fini.

Représentations d'évaluation

$\psi \in \mathcal{E}$ assigne un nombre fini de (classes d'isomorphismes de) reps de $\mathfrak{g}^x$ à des points $x \in X$ d'une manière équivariante.



Représentations d'évaluation

Pour chaque $\psi \in \mathcal{E}$, définissons

$$\mathrm{ev}_\psi = \mathrm{ev}_{\mathbf{x}}(\psi(x_i))_{i=1}^n = \mathrm{ev}_{x_1}\psi(x_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{ev}_{x_n}\psi(x_n)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est un n-tuple de points de X contenant un point de chaque Γ-orbite dans $\operatorname{supp}\psi$ (la classe d'isomorphismes ne dépend pas de ce choix).

Lemme

Pour $\psi \in \mathcal{E}$, ev_ψ est la classe d'isomorphismes d'une représentation petite de $M(X, \mathfrak{g})^\Gamma$.

Proposition

La fonction

$$\mathcal{E} \longrightarrow \{\textit{classes d'isom des rep petites de } M(X, \mathfrak{g})^\Gamma\}, \quad \psi \mapsto \mathrm{ev}_\psi$$

est injective. En d'autres termes, $\mathcal{E}$ paramétrise les représentations petites.

Représentations de dimension un

Rappelons : Chaque rep de dimension un d'une algèbre de Lie L correspond à une fonction linéaire $\lambda : L \to k$ telle que $\lambda([L, L]) = 0$.

On identifie ces représentations de dimension un avec les éléments

$$\lambda \in (L/[L, L])^*.$$

Deux représentations de dimension un sont isomorphes si et seulement si elles sont égales comme éléments de $(L/[L, L])^*$.

Théorème de classification

Théorème (Neher-S.-Senesi 2009)

Supposons que Γ *est un groupe fini qui agit sur un schéma affine (ou variété)* X *et une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de dimension finie. Soit* $\mathfrak{M} = M(X, \mathfrak{g})^\Gamma$.

Alors la fonction

$$(\lambda, \psi) \mapsto \lambda \otimes \mathrm{ev}_\psi, \quad \lambda \in (\mathfrak{M}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}])^*, \quad \psi \in \mathcal{E},$$

est une surjection

$$(\mathfrak{M}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}])^* \times \mathcal{E} \twoheadrightarrow \{\textit{classes d'isomorphismes des reps petites de } \mathfrak{M}\}.$$

En particulier, toutes les représentations sont de la forme

$$(\textit{rep de dim } 1) \otimes (\textit{rep d'évaluation}).$$

Classification – Remarques

$$(\lambda, \psi) \mapsto \lambda \otimes \mathrm{ev}_\psi, \quad \lambda \in (\mathfrak{M}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}])^*, \quad \psi \in \mathcal{E}$$

1. Cette fonction n'est pas injective en général puisqu'il peut exister des représentations d'évaluation de dimension 1. Ça se passe quand $\mathfrak{g}^x$ n'est pas parfaite (e.g. réductive mais pas semi-simple).

   Exemple : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, $X = k = \mathbb{C}$
   - Γ agit sur $\mathfrak{g}$ par l'involution de Chevalley.
   - Γ agit sur X par multiplication par -1.
   - Alors $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}^\Gamma$ est de dimension 1 et donc elle a des représentations non-triviales de dimension 1.

2. Cependant, on peut préciser exactement les cas où $\lambda \otimes \mathrm{ev}_\psi \cong \lambda' \otimes \mathrm{ev}_{\psi'}$.

3. La restriction de la fonction à l'un ou l'autre facteur est injective.

Classification

$$(\lambda, \psi) \mapsto \lambda \otimes \mathsf{ev}_\psi, \quad \lambda \in (\mathfrak{M}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}])^*, \quad \psi \in \mathcal{E}$$

Corollaire

1. *Si $\mathfrak{M}$ est parfaite (c.-à.-d. $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$), alors on a une bijection*

   $$\mathcal{E} \leftrightarrow \{\textit{classes d'isom des reps petites}\}, \quad \psi \mapsto \mathsf{ev}_\psi\,.$$

   Toutes les rep petites sont des représentations d'évaluation.

2. *Si $[\mathfrak{g}^\Gamma, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{M}$ est parfaite et on a la bijection ci-dessus.*

3. *Si Γ agit sur $\mathfrak{g}$ par automorphismes de diagramme, alors $[\mathfrak{g}^\Gamma, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ et on a la bijection ci-dessus.*

Note : Il n'est pas nécessaire que $\mathfrak{M}$ soit parfaite pour que toutes les reps petites soient des reps d'évaluation (comme on le verra).

