MAT 2762 – Automne 2009

La théorie des ensembles naïve

Professeur : Alistair Savage

Remerciements

Ces notes sont basées sur les notes “Foundations of Mathematics I : Set Theory (only a draft)” de Ali Nesin. Quelques parties sont basées aussi sur les notes de Daniel Daigle.

CHAPITRE 1

Concepts de base et exemples

1.1. Ensembles

Un *ensemble* est un collection d'objets. Les objets de cette collection sont appelés les *éléments* (ou les *membres*) de l'ensemble.

Un ensemble qui a un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ est noté $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Un ensemble qui a exactement un élément est appelé un *singleton*. Par exemple, on a l'ensemble $\{2\}$. Remarquons que l'ensemble $\{2\}$ et le nombre 2 sont deux objets différents : $2 \neq \{2\}$.

On dit que deux ensembles sont *égaux* s'ils contiennent les mêmes éléments. Par exemple :

$$\{0,1\} \neq \{0\}, \quad \{0\} \neq \{1\}.$$

Plus précisément, si A et B sont des ensembles, $A = B$ si et seulement si

$$\forall_x \ [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

La négation de cette formule est :

$$\begin{aligned}
\neg\forall_x[x \in A \Leftrightarrow x \in B] &\equiv \exists_x \ \neg[x \in A \Leftrightarrow x \in B] \\
&\equiv \exists_x \ \neg[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \\
&\equiv \exists_x[\neg(x \in A \Rightarrow x \in B) \vee \neg(x \in B \Rightarrow x \in A)] \\
&\equiv \exists_x[(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)]
\end{aligned}$$

Donc on a

(a) $A = B \ \Leftrightarrow \ \forall_x \ [x \in A \Leftrightarrow y \in B]$
(b) $A \neq B \ \Leftrightarrow \ \exists_x[(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)]$

Un ensemble peut être un élément d'un autre ensemble. Par exemple, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels et $\{\mathbb{N}\}$ est un ensemble avec un élément (l'ensemble $\mathbb{N}$). Notons que $\mathbb{N} \neq \{\mathbb{N}\}$. En fait, on va voir que tout est un ensemble !

Un ensemble est *fini* s'il a un nombre fini d'éléments. Autrement, il est *infini*.

Exemple 1.1.1.

- L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est *infini*.
- Les ensembles $\{2, 2, 5\}$, $\{2, 5\}$ et $\{5, 2\}$ sont égaux.
- Les ensembles $\{a, b\}$ et $\{a\}$ sont égaux si $a = b$. Autrement, ils ne sont pas égaux.

- $\{\{0,1\},\{2\},\{3,4,5\}\}$ est un ensemble avec trois éléments : $\{0,1\}$, $\{2\}$ et $\{3,4,5\}$. Ces éléments sont des ensembles aussi (avec 2, 1 et 3 éléments respectivement).

Le nombre d'éléments d'un ensemble X est noté par $|X|$.

Exemple 1.1.2.

- $|\mathbb{N}| = \infty$
- $|\{2,5,7\}| = 3$
- $|\{\{2,3\},\{4,5\},\{7,9\},\{2,5\}\}| = 4$

Un ensemble x est une *partie* ou un *sous-ensemble* d'un autre ensemble y si chaque élément de x est aussi un élément de y, et on écrit $x \subseteq y$. On dit quelquefois que y est un *surensemble* de x.

Précisément,

$$\forall_{x,y}(x \subseteq y \Leftrightarrow \forall_a[(a \in x) \Rightarrow (a \in y)]).$$

Exemple 1.1.3.

- $\{1,3,4\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ – mais $\{1,3,4\} \notin \{1,2,3,4\}$
- $\{1,2\}$ n'est pas une partie de $\{1,\{1,2\},\{2,4\}\}$ – mais $\{1,2\} \in \{1,\{1,2\},\{2,4\}\}$
- L'ensemble des nombres naturels est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels.

Remarquez que chaque ensemble est une partie de lui-même.

Deux ensembles x et y sont égaux si est seulement si $x \subseteq y$ et $y \subseteq x$:

$$x = y \;\Leftrightarrow\; [(x \subseteq y) \wedge y(\subseteq x)])$$

Exercice 1.1.4. Quels que soient les ensembles A, B, C, si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$, alors $A \subseteq C$.

Si $x \subseteq y$ est $x \neq y$, on écrit $x \subsetneq y$. Par exemple $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{R}$.

Remarque. Le symbole $\subset$ est un peu ambigu. Dans certains textes, cela signifie $\subseteq$ et dans d'autres (par exemple, les notes de Professeur Nesin figurant sur le page web du cours) il signifie $\subsetneq$.

Si l'ensemble x n'est pas une partie de l'ensemble y, on écrit $x \not\subseteq y$. Par exemple, $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}^+$.

Théorème 1.1.5. *Un ensemble ne contenant aucun élément est une partie de chaque ensemble.*

Preuve. Soit $\varnothing$ un ensemble sans éléments. Soit x un ensemble quelconque. Supposons que $\varnothing$ n'est pas une partie de x. Donc il y a un élément de $\varnothing$ qui n'est pas un élément de x. (On utilise ici le fait que la négation de $\forall_a[(a \in \varnothing) \Rightarrow (a \in x)]$ est $\exists_a[(a \in \varnothing) \wedge (a \notin x)]$). Mais $\varnothing$ n'a pas d'éléments. Ceci est une contradiction et donc $\varnothing \subseteq x$. □

Corollaire 1.1.6. *Il y a au plus un ensemble sans éléments.*

Preuve. Soit $\varnothing_1$ et $\varnothing_2$ deux ensembles ne contenant aucun élément. D'après le théorème ci-dessus, $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ et $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$. Par conséquent, $\varnothing_1 = \varnothing_2$. □

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *l'ensemble vide* et on le désigne par le symbole $\varnothing$. Autrement dit, $\varnothing$ est l'unique ensemble qui satisfait $\forall_x\ (x \notin \varnothing)$.

Remarque. Notez bien que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, puisque $\{\varnothing\}$ n'est pas vide – on a $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

L'ensemble des parties d'un ensemble X est noté par $\wp(X)$.

Exemple 1.1.7.

$$\wp(\{-1,2,5\}) = \{\varnothing,\ \{-1\},\ \{2\},\ \{5\},\ \{-1,2\},\ \{2,5\},\ \{-1,5\},\ \{-1,2,5\}\}$$

Exemple 1.1.8.

$$\wp(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

Théorème 1.1.9. *Si $|X| = n$ est fini, alors $|\wp(X)| = 2^n$.*

Preuve. Supposons que $|X| = n$. En formant une partie de X, on doit décider quels éléments sont dans le sous-ensemble. Autrement dit, pour chaque élément de X, on doit décider "oui" ou "non". Puisqu'il y a n éléments de X et que pour chaque élément il y a deux décisions possibles, il existe 2^n sous-ensembles possibles de X. □

Exercices 1.1.10.

(a) Soient $A = \{2,3\}$ et $B = \{A\}$. Alors A a combien d'éléments, et B a combien d'éléments ? A est-il égal à B ?

(b) Soit $X = \{0,1\}$. Quels sont les éléments de $\{\wp(A) : A \in \wp(X)\}$?

(c) Énumérer les 16 éléments de $\wp(\wp(\{0,1\}))$.

(d) Montrez que $X \subseteq Y$ si et seulement si $\wp(X) \subseteq \wp(Y)$.

(e) Montrez que pour tout ensemble X, $\{X\} \in \wp(\wp(X))$.

(f) Montrez que $\{\wp(A) : A \subseteq X\} \in \wp(\wp(\wp(X)))$.

1.2. Ensembles de nombres

On a déjà vu certains ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}+$.

On a (par exemple) :

$$\mathbb{N}^+ \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

On peut additionner et multiplier deux nombre naturels. Donc on dit que $\mathbb{N}$ est *fermé* ou *stable* sous les opérations de l'addition et de la multiplication.

EXEMPLE 1.2.1. Est-ce que les ensembles suivants sont fermés sous les opérations données (avec $\div$ on suppose qu'on ne divise pas par zéro) ?

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^+$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
$+$	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
$\times$	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
$-$	Non	Non	Oui	Oui	Oui	Oui
$\div$	Non	Non	Non	Oui	Oui	Oui

On voit que les nombres rationnels sont fermés sous les quatres opérations. Mais il y a des "trous" dans l'ensemble $\mathbb{Q}$.

LEMME 1.2.2. *Il n'existe aucun nombre rationnel q tel que $q^2 = 2$.*

Preuve. On va prouver le lemme par contradiction. Soit $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q^2 = 2$. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $q = a/b$ et tel que a et b ne sont pas tous les deux divisibles par 2 (sinon, on simplifie). Donc

$$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = q^2 = 2$$

Par conséquent, $a^2 = 2b^2$. Donc a^2 est pair. Puisque le carré d'un nombre impair est toujours impair, a est pair. Donc on peut choisir $c \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2c$. Donc $4c^2 = (2c)^2 = a^2 = 2b^2$ et $2c^2 = b^2$. Par conséquent, b et aussi pair, ce qui est une contradiction. $\square$

Ce lemme nous montre que les nombres rationnels ne sont pas fermés sous l'opération d'élever aux (rationnels) puissances (parce que $2^{1/2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

EXERCICES 1.2.3.

(a) Montrez que entre deux nombres rationnels quelconques, il existe un nombre rationnel.

(b) Montrez qu'il n'y a pas de plus petit nombre rationnel > 0.

(c) Soient $\epsilon > 0$ and $\alpha > 0$ des nombres rationnels. Montrez qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\epsilon > \alpha$.

1.3. Sous-ensembles définis par une propriété

Si P est une propriété et $P(x)$ signifie que x a la propriété P alors

$$\{x : P(x)\}$$

signifie l'ensemble dont les éléments sont précisément tous les objets qui satisfont P.

Si X est un ensemble,

$$\{x \in X : P(x)\}$$

signifie la partie de X constituée des éléments de X qui ont la propriété P. Une autre manière de dire la même chose est

$$\{x : x \in X,\ P(x)\}.$$

Par exemple,

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ est pair}\}$$

est l'ensemble des nombres naturels pairs. On note le même ensemble par

$$\{2x : x \in \mathbb{N}\}$$

et on abrège cet ensemble comme $2\mathbb{N}$. De même, $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs.

Pour $r \in \mathbb{R}$, on définit $r\mathbb{N}$, $r\mathbb{Z}$, $r\mathbb{Q}$ par

$$r\mathbb{Z} := \{rn : n \in \mathbb{Z}\} = \{s \in \mathbb{R} : s = rn \text{ pour certain } n \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{etc.}$$

Ils sont tous des parties de $\mathbb{R}$.

Remarque. Pour l'instant, on va supposer le principe suivante :

Étant donnée une condition P, il existe un et un seul ensemble dont les éléments sont précisément tous les objets qui satisfont P.

Plus tard, on va voir que cette supposition peut causer des problèmes. Par exemple, est-ce que l'ensemble

$$U = \{x : x \text{ est un ensemble}\}$$

existe ? U est l'ensemble de tous les ensembles, donc en particulier $U \in U$. On reviendra sur ce point plus tard.

Intervalles. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq b \leq b\} \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\
(-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ces ensembles sont appelés *intervalles* ou *segments*. Remarquez que $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. On écrit aussi $\mathbb{R}^{>0}$ et $\mathbb{R}^{\geq 0}$ pour $(0, \infty)$ et $[0, \infty)$ respectivement.

Exercices 1.3.1.

(a) Montrez que si $b \leq a$, alors $(a, b) = \varnothing$.

(b) Trouvez les éléments de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : x > n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Trouvez l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in (0, 1)\}$.

1.4. Ensembles d'ensembles

Pour être à l'aise avec l'idée qu'un ensemble peut être un élément d'un autre ensemble, on considère quelques exemples.

Exemple 1.4.1. $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ est un ensemble dont les éléments sont des intervalles. On a

$$\begin{aligned}
(2, 3) &\in X \\
[4, 5) &\notin X \\
(2, \infty) &\notin X \\
4 &\in (-2, 7) \in X \\
4 &\notin X
\end{aligned}$$

Exemple 1.4.2. Soit X l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ tels que $0 \in A$:

$$X = \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \in A\}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}(2,3) &\notin X\\(-1,4) &\in X\\0 &\notin X\\(0,\infty) &\notin X\\[0,\infty) &\in X\end{aligned}$$

EXERCICES 1.4.3.

(a) Soit X un ensemble avec n éléments. Combien d'éléments y a-t-il dans l'ensemble $\{A \in \wp(X) : |A| = n-1\}$.

(b) Soit X un ensemble avec n éléments. Combien d'éléments y a-t-il dans l'ensemble $\{A \in \wp(X) : |A| \text{ est pair}\}$.

(c) Soit X un ensemble avec n éléments. Combien d'éléments y a-t-il dans l'ensemble $\{A \in \wp(X) : |A| \text{ est divisible par } 3\}$.

(d) Soit U l'ensemble des parties X de $\mathbb{R}$ tels que pour quelque $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $(-\epsilon,\epsilon) \subseteq X$. Soit V l'ensemble des parties X de $\mathbb{R}$ tels que pour quelque $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $[-\epsilon,\epsilon] \subseteq X$. Soit W l'ensemble des parties X de $\mathbb{R}$ tels que pour quelque $\epsilon \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, $(-\epsilon,\epsilon) \subseteq X$. Montrez que $U = V = W$.

1.5. Ensembles paramétrés

Considérons l'ensemble

$$\{4n+3 : n \in \mathbb{N}\}.$$

On dit que l'ensemble est *paramétré* (ou *indexé*) par $\mathbb{N}$ et que $\mathbb{N}$ est *l'ensemble d'indices.*

Si X est un ensemble quelconque, on a $X = \{x : x \in X\}$ et puis chaque ensemble est paramétré par lui-même.

L'ensemble

$$\{[a,b) : a < 0 \text{ et } b > 4\}$$

est paramétré par les deux nombre réels a et b.

Parfois, un ensemble $\{x_i : i \in I\}$ est noté par $(x_i)_{i\in I}$ ou par $(x_i)_i$ lorsque l'ensemble d'indices est clair dans le contexte.

CHAPITRE 2

Opérations avec des ensembles

2.1. Différence

Soit X et Y deux ensembles. On définit
$$X \setminus Y := \{x \in X : x \notin Y\} \qquad \text{“}X \text{ moins } Y\text{”}.$$

Par exemple,

- $\{-1, 0, 2, 3, 6, 7\} \setminus \{-5, -1, 1, 3, 4, 6, 9\} = \{0, 2, 7\}$
- $\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels impairs.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ = (-\infty, 0]$.

Pour tous les ensembles x et y,

(a) $x \setminus x = \varnothing$
(b) $x \setminus y \subseteq x$
(c) $x \setminus \varnothing = x$
(d) $x \setminus y = \varnothing$ si et seulement si $x \subseteq y$

Si X est un ensemble fixe, pour chaque partie Y de X on écrit Y^c pour $X \setminus Y$. On utilise la notation Y^c seulement quand le surensemble est clair dans le contexte. L'ensemble Y^c est appelé le *complémentaire* de Y (dans X).

Si on fixe un surensemble X, on a

(a) $(Y^c)^c = Y$
(b) $X^c = \varnothing$
(c) $\varnothing^c = X$

2.2. Intersection

Si X et Y sont des ensembles, on définit *l'intersection* de X et Y par
$$X \cap Y := \{a : (a \in X) \wedge (a \in Y)\}.$$

Par exemple, si $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ alors $X \cap Y = \{4, 5, 6\}$.

Un autre exemple : $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}^+$.

On dit que deux ensembles X et Y sont *disjoints* si $X \cap Y = \varnothing$.

L'intersection satisfait les propriétés suivantes (exercices) :

(a) $x \cap x = x$

(b) $x \cap y \subseteq x$

(c) $x \cap y = y \cap x$ (l'intersection est commutative)

(d) $x \cap y = x$ si et seulement si $x \subseteq y$

(e) $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ (l'intersection est associative)

(f) $x \cap \varnothing = \varnothing$

(g) $(x \setminus y) \cap (y \setminus x) = \varnothing$

À cause de la commutativité de l'intersection on n'a pas besoin de parenthèses quand on prend l'intersection de plusieurs ensembles. Par exemple, on peut écrire :

$$x \cap y \cap z \cap t$$

On peut aussi former l'intersection d'un nombre infini d'ensembles. Si A_i est un ensemble pour chaque $i \in I$ (I est un ensemble d'indices),

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : x \in A_i \text{ pour chaque } i \in I\}.$$

On écrit $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ pour $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Si X est un ensemble d'ensembles, on écrit $\cap X$ pour $\cap_{x \in X} x$.

Exemple 2.2.1.

(a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}$

(b) $\bigcap_{r \in \mathbb{R}^+} (0, r] = \varnothing$

(c) $\bigcap_{r \in \mathbb{R}^+} [0, r) = \{0\}$

(d) $\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (r, \infty) = \varnothing$

(e) Soit $X = \{\mathbb{N}, \mathbb{R}^+, (-\infty, 5)\}$. Alors $\cap X = \{1, 2, 3, 4\}$.

Exercices 2.2.2.

(a) Montrez que $x \setminus y = x$ si et seulement si $x \cap y = \varnothing$ et que $x \setminus y = \varnothing$ si et seulement si $x \subseteq y$.

(b) Montrez que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1 + 1/n) = [0, 1]$.

(c) Montrez que $\bigcap_{r<1 \text{ and } 2<s} (r, s) = [1, 2]$.

2.3. Union

Si X et Y sont des ensembles, on définit *l'union* (ou *la réunion*) de X et Y par
$$X \cup Y := \{a : (a \in X) \vee (a \in Y)\}.$$

Par exemple, si $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ alors $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Un autre exemple : $(-3, 5] \cup [0, \infty) = (-3, \infty)$.

L'union satisfait les propriétés suivantes (exercices) :

(a) $x \cup x = x$
(b) $x \subseteq x \cup y$
(c) $x \cup y = y \cup x$ (l'union est commutative)
(d) $x \cup y = x$ si et seulement si $y \subseteq x$
(e) $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ (l'union est associative)
(f) $x \cup \varnothing = x$

À cause de la commutativité de l'union on n'a pas besoin de parenthèses quand on prend l'intersection de plusieurs ensembles. Par exemple, on peut écrire :
$$x \cup y \cup z \cup t$$

On peut aussi former l'union d'un nombre infini d'ensembles. Si A_i est un ensemble pour chaque $i \in I$ (I est un ensemble d'indices),
$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : x \in A_i \text{ pour au moins } i \in I\}.$$
On écrit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pour $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Si X est un ensemble d'ensembles, on écrit $\cup X$ pour $\cup_{x \in X} x$.