Application : algèbres de fonctions non tordues

Si Γ est trivial, alors

$$M(X,\mathfrak{g})^\Gamma = M(X,\mathfrak{g}), \quad \mathfrak{g}^\Gamma = \mathfrak{g}.$$

Donc, si $\mathfrak{g}$ est parfaite,

$$[\mathfrak{g}^\Gamma, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g},$$

alors toutes les reps petites sont des reps d'évaluation.

Application : algèbres de lacets multiples

Corollaire

Si $\mathfrak{M}$ est une algèbre de lacets multiples (tordue), alors $\mathfrak{M}$ est parfaite et on a une bijection

$$\mathcal{E} \leftrightarrow \{\textit{classes d'isom des reps petites}\}, \quad \psi \mapsto \mathrm{ev}_\psi .$$

En particulier, toutes les reps petites sont des reps d'évaluation.

Remarques

1. On retrouve les résultats de Chari-Pressley (lacets) et Batra, Lau (lacets multiples), mais avec une description différente.
2. La description ci-dessus (en termes de $\mathcal{E}$) donne une description simple et uniforme des conditions un peu techniques qui apparaissent dans les classifications précédentes.
3. L'action de Γ sur X est sans points fixes est donc $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}$ pour tout $x \in X$. Donc la notion plus générale d'une représentation d'évaluation n'entre pas en considération.

Application : algèbres d'Onsager généralisées

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \{1, \sigma\}, \quad X = k^\times, \quad \mathfrak{g} = \text{algèbre de Lie simple}$$

- Γ agit sur X par $\sigma \cdot x = x^{-1}$
- Γ agit sur $\mathfrak{g}$ par une involution quelconque

Corollaire

Avec Γ, X, $\mathfrak{g}$ comme ci-dessus, il existe une bijection

$$\mathcal{E} \leftrightarrow \{\textit{classe d'isom des reps petites}\}, \quad \psi \mapsto \mathrm{ev}_\psi \,.$$

En particulier, toutes les reps petites sont des reps d'évaluation.

Remarques – algèbre d'Onsager généralisée

- Il y a deux classes de points de X :
  - $x \in \{\pm 1\} \implies \Gamma_x = \Gamma = \mathbb{Z}_2$, $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^\Gamma$
  - $x \notin \{\pm 1\} \implies \Gamma_x = \{1\}$, $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}^\Gamma$ peut être semi-simple ou avoir un centre de dimension 1

Si $\mathfrak{g}^\Gamma$ a un centre de dimension un :

- l'algèbre d'Onsager généralisée n'est pas parfaite
- on peut avoir reps (nontrivial) 1-dim de $\mathfrak{g}^\Gamma$ aux points ± 1
- avec la définition plus générale de rep d'évaluation, toutes les reps petites sont des reps d'évaluation
- avec la définition classique de rep d'évaluation, il existe des reps qui ne sont pas des reps d'évaluation

Conclusion : La définition plus générale d'une représentation d'évaluation permet une classification plus uniforme.

Cas spécial : algèbre d'Onsager

- Si $k = \mathbb{C}$ et Γ agit sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ par l'involution d'Chevalley, alors

$$\mathcal{O}(\mathfrak{sl}_2) \stackrel{\text{déf}}{=} M(X, \mathfrak{sl}_2)^\Gamma$$

  est l'algèbre d'Onsager.

- $\mathfrak{g}^{\{\pm 1\}}$ est abélienne de dimension un et $\mathcal{O}(\mathfrak{sl}_2)$ n'est pas parfait.
- Les reps petites de $\mathcal{O}(\mathfrak{sl}_2)$ étaient déjà classifiées (Date-Roan 2000)
  - définition classique de rep d'évaluation était utilisée
  - il existait des rep petites qui n'etaient pas des reps d'évaluation
  - ils devaient introduire la notion du type d'une représentation

Note : Dans les autres cas, la classification est nouvelle.

Extensions

Supposons que L est une algèbre de Lie quelconque.

Définition (Extension)

Une extension *d'un L-module V_1 par un L-module V_2 est une suite exacte courte de L-modules*

$$0 \to V_2 \to U \to V_1 \to 0.$$

Deux extensions sont équivalentes *s'il existe une fonction φ telle que*

$$\begin{tikzcd} & & U \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & V_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & V_1 \arrow[r] & 0 \\ & & U' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

est commutative.

Extensions

$\mathrm{Ext}^1_L(V_1, V_2) =$ l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions.

L semi-simple

Si L est semi-simple, alors toutes les représentations de dimension finie sont complètement réductibles, donc on a

$$\mathrm{Ext}^1_L(V_1, V_2) = \{0\}.$$

Ici (et toujours) 0 est la classe d'équivalence de l'extension triviale $V_1 \oplus V_2$.

But : Décrire les extensions des reps petites des algèbres de fonctions équivariantes.

Modules d'évaluation avec support disjoint

Considérons un AFE $\mathfrak{M} = M(X, \mathfrak{g})^\Gamma$.