Exemple 2.3.1. Démontrons que $\bigcup_{n=1}^{\infty}(1/n, 1 - 1/n) = (0, 1)$. On doit prouver
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(1/n, 1 - 1/n) \subseteq (0, 1) \quad \text{et} \quad (0, 1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(1/n, 1 - 1/n).$$
Puisque $0 < 1/n$ et $1 - 1/n < 1$ pour chaque nombre naturel n, la première inclusion est satisfaite. Soit $x \in (0, 1)$. Donc $0 < x < 1$. On peut choisir un nombre n_1 tel que $1/n_1 < x$ et un nombre n_2 tel que $1/n_2 < 1 - x$. Soit n le maximum de n_1 et n_2. Donc
$$1/n \leq 1/n_1 < x \quad \text{et} \quad 1/n \leq 1/n_2 < 1 - x \Rightarrow x < 1 - 1/n.$$
Par conséquent, $x \in (1/n, 1 - 1/n)$. On a démontré que chaque $x \in (0, 1)$ est un élément de $(1/n, 1 - 1/n)$ pour un certain n. Donc on a démontré que $(0, 1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(1/n, 1 - 1/n)$.

Exemple 2.3.2.

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n) = (-1, 1)$

(b) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1/n, 1-1/n] = (0, 1)$

(c) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[1/n, n) = (0, \infty)$

(d) $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(r, \infty) = \mathbb{R}$

Il y a deux relations entre $\cap$ et $\cup$ appelées la loi de De Morgan (rappelez-vous la loi de De Morgan dans la logique propositionelle, qui est différente) :

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$
$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

Pour deux ensembles X et Y,

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

est la *différence symétrique* de X et Y.

Exemple 2.3.3. Si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{et} \quad B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

alors

$$A \Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}.$$

Exercices 2.3.4.

(a) Soit A et B des parties d'un surensemble X. Montrez que $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$.

(b) Montrez que pour des ensembles quelconques x, y, z,

$$y \cap (x \setminus y) = \varnothing$$
$$(x \cap y) \setminus z = (x \setminus z) \cap (y \setminus z)$$
$$(x \setminus y) \setminus z = x \setminus (y \cup z)$$

(c) Trouvez $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n, n^2]$.

(d) Trouvez $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n, n^2)$.

(e) Soit X un ensemble et pour $i \in I$ soit $Y_i \subseteq X$. Montrez que $(\bigcup_i Y_i)^c = \bigcap_i Y_i^c$ et que $(\bigcap_i Y_i)^c = \bigcup_i Y_i^c$.

(f) Montrez que $\bigcup_{r>0}[r, \infty) = (0, \infty)$.

(g) Soit A un ensemble et X un ensemble d'ensembles. Montrez que $\left(\bigcup_{x\in X} x\right) \setminus A = \bigcup_{x\in X}(x \setminus A)$.

(h) Soient X et Y deux ensembles non-vides d'ensembles. Montrez que

$$(\cup_{x\in X} x) \cap (\cup_{y\in Y} y) = \cup_{x\in X,\, y\in Y}(x \cap y),$$
$$(\cap_{x\in X} x) \cup (\cap_{y\in Y} y) = \cap_{x\in X,\, y\in Y}(x \cup y).$$

(i) Pour deux ensembles X et Y, montrez que

(i) $X\Delta(Y\Delta Z) = (X\Delta Y)\Delta Z$.
(ii) $X\Delta Y = Y\Delta X$.
(iii) $X\Delta\varnothing = \varnothing\Delta X = X$.
(iv) $X\Delta X = \varnothing$.

2.4. Produit cartésien

Rappelez-vous qu'on paramètre le plan $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ par des couples des nombres réels (x, y). Chaque point P du plan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est représenté par deux coordonnées x et y et on écrit $P = (x, y)$.

Mais qu'est-ce que c'est un couple (x, y) ? Qu'est-ce ça veut dire ? La propriété dont on a besoin est la suivante :

$$(x, y) = (z, t) \text{ si et seulement si } x = z \text{ et } y = t.$$

Donc, on veut une définition d'un pair (x, y) avec cette propriété. L'ensemble $\{x, y\}$ n'a pas cette propriété parce que $\{x, y\} = \{y, x\}$ (même si $x \neq y$).

Mais l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ a cette propriété.

Lemme 2.4.1. $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$ *si et seulement si* $x = z$ *et* $y = t$.

Preuve. Si $x = z$ et $y = t$, alors $\{x\} = \{z\}$ et $\{x, y\} = \{z, t\}$. Donc $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$. On a demontré :

$$(x = z \text{ et } y = t) \Rightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}.$$

Supposons que $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$. On sait que $x = y$ ou $x \neq y$. On montre que $x = z$ et $y = t$ par séparation des cas. Supposons que $x = y$. Alors $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}\}$. Donc $\{\{z\}, \{z, t\}\} = \{\{x\}\}$ a seulement un élément. Par conséquent, $\{z, t\} = \{z\}$ et donc $z = t$. Puis $\{z\} = \{x\}$ et donc $z = x$. Donc $y = x = z = t$ aussi.

Maintenant, supposons que $x \neq y$. On sait que $\{z\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ et donc $\{z\} = \{x\}$ ou $\{z\} = \{x, y\}$. Mais l'ensemble $\{x, y\}$ a deux éléments parce que $x \neq y$. Par conséquent $\{z\} \neq \{x, y\}$ et donc $\{z\} = \{x\}$. Donc $z = x$. Aussi, il faut que $\{x, y\} = \{z, t\}$. On a démontré l'autre implication :

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\} \Rightarrow (x = z \text{ et } y = t).$$

$\square$

Définition 2.4.2. Le couple (x, y) est l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. On dit que x est la *première coordonnée* et que y est la *deuxième coordonnée*. Pour deux ensembles X et Y,

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

L'ensemble $X \times Y$ est appelé le *produit Cartésian* de X et Y.

Lemme 2.4.3. *Si X et Y sont des ensembles, alors $X \times Y \subseteq \wp(\wp(X \cup Y))$.*

Preuve. Soit $x \in X$ et $y \in Y$. Alors $x, y \in X \cup Y$. Donc $\{x\}, \{x, y\} \in \wp(X \cup Y)$. Par conséquent $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ est un sous-ensemble de $\wp(X \cup Y)$, et donc un élément de $\wp(\wp(X \cup Y))$. Donc $X \times Y \subseteq \wp(\wp(X \cup Y))$. $\square$

Corollaire 2.4.4. *Si X et Y sont des ensembles,*

$$X \times Y = \{\alpha \in \wp(\wp(X \cup Y)) : \exists_{x \in X} \exists_{y \in Y} \, \alpha = \{\{x\}, \{x, y\}\} \ \}.$$

Donc $X \times Y$ est un sous-ensemble de $\wp(\wp(X \cup Y))$ défini par une propriété.

On écrit (x, y, z) pour $((x, y), z)$. On va donner une définition meilleure plus tard.

Exercices 2.4.5.

(a) Écrivez les éléments de $((x, y), z)$.
(b) Est-ce que c'est possible que $((x, y), z) = (x, (y, z))$?
(c) Si $|X| = n$ et $|Y| = m$, combien d'éléments $X \times Y$ a-t-il ?
(d) Trouvez $\cap(x, y)$, $\cup(x, y)$, $\cap \cap (x, y)$, $\cap \cup (x, y)$, $\cup \cap (x, y)$, et $\cup \cup (x, y)$.
(e) Trouvez $((\cup \cup (x, y)) \setminus (\cup \cap (x, y))) \cup (\cap \cup (x, y))$.
(f) Qu'est-ce c'est $X \times \varnothing$?
(g) Montrez que $\cup \cup (X \times Y) = X \cup Y$ si $X \neq \varnothing$ et $Y \neq \varnothing$.
(h) Supposons que $A \subseteq A \times A$. Qu'est-ce vous pouvez dire de A ?
(i) Montrez que $X \times Y = \varnothing$ si et seulement si un de X ou Y est vide.
(j) Montrez que $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$, $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$ et $(X \setminus Y) \times Z = (Z \setminus Z) \cap (Y \setminus Z)$.
(k) Trouvez des égalités similar pour $(\cup_i X_i) \times Z$ et $(\cap_i X_i) \times Z$.

CHAPITRE 3

Fonctions

3.1. Fonctions

Intuitivement, une *fonction* ou une *application* d'un ensemble X dans un ensemble Y est un "règle" qui assigne à **chaque** élément x de X un élément **unique** $f(x)$ de Y. L'ensemble X est appelé le *domaine* et Y est appelé le *codomaine* (ou *l'ensemble d'arrivée*).

Remarquez qu'une fonction peut assigner le même élément du codomaine a deux (ou plus) éléments du domaine. Aussi, ce n'est pas nécessaire que chaque élément du codomaine est associé à un élément du domaine (mais chaque élément du domaine est associé à un élément du codomaine).

Par exemple, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui assigne à chaque nombre réel son carré assign le nombre 1 (du codomaine) à 1 et -1 (du domaine). Et il n'existe aucun nombre du domaine associé à -1 (du codomaine).

Si f est une fonction de X dans Y, on écrit $f : X \to Y$. Si on veut donner la règle, on écrit $x \mapsto f(x)$.

Par exemple,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \tag{1}$$

est la fonction qui assigne a chaque nombre réel son carré.

Si $A \subseteq X$ et $f : X \to Y$ est une fonction,

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y : y = f(a) \text{ pour quelque } a \in A\}.$$

est *l'image* de A sous f. L'ensemble $f(X)$ est *l'image*. Si $B \subseteq Y$,

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

est *l'image réciproque* de B sous f.

Remarquez que le codomaine et l'image peuvent être différent. Par example, si f est la fonction définie par (1), l'image est $[0, \infty)$ mais le codomaine est $\mathbb{R}$. Aussi, $f((-2, 2)) = [0, 4)$.

Le domaine et le codomaine sont des parties de la définition d'une fonction. Par example, les fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f(x) = x^2, \\ f_1 : \mathbb{R} \to (-1, \infty), &\quad f(x) = x^2, \\ f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty), &\quad f(x) = x^2, \end{aligned}$$

sont différents parce qu'ils ont des codomaines différents. Cependant, parfois on utilisera la même notation f pour tous ces fonctions.

Si $f : X \to Y$ et Y_1 est un ensemble tel que $f(X) \subseteq Y_1$, on peut former une autre fonction $f_1 : X \to Y_1$ avec la même règle.

Deux fonctions $f : X \to Y$ et $g : X_1 \to Y_1$ sont égaux si et seulement si $X = X_1$, $Y = Y_1$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$.

Par exemple, les fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f(x) = 4x^2, \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad g(x) = (2x)^2, \end{aligned}$$

sont égaux.

L'ensemble des fonctions de X dans Y sera désigné par $\mathrm{Fonc}(X, Y)$.

Exemples 3.1.1.

(a) Pour chaque ensemble X, il existe la *fonction identique* $\mathrm{Id}_X : X \to X$ définie par $\mathrm{Id}_X(x) = x$.

(b) Soient X et Y des ensembles et soit b un élément fixe de Y. La fonction $x \mapsto b$ qui envoie chaque élément de X à b est appelée la *fonction constante de valeur b*.

(c) Soient X, Y, Z trois ensembles et soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions. On définit la fonction

$$g \circ f : X \to Z$$

par la règle

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

La fonction $g \circ f$ est appelée la *composé* de f et g. L'operation $\circ$ est appelée *composition*.

Remarquez que $f \circ g$ peut pas être définie (à moins que $X = Z$) et même quand elle est définie, l'égalité $f \circ g = g \circ f$ peut être fausse.

Si $X = Y$ on peut composer f avec lui-même plusieurs fois. On écrit f^n pour $f \circ \cdots \circ f$ (n fois). Remarquez que $f^n \circ f^m = f^{n+m}$.

(d) Soient $f : X \to Y$ un fonction et $A \subseteq X$. Ensuite, il y a une fonction $f|_A : A \to Y$ tel que $f|_A(a) = f(a)$ pour tous $a \in A$.

La fonction $f|_A$ est appelée la *restriction* de f à A.

(e) Soient X et Y deux ensembles. Les fonctions $\pi_1 : X \times Y \to X$ and $\pi_2 : X \times Y \to Y$ définissent par $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y$ sont appelées les *première* et *deuxième projections* respectivement.

LEMME 3.1.2. *Soient X, Y, Z, T des ensembles et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$ des fonctions. Alors*

(a) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. *(*associativité*)*

(b) $f \circ \mathrm{Id}_X = f$ *et* $\mathrm{Id}_Y \circ f = f$.

Preuve.

(a) Premièrement, remarquez que les domaines de $h \circ (g \circ f)$ est $(h \circ g) \circ f$ sont tous les deux X et les codomaines sont tous les deux Z. Ensuite, pour chaque $x \in X$,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \quad \text{et}$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Donc $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ pour tout $x \in X$ et cela veut dire que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(b) Premièrement, remarquez que les domaines de $f \circ \mathrm{Id}_X$, $\mathrm{Id}_Y \circ f$, et f sont tous X et leurs codomaines sont tous Y. Ensuite, pour chaque $x \in X$, on remarquez que

$$(f \circ \mathrm{Id}_X)(x) = f(\mathrm{Id}_X(x)) = f(x), \quad \text{et}$$
$$(\mathrm{Id}_Y \circ f)(x) = \mathrm{Id}_Y(f(x)) = f(x).$$

□

DÉFINITION 3.1.3. Si $f : X \to Y$ est une fonction, son *graphe* est l'ensemble

$$\mathrm{Gph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

L'ensemble $\mathrm{Gph}(f)$ a les propriétés suivantes :

(a) $\mathrm{Gph}(f) \subseteq X \times Y$,

(b) Pour chaque $x \in X$ il existe un élément unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in \mathrm{Gph}(f)$.

Inversement, supposons que F est un ensemble qui satisfait ces deux propriétés :

(a) $F \subseteq X \times Y$,

(b) Pour chaque $x \in X$ il existe un élément unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in F$.

Alors on peut définir une fonction $f : X \to Y$ tel que $F = \mathrm{Gph}(f)$. On définit $f : X \to Y$ par la règle

$$f(x) = y \text{ si et seulement si } (x, y) \in F.$$

EXERCICES 3.1.4. Dans les exercices suivantes, f est une fonction.

(a) Combien de fonctions y a-t-il d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de m éléments ?

(b) Que pouvez-vous dire au sujet de la relation entre $f(A \setminus B)$ et $f(A) \setminus f(B)$?

(c) Montrez que $f(\varnothing) = \varnothing$.

(d) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par $f(x) = 2x + 1$. Par exemple $f(3) = 7$, $f(f(3)) = f(7) = 15$.

(i) Trouvez $f(\mathbb{N})$, $f(f(\mathbb{N}))$, $f(f(f(\mathbb{N})))$.

(ii) Trouvez $f^n(\mathbb{N})$.

(e) Soit $f : X \to Y$ une fonction.

(i) Montrez que si $(B_i)_i$ est une famille de parties de Y, alors

$$f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i),$$

et

$$f^{-1}\left(\bigcap_i B_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$$

et si $B \subseteq Y$ alors $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.

(ii) Montrez que si $(A_i)_i$ est une famille de parties de X, alors $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$ et $f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$.

(iii) Trouvez un example où la dernière inclusion n'est pas une égalité.

(iv) Si $A \subseteq X$, qu'est-ce c'est la relation entre $f(A^c)$ et $f(A)^c$?

(f) (i) Trouvez une fonction $f : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ tel que si $x \in \wp(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ alors $f(x) \in x$.

(ii) Trouvez une fonction $f : \wp(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ tel que si $x \in \wp(\mathbb{Z}) \setminus \{\varnothing\}$ alors $f(x) \in x$.

(iii) Trouvez une fonction $f : \wp(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}$ tel que si $x \in \wp(\mathbb{Q}) \setminus \{\varnothing\}$ alors $f(x) \in x$.

3.2. Fonctions : Une définition plus précise

On a dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est une "règle" que assigne a chaque élément de X un élément de Y. Mais cette définition n'est pas assez précise. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 3.2.1. Une fonction est un ensemble de la forme (X, Y, F) tel que X et Y sont deux ensembles et F est un sous-ensemble de X qui satisfait la propriété suivante :

Pour chaque $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in F$.

Puis notre "règle" $f(x) = y$ est définie par

$$f(x) = y \text{ si et seulement si } (x, y) \in F.$$

Avec la nouvelle définition d'une fonction donnée ci-dessus, étant donné deux fonctions (X, Y, F) et (Y, Z, G), qu'est-ce c'est la composé $(X, Y, F) \circ (Y, Z, G)$?

Par définition, pour chaque $x \in X$, il existe un unique $f(x) = y \in Y$ tel que $(x, y) \in F$. Puis il existe un unique $g(f(x)) = g(y) = z \in Z$ tel que $(y, z) \in F$. Donc on définit un nouveaux ensemble H par

$$H = \{(x, z) \in X \times Z : \exists_{y \in Y} [((x, y) \in F) \wedge ((y, z) \in G]\}.$$

Puis on définit

$$(X, Y, F) \circ (Y, Z, G) := (X, Z, H).$$

Exercice 3.2.2. Soit (X, Y, F) une fonction. Montrez que l'ensemble X est uniquement déterminée par Y et F. En d'autres termes, si (X, Y, F) et (X_1, Y, F) sont des fonctions, alors $X = X_1$. Cet exercice montre qu'une fonction peut être définie comme une paire (Y, F) tel que pour tout x il existe au plus un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in F$ et on peut retrouver l'ensemble de définition comme l'ensemble des $x \in X$ tels que $(x, y) \in F$ pour au moins un $y \in Y$.

3.3. Opérations binaires

Définition 3.3.1. Soit X un ensemble. Une *opération binaire* est une fonction $f : X \times X \to X$. Pour $x, y \in X$, au lieu de $f(x, y)$ on écrit souvent $x \star y$, $x \cdot y$, $x + y$, $x \odot y$, $x \otimes y$, etc. ou même xy. Si l'opération n'a pas de nom, le résultat $x \star y$ est souvent appelé le *produit* des éléments x et y. Un ensemble X avec une opération binaire $\star$ est noté $(X, \star)$.

Exemples 3.3.2.

(a) Soit $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Alors l'addition et la multiplication sont des opérations binaires sur X. Si $X = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ alors la soustraction est une opération binaire. Si $X = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alors la division est une opération binaire sur X.

(b) Soit X un ensemble. Alors $\cap, \cup, \setminus, \Delta$ sont des opérations binaires sur $\wp(X)$.

Propriétés potentielles des opération binaires. Soit $\star$ une opération binaire définie sur un ensemble X.

(a) **Associativité.** Si $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ pour tous choix de $x, y, z \in X$, alors on dit que $\star$ est *associative*. Si $\star$ est associative, on peut écrire des produits $x \star y \star z$ sans parenthèses. Si $\star$ n'est pas associative, même les produits $(x \star x) \star x$ et $x \star (x \star x)$ peuvent être différent et donc x^3 n'a pas du sens.

(b) **Commutativité.** Si $x \star y = y \star x$ pour tous choix de $x, y \in X$, alors on dit que $\star$ est *commutative*.