Supposons que $\mathfrak{g}$ est réductive.

Proposition (Neher-S.)

Soient $\psi, \psi' \in \mathcal{E}$ tels que

- $\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} \psi' = \varnothing$, *et*
- ev_ψ *et* $\mathrm{ev}_{\psi'}$ *sont non-triviaux.*

Alors

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{M}}(\mathrm{ev}_\psi, \mathrm{ev}_{\psi'}) = 0.$$

Remarque

Dans le cas ou Γ est trivial, cela a été démontré par Kodera.

Théorème (Neher-S.)

Supposons que V, V' sont des modules d'évaluation correspondant à $\psi, \psi' \in \mathcal{E}$. Soient

$$V = \bigotimes_{x \in \mathbf{x}} V_x, \quad V' = \bigotimes_{x \in \mathbf{x}} V'_x$$

pour un sous-ensemble fini $\mathbf{x} \subseteq X$ qui ne contient pas deux éléments de la même orbite, et V_x, V'_x reps d'éval au point x.

1. *Si ψ, ψ' diffèrent sur plus d'une orbite, alors $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{M}}(V, V') = 0$.*
2. *Si ψ, ψ' diffèrent sur exactement une orbite $\Gamma \cdot x_0$, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{M}}(V, V') \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{M}}(V_{x_0}, V'_{x_0}).$$

3. *Si $\psi = \psi'$ (puis $V \cong V'$), alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{M}}(k_0, k_0)^{|\mathbf{x}|-1} \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{M}}(V, V) \cong \bigoplus_{x \in \mathbf{x}} \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{M}}(V_x, V'_x).$$

Conclusion : On a réduit le calcule des extensions aux extensions au même point.

Algèbres de Lie réductives

Pour toute algèbre de Lie réductive L de dimension finie, définissons

$$L_{\mathrm{ss}} = [L, L], \quad L_{\mathrm{ab}} = Z(L) \cong L/[L, L],$$

donc $L = L_{\mathrm{ss}} \oplus L_{\mathrm{ab}}$.

Proposition (Modules pour algèbres de Lie réductives)

Tout module irréductible de dimension finie pour une algèbre de Lie réductive L est de la forme

$$V_{\mathrm{ss}} \otimes V_{\mathrm{ab}}$$

ou V_{ss} est un L_{ss}-module petit, et V_{ab} est un L_{ab}-module de dimension un.

Lemme (Bourbaki)

Comme $\mathfrak{g}$ est réductive, $\mathfrak{g}^x$ est réductive pour tout $x \in X$.

Extensions entre modules d'évaluation au même point

Soit $x \in X$ et définissons

$$\mathfrak{K} = \ker(\mathrm{ev}_x), \quad \mathfrak{Z} = \mathrm{ev}_x^{-1}(\mathfrak{g}^x_{\mathrm{ab}})$$

Théorème (Neher-S.)

Si V, V' sont des modules d'évaluation au point x, alors

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{M}}(V, V') \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^x}(\mathfrak{K}_{\mathrm{ab}}, V^* \otimes V') & \text{si } V_{\mathrm{ab}} \not\cong V'_{\mathrm{ab}}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}^x_{\mathrm{ss}}}(\mathfrak{Z}_{\mathrm{ab}}, V^* \otimes V') & \text{si } V_{\mathrm{ab}} \cong V'_{\mathrm{ab}}. \end{cases}$$

Proposition (Neher-S.)

Si V, V' sont des modules d'évaluation à x, $\mathfrak{g}$ est semi-simple, Γ est abélien, et Γ_x est trivial, alors

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{M}}(V, V') \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, V^* \otimes V') \otimes (I/I^2)^{\Gamma},$$

où $I = \{f \in A \mid f(\Gamma \cdot x) = 0\}$.

Décompositions en blocs

Pour une algèbre de Lie quelconque, soit

$$\mathcal{F} = \text{catégorie des reps de dim finie.}$$

Alors

- $\mathcal{F}$ est une catégorie abélienne tensorielle, et
- tout objet de $\mathcal{F}$ peut être décomposé uniquement comme une somme d'objets indécomposables.

$\mathcal{F}$ admet une décomposition dans une somme de sous-catégories abéliennes indécomposables

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\beta} \mathcal{F}_{\beta}.$$

Ces sous-catégories $\mathcal{F}_{\beta}$ sont les blocs de $\mathcal{F}$.

Décompositions en blocs

Définition (Lien)

Supposons que $U, V \in \mathcal{F}$ sont indécomposables. On dit que U et V sont liés s'il existe des L-modules indécomposables

$$U = U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n = V,$$

tels que

$$\mathrm{Hom}_L(U_k, U_{k+1}) \neq 0 \quad \textit{ou} \quad \mathrm{Hom}_L(U_{k+1}, U_k) \neq 0 \quad \forall\, 1 \leq k < n.$$

On dit que $U, V \in \mathcal{F}$ sont liés si chaque terme indécomposable de U est relié à chaque terme indécomposable de V.