(c) **Élément unité.** S'il y a un $e \in X$ tel que $x \star e = x$ pour tout $x \in X$, alors on dit que e est une *unité à droite* pour $\star$. S'il y un $f \in X$ tel que $f \star x = x$ pour tout $x \in X$, alors on dit que f est une *unité à gauche* pour $\star$. Un élément qui est une unité à droite **et** une unité à gauche est une *unité* de l'opération binaire $\star$.

Supposons que $\star$ a une unité à gauche f et une unité à droite e. Donc $f = f \star e = e$. Par conséquent, X a une unité et cet élément est unique.

(d) **Élément inverse.** Supposons que $(X, \star)$ a une unité e. Soit $x \in X$. S'il existe $y \in X$ tel que $x \star y = e$, alors y est appelé un *inverse à droite* de x. S'il existe $z \in X$ tel que $z \star x = e$, alors z est appelé un *inverse à gauche* de x. Si $\star$ est associative est si $x \in X$ a un élément inverse à gauche z et un élément inverse à droite y, alors

$$y = y \star e = y \star (x \star z) = (y \star x) \star z = e \star z = z$$

et donc $y = z$ est un *inverse* de x.

Exemples 3.3.3.

(a) $X = \wp(A)$ avec l'opération d'intersection $\cap$. On a vu que cette opération est associative et commutative. Puisque $B \cap A = A \cap B = B$ pour tous $B \in \wp(A)$ (c.-à-d. $B \subseteq A$), A est une unité. Seulement A a un inverse (qui est A lui-même) parce que si $B \subsetneq A$, alors $B \cap C \subseteq B \neq A$ pour tous $C \in \wp(A)$.

(b) $\mathbb{Z}$ avec $+$. Cette opération est associative et commutative et 0 est un élément unité. L'inverse de $n \in \mathbb{Z}$ est $-n$.

(c) $\mathbb{Z}$ avec $\times$. Cette opération est associative et commutative et 1 est un élément unité. Seulement 1 a un inverse (qui est 1 lui-même). Aucun autre élément a un inverse (à gauche ou à droite).

(d) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ avec division. Cette opération n'est ni associative ni commutative. Par exemple,

$$1/2 \neq 2/1, \quad \text{et} \quad 1/(2/2) \neq (1/2)/2.$$

1 est une unité à droite mais il n'y a pas d'unité à gauche (et donc pas d'unité).

Exercices 3.3.4. Pour les opérations binaires suivantes, déterminer si les opérations sont associatives et/ou commutatives. Aussi, déterminez s'il existe des éléments unités à droite ou à gauche et si oui, déterminez s'il existe des éléments inverses à gauche ou à droite.

(a) $X = \wp(A)$ avec l'opération d'union $\cup$.

(b) $X = \wp(A)$ avec la différence $\setminus$.

(c) $X = \wp(A)$ avec la différence symétrique Δ.

(d) $X = \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ avec $+$ ou $\times$.

(e) $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec la division.

(f) $X = 2\mathbb{Z}$ avec $+$.

(g) $X = \mathbb{R}$, $a \in R$ un élément fixe et $x \star y = x + y - a$.

(h) X un ensemble quelconque, $e \in X$ un élément fixe, $x \star y = e$ pour tous $x, y \in X$.

(i) X un ensemble quelconque, $x \star y = x$ pour tous $x, y \in X$.

(j) $X = \mathbb{R}$ et $x \star y = \max\{x, y\}$.

(k) $X = \mathbb{R}$ et $x \star y = x - y$.

(l) $X = \mathbb{R}$ et $x \star y = |x = y|$.

3.4. Opérations avec des fonctions

On va voir comment utiliser les anciennes fonctions pour créer des nouvelles fonctions.

Exemples 3.4.1.

(a) Soient f et g des fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$. On peut définir
$$f+g : X \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ pour tout } x \in X.$$
On dit que $f+g$ est définie par *addition termes à termes*. On peut aussi définir
$$fg : X \to \mathbb{R}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \text{ pour tout } x \in X$$
On dit que fg est définie par *multiplication termes à termes*. En général, si $f, g : X \to Y$ sont des fonctions et $\star$ est une opération binaire sur Y, alors on peut définir
$$f \star g : X \to Y, \quad (f \star g)(x) = f(x) \star g(x), \quad x \in X.$$
Donc $\star$ nous donne une opération binaire sur $\mathrm{Fonc}(X, Y)$, encore noté par $\star$. Des propriétés de $(Y, \star)$ devient des propriétés de $(\mathrm{Fonc}(X, Y), \star)$. Par example, si $(Y, \star)$ est commutative, alors pour tous choix de $f, g \in \mathrm{Fonc}(X, Y)$,
$$(f \star g)(x) = f(x) \star g(x) = g(x) \star f(x) = (g \star f)(x) \text{ pour tout } x \in X.$$
Par conséquent $f \star g = g \star f$ pour tout choix de $\mathrm{Fonc}(X, Y)$. Donc $(\mathrm{Fonc}(X, Y), \star)$ est commutative.

Exercices :

(i) Montrez que si $(Y, \star)$ est associative, alors $(\mathrm{Fonc}(X, Y), \star)$ est associative.

(ii) Montrez que si $(Y, \star)$ a une unité à gauche (resp. à droite), alors $(\mathrm{Fonc}(X, Y), \star)$ a une unité à gauche (resp. à droite).

(iii) Montrez que si $(Y, \star)$ a une unité et si chaque element de Y est inversible, alors $(\mathrm{Fonc}(X, Y), \star)$ a les mêmes propriétés.

(b) Si $f : X \to X_1$ et $g : Y \to Y_1$ sont des fonctions, on peut définir la fonction
$$f \times g : X \times Y \to X_1 \times Y_1, \quad (f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

(c) Pour chaque fonction $f : X \to Y$, on peut définir la fonction
$$\tilde{f} : \wp(X) \to \wp(Y), \quad \tilde{f}(A) = f(A) := \{f(a) : a \in A\} \text{ pour tout } A \in \wp(X).$$

(d) Soit $f : X \to Y$ une fonction. On peut définir une fonction
$$\tilde{f}^{-1} : \wp(Y) \to \wp(X),$$
$$\tilde{f}^{-1}(B) = f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \text{ pour tout } B \in \wp(Y).$$

(e) Soient $f : X \to X_1$ et $g : Y \to Y_1$ deux fonctions. Supposez que $X \cap Y = \varnothing$. Alors on peut définir la fonction $f \cup g : X \cup Y \to X_1 \cup Y_1$, *l'union* de f et g, par la règle
$$(f \cup g)(z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } z \in X, \\ g(z) & \text{if } z \in Y. \end{cases}$$

(f) On peut généraliser l'exemple ci-dessus. Soient $f : X \to X_1$ et $g : Y \to Y_1$ deux fonctions. Supposez que pour tout $z \in X \cap Y$, $f(x) = g(x)$. Alors on peut définir la fonction $f \cup g : X \cup Y \to X_1 \cup Y_1$, *l'union* de f et g, par la règle

$$(f \cup g)(z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } z \in X, \\ g(z) & \text{if } z \in Y. \end{cases}$$

Si $X \cap Y = \varnothing$, cette définition est d'accord avec l'ancien.

EXERCICE 3.4.2. Soient f et g deux fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$. Montrez que si $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $s(x, y) = x + y$, alors $f + g = s \circ (f \times g)$. Montrez que si $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $p(x, y) = xy$, alors $fg = p \circ (f \times g)$.

3.5. Injections, surjections, et bijections

3.5.1. Injections.

DÉFINITION 3.5.1. Une fonction $f : X \to Y$ est *injective* si

$$\forall_{x_1, x_2 \in X}[(f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2)].$$

On dit aussi que f est une *injection*.

EXEMPLES 3.5.2.

(a) La fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

n'est pas injective. Cependant, la fonction

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

est injective.

(b) Si X et Y sont des ensembles non-vides et $x_0 \in X$ est fixe, alors la fonction $f : Y \to X \times Y$ définie par $f(y) = (x_0, y)$ est injective.

(c) Soit $a \in \mathbb{N}$. La fonction

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n + a$$

est injective.

(d) Soit $r \in R$. La fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = rx$$

est injective si et seulement si $r \neq 0$.

(e) Si $f_1 : X_1 \to Y_1$ et $f_2 : X_2 \to Y_2$ sont des fonctions injectives, alors la fonction

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2, \quad (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

est aussi injective.

LEMME 3.5.3.

(a) *La composition de deux injections est une injection.*

(b) *Si $f \circ g$ est un injection, alors g est un injection.*

Preuve.

(a) Soient f et g deux injections. Pour tous choix de x_1, x_2,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) &\implies f(g(x_1)) = f(g(x_2)) && \text{(définition de composition)}\\ &\implies g(x_1) = g(x_2) && (f \text{ est injective})\\ &\implies x_1 = x_2 && (g \text{ est injective})\end{aligned}$$

Donc $f \circ g$ est injective.

(b) Supposez que $g(x_1) = g(x_2)$. Donc $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. En d'autres termes $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$. Puisque $f \circ g$ est une injection, cela implique $x_1 = x_2$.

□

Remarquez que c'est possible d'avoir une injection $f \circ g$ où f n'est pas une injection. Par exemple, si

$$g : \{0\} \to \{0, 1\},\ g(0) = 0 \quad \text{et} \quad f : \{0, 1\} \to \{0\},\ f(0) = f(1) = 0,$$

alors $f \circ g : \{0\} \to \{0\}$ est l'identité, qui est injective, mais f n'est pas injective.

3.5.2. Surjections.

DÉFINITION 3.5.4. Une fonction $f : X \to Y$ est une *surjection* si

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} [f(x) = y]$$

c.-à-d. $f(X) = Y$.

EXEMPLES 3.5.5.

(a) La fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

n'est pas surjective, mais

$$g : \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad g(x) = x^2, \quad \text{et} \quad h : [-5, 10] \to [0, 100], \quad h(x) = x^2,$$

sont surjectives.

(b) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(x) = \lfloor x \rfloor := \text{le plus grand entier qui est inférieur ou égal a } x$$

est surjective (mais pas injective).

(c) La fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$, est surjective.

(d) Si $f_1 : X_1 \to Y_1$ et $f_2 : X_2 \to Y_2$ sont surjectives, alors la fonction

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2, \quad (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)),$$

est surjective aussi.

LEMME 3.5.6.

(a) *La composition de deux surjections est une surjection.*

(b) *Si $g \circ f$ est une surjection, alors g est une surjection.*

(c) *Si $f : X \to Y$ est une fonction quelconque, alors la fonction $f : X \to f(X)$ est une surjection.*

(d) *La projection $\pi_1 : X \times Y \to X$ (resp. $\pi_2 : X \times Y \to Y$) est une surjection si $Y \neq \varnothing$ (resp. $X \neq \varnothing$).*

Preuve.

(a) Supposons que $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux surjections. On a
$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$$
et donc $g \circ f$ est une surjection.

(b) Supposons que $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des fonctions et que $g \circ f$ est une surjection. Alors $Z = g(f(X)) \subseteq g(Y)$. Puisque on a toujours $g(Y) \subseteq Z$, on déduit que $g(Y) = Z$ et donc g est une surjection.

(c) Exercice.

(d) Exercice.

□

Remarquez que c'est possible d'avoir une surjection $g \circ f$ où f n'est pas une surjection. Par exemple, si
$$f : \{0\} \to \{0, 1\},\ f(0) = 0 \quad \text{et} \quad g : \{0, 1\} \to \{0\},\ g(0) = g(1) = 0,$$
alors $g \circ f : \{0\} \to \{0\}$ est l'identité, qui est surjective, mais f n'est pas surjective.

3.5.3. Bijections.

DÉFINITION 3.5.7. Une fonction $f : X \to Y$ est appelée une *bijection* si elle est injective et surjective. Si X et Y sont des ensembles pour lesquels il existe une bijection de X dans Y, on dit que X et Y sont en *correspondance bijective*.

LEMME 3.5.8.

(a) *La composition de deux bijections est une bijection.*

(b) *Si $f \circ g$ est une bijection, alors g est une injection est f est une surjection.*

(c) *Si $f : X \to Y$ est une injection, alors $f : X \to f(X)$ est une bijection.*

Preuve. Le résultat découle de Lemmes 3.5.3 et 3.5.6. □

LEMME 3.5.9 (Inverse). *Soit $f : X \to Y$ une bijection. Alors il existe une bijection unique $f^{-1} : Y \to X$ tel que pour tous choix de $x \in X$ et $y \in Y$,*
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

On a

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y, \quad \textit{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X.$$

De plus, si $g : Y \to X$ *satisfait*

$$f \circ g = \mathrm{Id}_Y \quad \textit{ou} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_X,$$

alors $g = f^{-1}$.

Preuve. Les deux premières affirmations sont des exercices. Si f est une bijection est $g : Y \to X$ satisfait $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, alors

$$g = \mathrm{Id}_X \circ g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_Y = f^{-1}.$$

Le cas où $g : Y \to X$ satisfait $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ est similar. □

Si $f : X \to Y$ est un bijection, la bijection $f^{-1} : X \to Y$ du lemme ci-dessus est appelée *l'inverse* de f.

Lemme 3.5.10.

(a) *Soit* $f : X \to Y$ *une bijection. Alors* $(f^{-1})^{-1} = f$.

(b) *Soient* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *des bijections. Alors* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve. Exercice. □

Exercices 3.5.11.

(a) Trouvez tous les bijections de $\{0, 1, 2\}$ dans $\{0, 1, 2\}$. Trouvez tous les bijections de $\{0, 1, 2, 3\}$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$. Trouvez tous les injections de $\{0, 1, 2\}$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$. Trouvez tous les surjections de $\{0, 1, 2, 3\}$ dans $\{0, 1, 2\}$.

(b) Soit $f : X \to Y$ une bijection. Montrez que pour tous choix de $A, B \subseteq X$,

  (i) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

  (ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(X)$

  (iii) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

  (iv) Montrez que la fonction induite $\tilde{f} : \wp(X) \to \wp(Y)$ est aussi une bijection.

(c) Soit X un ensemble. Montrez que les ensembles $\mathrm{Fonc}(\{0, 1\}, X)$ et $X \times X$ sont en correspondance bijective.

CHAPITRE 4

Relations

4.1. Définitions

DÉFINITION 4.1.1. Soit X un ensemble. Une *relation binaire* R sur X (ou entre les éléments de X) est un sous-ensemble de $X \times X$. Pour $x, y \in X$, on écrit xRy si $(x, y) \in R$ et on écrit $x \not Ry$ si $(x, y) \notin R$. Les symboles usuels pour les relations sont $<, \leq, \prec, \preceq, \gg, \subset, \subseteq, \sqsubseteq, \sim, \simeq, \approx, \equiv, \perp, \lhd, \unlhd$, etc.

EXEMPLES 4.1.2. (a) Soit $X = \{0, 1, 2, 3\}$. On définit

$$< \, = \{(0, 1), \, (0, 2), \, (1, 2), \, (0, 3) \, (1, 3), \, (2, 3)\} = \{(i, j) \mid i < j\}.$$

Alors $<$ est une relation. C'est la relation familière d'ordre.

(b) Soit $X = \mathbb{R}$. Alors

$$< \, = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$$

est la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit X un ensemble. Alors $\varnothing$ et $X \times X$ sont des relations binaires sur X. Dans le premier, il n'existe pas deux éléments de X qui sont reliés. Dans le deuxième, chaque deux éléments de X sont reliés.

(d) Soit X un ensemble. Alors

$$\{(x, y) \in X \times X \mid x = y\} = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

est une relation binaire sur X (c'est l'égalité !).

(e) Soit $X \in \mathbb{Z}$. Alors $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \text{ divise } y\}$ est une relations binaire sur $\mathbb{Z}$.

(f) Soit U un ensemble et soit X l'ensemble des parties finis de U. Alors

$$\{(A, B) \in X \times X \mid |A| = |B|\}$$

est une relation binaire sur X.

(g) Soit U un ensemble et soit $X = \wp(U)$. Alors on a les relations binaires suivantes.

(i) $\{(A, B) \in X \times X \mid \text{il existe une bijection } f : A \to B\}$

(ii) $\{(A, B) \in X \times X \mid A \subseteq B\}$

(iii) $\{(A, B) \in X \times X \mid A \cap B \neq \varnothing\}$

(iv) $\{(A, B) \in X \times X \mid A \cap B = \varnothing\}$

(h) Si $f : X \to X$ est une fonction, alors le graphe de f est une relation de X.

On peut définir les propriétés suivantes d'une relation R sur X :

(a) *Réflexive* : $\forall_{x\in X}\, xRx$

(b) *Irréflexive* : $\forall_{x\in X}\, x \not R x$

(c) *Symétrique* : $\forall_{x,y\in X}\, (xRy \Rightarrow yRx)$

(d) *Antisymétrique* : $\forall_{x,y\in X}\, [(xRy \wedge yRx) \Rightarrow (x = y)]$

(e) *Transitive* : $\forall_{x,y,z\in X}\, [(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz]$

Exemples 4.1.3. (a) L'égalité est une relation réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive. Elle n'est pas irréflexive.

(b) La relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Elle n'est ni irréflexive ni symétrique.

(c) La relation $<$ est irréflexive, antisymétrique et transitive. Elle n'est ni réflexive ni symétrique.

(d) La relation $\neq$ (sur, par exemple, $\mathbb{R}$) est irréflexive et symétrique. Elle n'est ni réflexive, ni antisymétrique, ni transitive.

Exemple 4.1.4. Soit R une relations binaire sur X. Alors, il existe une plus petite relation S réflexive qui contient R. Précisément,

$$S = R \cup \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

On dit que S est la *clôture réflexive* de R. Ici, "plus petite" veut dire que toute relation réflexive qui contient R contient S aussi.

On peut définir aussi la *clôture symétrique* et *clôture transitive* d'une relation R (voir les exercices).

Exercices 4.1.5.

(a) Déterminez si les relations binaires sur Exemple 4.1.2 sont réflexives, irréflexives, symétriques, antisymétriques, ou transitives.

(b) Soit R une relation sur un ensemble X. Montrez qu'il existe une plus petite relation symétrique S qui contient R. On dit que S est la *clôture symétrique* de R.

(c) Soir R une relation sur un ensemble X. Montrez qu'il existe une plus petite relation transitive S qui contient R. On dit que S est la *clôture transitive* de R.

4.2. Relations d'équivalence

Définition 4.2.1. Une *relation d'équivalence* est une relation binaire qui est réflexive, symétrique et transitive. Une relation d'équivalence est souvent noté par $\equiv, \sim, \simeq, \approx, \cong$.

Selon la définition, une relation binaire $\equiv$ sur un ensemble X est une relation d'équivalence si et seulement si :

(a) **Réflexivité.** Pour tout $x \in X$, $x \equiv x$.
(b) **Symétrie.** Pour tous choix de $x, y \in X$, si $x \equiv y$ alors $y \equiv x$.
(c) **Transitivité.** Pour tous choix de $x, y, z \in X$, si $x \equiv y$ et $y \equiv z$, alors $x \equiv z$.