Fait : Les classes d'équivalence des objets liés sont précisément les blocs de $\mathcal{F}$.

Décompositions en blocs

Pour $x \in X$, définissons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x &= \text{catégorie des reps d'éval avec support } \Gamma \cdot x, \\ \mathcal{B}_x &= \text{blocs de la catégorie } \mathcal{F}_x. \end{aligned}$$

Pour $\gamma \in \Gamma$, les catégories $\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{F}_{\gamma \cdot x}$ sont les mêmes.

Donc on peut définir une action de Γ sur $\mathcal{B}_X = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ en définissant

$$\gamma : \mathcal{B}_x \to \mathcal{B}_{\gamma \cdot x}, \quad \gamma \in \Gamma,$$

comme étant l'identification.

Décompositions en blocs

Définition

Soit $\mathfrak{B}_X$ l'ensemble des fonctions équivariantes avec support fini $X \to \mathcal{B}_X$ envoyant x à $\mathcal{B}_x$ pour tout $x \in X$.

Définition

Soit $\mathcal{F}_{\mathrm{eval}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}$ dont les objets sont ceux dont les constituants irréductibles sont des modules d'évaluation.

Remarque : Si toutes les représentations irréductibles de dimension finie sont des représentations d'évaluation, $\mathcal{F}_{\mathrm{eval}} = \mathcal{F}$.

Théorème (Neher-S.)

Les blocs de $\mathcal{F}_{\mathrm{eval}}$ sont paramétrisés naturellement par $\mathfrak{B}_X$.

Pour obtenir une description plus explicite de la décomposition en blocs, il faut avoir une description plus explicite de

$$\mathcal{B}_x, \quad x \in X.$$

Application : algèbres de fonctions non tordues

Si $\Gamma = \{1\}$ et $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on peut démontrer (si $\dim X \geq 1$) que

$$\mathcal{B}_x \cong P/Q \quad \forall\, x \in X,$$

où

$$\begin{aligned} P &= \text{groupe de poids de } \mathfrak{g}, \\ Q &= \text{groupe de poids radiciels } \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

On retrouve un résultat de Kodera.

Corollaire

Avec les hypothèses ci-dessus, les blocs de la catégorie des modules de dimension finie sont paramétrisés naturellement par des fonctions avec support fini

$$X \to P/Q.$$

Dans le cas d'une algèbre de lacets non tordue, on retrouve un résultat de Chari-Moura (dans un langage un peu différent).

Application : action sans point fixe (algèbres de lacets multiples)

Si Γ agit sur X sans point fixe et $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors

$$\mathcal{B}_x \cong P/Q \quad \forall\, x \in X.$$

Les algèbres de lacets multiples satisfont cette condition.

Corollaire (Neher-S.)

Avec ces hypothèses, les blocs de la catégorie des modules de dimension finie sont paramétrisés naturellement par les fonctions équivariantes avec support fini

$$X \to P/Q.$$

Dans le cas spécial d'une algèbre de lacets, on retrouve un résultat de Senesi.

Application : les algèbres d'Onsager généralisées

Pour une algèbre d'Onsager généralisée, on sait que toutes les représentations irréductibles de dimension finie sont des représentations d'évaluation.

Corollaire (Neher-S.)

Les blocs de la catégorie des modules de dimension finie d'une algèbre d'Onsager généralisée sont parametrisés naturellement par les fonctions équivariantes avec support fini

$$X \to (P/Q) \sqcup (P_0/Q_0), \ \textit{telle que}$$
$$X \setminus \{\pm 1\} \to P/Q, \ \{\pm 1\} \to P_0/Q_0,$$

où P_0, Q_0 sont les groupes des poids et poids radiciels de $\mathfrak{g}^\Gamma$.

Résumé

On a une description uniforme de quelques objets mathématiques reliés à la catégorie des représentations de dimension finie des AFEs en termes des fonctions équivariantes sur X.

Par exemple, dans le cas ou toutes les reps petites sont des reps d'évaluation, on a :

Objet	$x \mapsto ?$
Algèbre	$\mathfrak{g}$
Irreps	Irrep de $\mathfrak{g}^x$
Blocs	Bloc des reps de $\mathfrak{g}^x$

Directions pour l'avenir

Est-il possible de décrire les représentations de dimension finie (pas nécessairement irréductibles) ?

Modules de Weyl :

- cas non tordu est considéré par Chari-Fourier-Khandai (2010)
- cas où le groupe agit sans point fixe – travail en progrès avec Fourier, Khandai, et Kus
- cas général ?

Ext^n pour $n > 1$?