Exemples 4.2.2.

(a) Égalité est une relation d'équivalence sur tout ensemble.
(b) Les relations $<$ et $\leq$ (par exemple, sur $\mathbb{R}$) ne sont pas des relations d'équivalence.
(c) La relation définie par $\forall_{x,y \in X}\, xRy$ (c.-à.-d la relation $X \times X$) est une relation d'équivalence pour tout ensemble X.
(d) Si X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la relation définie par xRy si et seulement si $|x| = |y|$ est une relation d'équivalence sur X.
(e) Soit $n > 0$ un nombre naturel. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $\equiv_n$ définie par

$$x \equiv_n y \iff n \text{ divise } x - y$$

est une relation d'équivalence.

Preuve. On doit montrer que la relation est réflexive, symétrique, et transitive.

(i) *Réflexive.* Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x - x = 0 = 0 \cdot n$ est donc $x \equiv_n x$.
(ii) *Symétrique.* Supposons que $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv_n y$. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$ (parce que $x - y$ est divisible par n). Par conséquent, $y - x = (-k)n$ est divisible par n et donc $y \equiv_n x$.
(iii) *Transitive.* Supposons que $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv_n y$ et $y \equiv_n z$. Donc il existe $k, m \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$ et $y - z = mn$. Par conséquent,

$$x - z = (x - y) + (y - z) = kn + mn = (k + m)n$$

est donc $x - z$ est divisible par n. Donc $x \equiv_n z$.

□

(f) Si X est l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, alors la relation définie par $x \equiv y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.
(g) Soient X et Y deux ensembles et $A \subseteq X$. La relation $\equiv_A$ définie sur $\mathrm{Fonc}(X, Y)$ par

$$f \equiv g \iff f|_A = g|_A$$

est une relation d'équivalence.

(h) On définit une relation sur $\mathrm{Fonc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$f \equiv g \iff \exists_{x \in \mathbb{R}}\, [f(x) = g(x)].$$

Alors $\equiv$ n'est pas une relation d'équivalence parce que elle n'est pas transitive. Par exemple, si

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = 0, \quad x \in X,$$

alors $f \equiv g$ et $g \equiv h$ mais $f \not\equiv h$.

(i) Si X et Y sont des ensembles et F est un ensemble de fonctions de X dans Y, alors la relation sur X définie par

$$x \equiv y \iff \forall_{f \in F}\, [f(x) = f(y)]$$

est une relation d'équivalence sur X.

DÉFINITION 4.2.3. Si $\equiv$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X et $a \in X$, on définit la *classe d'équivalence* $\bar{a}$ de a par

$$\bar{a} = \{x \in X \mid a \equiv x\}.$$

Parfois, on écrit $[a]$ ou $\tilde{a}$ (ou quelque autre symbole) pour la classe d'équivalence de a.

DÉFINITION 4.2.4. Une *partition* P d'un ensemble X est un ensemble de parties de X (c.-à.-d. $P \in \wp(\wp(X))$) tel que

(a) $\cup P = X$, et
(b) pour tous choix de $A, B \in P$, si $A \neq B$ alors $A \cap B = \varnothing$.

EXEMPLES 4.2.5.

(a) Les ensembles $\{\{0\}, \{1,3\}, \{2,4\}\}$ et $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ sont partitions de $\{0,1,2,3,4\}$.
(b) Les ensembles $\{[n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{(2n, 2n+2] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sont des partitions de $\mathbb{R}$.
(c) Les ensembles
   (i) $\{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   (ii) $\{[n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   (iii) $\{[2n, 2n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

   ne sont pas des partitions de $\mathbb{R}$.

LEMME 4.2.6. *Soit $\equiv$ une relation d'équivalence sur un ensemble X. Alors l'ensemble $\{\bar{x} \mid x \in X\}$ est une partition de X. Inversement, tout partition P de X donne une relation d'équivalence sur X définie par*

$$x \equiv y \iff \exists_{A \in P}\, (x \in A \wedge y \in A).$$

Donc il existe une correspondence bijective entre l'ensemble des partitions de X et l'ensemble des relations d'équivalence sur X.

Preuve. Soit $\equiv$ une relation d'équivalence sur X. Puisque $x \equiv x$ pour tout $x \in X$, on a $x \in \bar{x}$. Donc $\cup\{\bar{x} \mid x \in X\} = X$. Maintenant, on prouve que pour tous choix de $x, y \in X$, soit $\bar{x} = \bar{y}$ ou $\bar{x} \cap \bar{y} = \varnothing$. On montre que si $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \varnothing$, alors $\bar{x} = \bar{y}$. Puisque $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \varnothing$, on peut choisir $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Donc $z \equiv x$ et $z \equiv y$. Soit $t \in \bar{x}$. Alors $t \equiv x$. Puisque $\equiv$ est symétrique, on a

$$t \equiv x$$
$$x \equiv z$$
$$z \equiv y$$

Par transitivité, on obtient $t \equiv y$, c.-à.-d. $t \in \bar{y}$. On a montré que chaque élément t de $\bar{x}$ est un élément de $\bar{y}$ et donc $\bar{x} \subseteq \bar{y}$. Par le même argument, on voit que $\bar{y} \subseteq \bar{x}$. Donc $\bar{x} = \bar{y}$. Par conséquent, $\{\bar{x} \mid x \in X\}$ est une partition de X.

Inversement, soit P une partition de X. On définit une relation $\equiv$ par :

$$x \equiv y \iff \exists_{A \in P}\, (x \in A \wedge y \in A).$$

On peut montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence (exercice). $\square$

Exemple 4.2.7. Soit $\equiv_5$ la relation sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$x \equiv_5 y \iff (x-y) \text{ est divisible par 5.}$$

Alors $\equiv$ est une relation d'équivalence. La partition correspondante est

$$\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

où

$$A_i = \{5n+i \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad i = 0,1,2,3,4,$$

est l'ensemble des entiers dont le reste sur la division par 5 est i.

Définition 4.2.8. Soit $\equiv$ une relation d'équivalence sur un ensemble X. L'ensemble

$$X/\equiv\, := \{\bar{x} \mid x \in X\}$$

est l'*ensemble quotient*. Les éléments de $X/\equiv$ sont des sous-ensembles de X est deux éléments distincts de $X/\equiv$ sont des sous-ensembles disjoint de X.

Exemples 4.2.9.

(a) L'égalité est une relation d'équivalence sur un ensemble X. Alors l'ensemble quotient est $\{\{x\} \mid x \in X\}$ est il est en correspondence bijective avec X.

(b) Soit X un ensemble est on définit une relation d'équivalence par $x \equiv y$ pour tous choix de $x, y \in X$. Alors $(X/\equiv) = \{X\}$ a seulement un élément.

(c) Sur $\mathbb{R}$, on a la relation d'équivalence définie par

$$x \equiv y \iff x^2 = y^2.$$

Pour tout $x \in X$, $\bar{x} = \{x, -x\}$. Il y a une bijection entre $\mathbb{R}/\equiv$ est $\mathbb{R}^{\geq 0}$ définie par $\bar{r} \mapsto |r|$.

(d) Soit $n > 0$ un nombre naturel. Sur $\mathbb{Z}$, on définit une relation d'équivalence $\equiv_n$ par

$$x \equiv_n y \iff n \text{ divise } x - y.$$

Alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\bar{i} = n\mathbb{Z} + i = n\mathbb{Z} + j$ où $j = 0, 1, \ldots, n-1$ est le reste quand on divise i par n. Donc

$$\mathbb{Z}/\equiv_n\, = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

et $|\,\mathbb{Z}/\equiv_n\,| = n$.

(e) Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation d'équivalence $\equiv$ par

$$x \equiv y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Alors pour chaque $r \in \mathbb{R}$, $\bar{r} = r + \mathbb{Z} = s + \mathbb{Z}$ pour un unique $s \in [0,1)$. Donc $\mathbb{R}/\equiv$ est en correspondence bijective avec l'intervalle $[0,1)$.

(f) Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation d'équivalence $\equiv$ par

$$x \equiv y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Alors pour chaque $r \in \mathbb{R}$, $\bar{r} = r + \mathbb{Q}$. Dans ce cas, on ne peut pas trouver en ensemble bien connu qui est en correspondence bijective avec $\mathbb{R}/\equiv$ (mais il existe un tel ensemble – on va le voir plus tard).

(g) Soient X et Y deux ensembles et $a \in X$. On peut définir la relation d'équivalence $\equiv_a$ sur $\mathrm{Fonc}(X, Y)$ par

$$f \equiv_a g \iff f(a) = g(a).$$

Pour $f \in \mathrm{Fonc}(X, Y)$,

$$\bar{f} = \{g \in \mathrm{Fonc}(X, Y) \mid f(a) = g(a)\}.$$

Il y a une bijection entre $\mathrm{Fonc}(X, Y)/\equiv$ est Y définie par $\bar{f} \mapsto f(a)$. Il existe aussi une bijection entre $\mathrm{Fonc}(X, Y)/\equiv$ et l'ensemble des fonctions constantes de X sur Y.

(h) Sur $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, on peut définir une relation d'équivalence $\equiv$ par

$$(x, y, z) \equiv (x_1, y_1, z_1) \iff 2(x - x_1) + 3(y - y_1) - (z - z_1) = 0.$$

Alors

$$\overline{(x, y, z)} = \{(x_1, y_1, z_1) \mid 2x + 3y - z = 2x_1 + 3y_1 - z_1\}.$$

Il y a une correspondence bijective entre $\mathbb{R}^3/\equiv$ et $\mathbb{R}^2$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ (il existe des autres aussi).

(i) Sur $\mathbb{C}$, on a la relation d'équivalence définie par

$$x \equiv y \iff |x| = |y|.$$

Alors $\bar{x} = \{y \in \mathbb{C} \mid |x| = |y|\}$ et il y a une correspondence bijective entre $\mathbb{C}/\equiv$ et $\mathbb{R}^{\geq 0}$ donné par $\bar{x} \mapsto |x|$. La classe d'équivalence $|x|$ et le cercle de centre 0 et rayon $|x|$.

Surjection canonique. Si $\equiv$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble X, alors la fonction de X dans $X/\equiv$ définie par $x \mapsto \bar{x}$ est appelée la *surjection canonique* de X dans $X/\equiv$. Souvent, on note la surjection canonique par π. Donc, pour tout $x \in Z$, $\pi(x) = \bar{x} = \{y \in X \mid x \equiv y\} \in X/\equiv$.

Fonction induite. Soit X un ensemble et $\equiv$ une relation d'équivalence sur X. Soit Y un ensemble et soit $f : X \to Y$ une fonction tel que pour tous choix de $x, y \in X$, , si $x \equiv y$, alors $f(x) = f(y)$. Alors la fonction $f : X \to Y$ induit une fonction $\tilde{f} : X/\equiv \to Y$ définie par $\tilde{f}(\bar{x}) = f(x)$.

Exemple 4.2.10. Soit $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ et $f : X \to Y$ une fonction définie par $f((x, y)) = 2x$. Soit $\equiv$ la relation d'équivalence sur X définie par

$$(x, y) \equiv (x', y') \iff x = x'.$$

Alors

$$(x, y) \equiv (x', y') \implies x = x' \implies f((x, y)) = 2x = 2x' = f((x', y'))$$

est donc f induit une fonction $\tilde{f} : X/\equiv \to Y$ définie par $f\big(\overline{(x, y)}\big) = 2x$. Remarquez que les éléments de $X/\equiv$ sont les lignes verticales dans $\mathbb{R}^2$ (c.-à.-d. les lignes parallèles à l'axe y).

Exercices 4.2.11.

(a) Soit $X = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Montrez que

$$x \equiv y \iff \exists_{r \in X \setminus \{0\}} \, x = ry$$

définit une relation d'équivalence sur X. Combien de classes d'équivalence y a-t-il ?

(b) Soit X un ensemble.

(i) Pour $i \in I$ (où I est un ensemble d'indices), soit R_i une relation d'équivalence sur X. Donc $R_i \subseteq X \times X$ pour chaque $i \in I$. Montrez que $\bigcap_{i \in I} R_i$ est une relation d'équivalence.

(ii) Concluez que pour toute relation R sur X, il existe une plus petite relation S d'équivalence qui contient R (c.-à.-d. S est un relation d'équivalence qui contient R et qui est contenue dans toute relation d'équivalence qui contient R). Cette relation d'équivalence est appelée la relation d'équivalence *engendrée* par R. *Indice :* Considérez l'intersection de toutes les relations d'équivalence qui contiennent R.

(iii) Soit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2n + 1 \le x^2 + y^2 \le 2n + 2\}$. On définit R sur X par : Pour tous choix de $A, B \in X$, $A \, R \, B$ si et seulement si le segment de ligne AB est dans X. Montrez que cela n'est pas une relation d'équivalence. Trouvez la relation d'équivalence engendrée par cette relation. Trouvez son ensemble des classes d'équivalence.

(c) Soit X l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Définissez la relation suivante sur X : $f \equiv g$ si et seulement s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Montrez que c'est une relation d'équivalence. Montrez que les fonctions données par deux polynômes distincts ne sont pas équivalents.

(d) Soit X un ensemble. Pour deux ensembles A et B de X, définissez

$$A \equiv B \iff \text{il existe un bijection } f : A \to B.$$

Montrez que c'est une relation d'équivalence sur $\wp(X)$.

(e) Soit X un ensemble. Pour deux sous-ensembles A et B de X définissez

$$A \equiv B \iff A \Delta B \text{ est fini.}$$

(i) Montrez que c'est une relation d'équivalence sur $\wp(X)$.

(ii) Montrez que $\wp(X)/\equiv$ a seulement un élément si X est fini.

(iii) Réciproquement, montrez que si $\wp(X)/\equiv$ a seulement un élément, alors X est fini.

(iv) Montrez que $\wp(\mathbb{N})/\equiv$ est infini.

Supposons que $A, B, A_1, B_1 \subseteq X$ tel que $A \equiv A_1$ et $B \equiv B_1$. Montrez que :

(v) $A \cap B \equiv A_1 \cap B_1$.

(vi) $A \cup B \equiv A_1 \cup B_1$.

(vii) $A^c \equiv A_1^c$.

(viii) $A \setminus B \equiv A_1 \setminus B_1$.

(ix) $A \Delta B \equiv A_1 \Delta B_1$.

4.3. Les ordres partiels

DÉFINITION 4.3.1. Soit X un ensemble.

(a) Un *ordre partiel* sur X est une relation binaire "$\leq$" qui satisfait
   (i) **(réflexivité)** $\forall_{x \in X}\,(x \leq x)$,
   (ii) **(transitivité)** $\forall_{x,y,z \in X}\,[(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z]$,
   (iii) **(antisymétrie)** $\forall_{x,y \in X}\,[(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y]$.

   On utilise les symboles $\leq, \preceq, \subseteq, \trianglelefteq$ pour les ordres partiels.

(b) Un *ordre partiel strict* sur X est une relation binaire "$<$" sur X qui satisfait
   (i) **(transitivité)** $\forall_{x,y,z \in X}\,[(x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z]$,
   (ii) $\nexists_{x,y \in X}\,(x < y \wedge y < x)$.

   On utilise les symboles $<, \prec, \subset, \triangleleft$ pour les ordres partiels stricts.

Un *ensemble (partiellement) ordonné* est une paire $(X, \leq)$ où X est un ensemble et $\leq$ est un ordre partiel sur X.

LEMME 4.3.2. *Soit X un ensemble. Une relation $<$ sur X est un ordre partiel strict si et seulement si elle est irréflexive et transitive.*

Preuve. Soit $<$ un ordre partiel strict sur X. Alors $<$ est transitive par définition. Supposons que $<$ n'est pas irréflexive. Alors il existe $x \in X$ tel que $x < x$. Mais cela contredit la deuxième propriété dans la définition d'un ordre partiel strict (avec $x = y$). Donc $<$ doit être irréflexive.

Supposons que $<$ est une relation irréflexive et transitive sur X. Pour montrer que $<$ est un ordre partiel strict, on doit seulement montrer que $<$ satisfait la deuxième propriété dans la définition. Supposons qu'il existe $x, y \in X$ tel que $x < y$ et $y < x$. Par transitivité, on a $x < x$ qui est une contradiction parce que $<$ est irréflexive. $\square$

EXEMPLES 4.3.3.

(a) La relation $<$ ("inférieur à") est un ordre partiel strict sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

(b) La relation $\leq$ ("inférieur ou égal à") est un ordre partiel sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

(c) Soit X un ensemble. L'inclusion $\subseteq$ est un ordre partiel sur $\wp(X)$ et $\subsetneq$ est un ordre partiel strict sur $\wp(X)$.

(d) Sur $\mathbb{Z}$ définissons
$$x \prec y \iff y < x.$$
Alors $\prec$ est un ordre partiel strict. En général, l'inverse d'un ordre partiel (strict) est un ordre partiel (strict).

(e) Sur $\mathbb{R}$, la relation
$$x \prec y \iff |x| < |y|$$
est un ordre partiel strict.

(f) Sur $\mathbb{N}^+$, la relation

$$x \preceq y \iff x \text{ divise } y \iff \exists_{z\in\mathbb{Z}}\,(y = xz)$$

est un ordre partiel. Remarquez que ce n'est pas un ordre partiel sur $\mathbb{Z}$ (parce que, par exemple, on a $-2 \preceq 2$ et $2 \preceq -2$).

Rappelons-nous que les relations sur X sont des sous-ensembles de $X \times X$. Donc, une relation R peut contient une autre relation S. Puisque les ordres sont des relations, un ordre peut contient un autre. Remarquez que l'égalité est contenu dans tout ordre partiel (à cause de réflexivité). Donc, l'égalité est le "plus petit" ordre partiel sur un ensemble. Remarquez aussi que la relation vide et un ordre partiel strict sur tout ensemble X (exercice). Donc, la relation vide est le "plus petit" ordre partiel strict.

Lemme 4.3.4.

(a) *Si $\leq$ est un ordre partiel sur X et si on définit $<$ par*

$$x < y \iff x \leq y \textit{ et } x \neq y,$$

alors $<$ est un ordre partiel strict sur X.

(b) *Réciproquement, si $<$ est un ordre partiel strict sur X et si on définit $\leq$ par*

$$x \leq y \iff x < y \textit{ ou } x = y,$$

alors $\leq$ est un ordre partiel sur X.

Preuve.

(a) Supposons que $\leq$ est un ordre partiel sur X et définissons $<$ comme ci-dessus. On doit montrer que $<$ est transitive et irréflexive.

(i) *Transitive.* Soient $x, y, z \in X$ tels que $x < y$ et $y < z$. Par définition, on a $x \leq y$ et $y \leq z$. Puisque $\leq$ est transitive, $x \leq z$. Supposons que $x = z$. Alors, par la réflexivité de $\leq$, $z \leq x$. Donc, par la transitivité de $\leq$ (et le fait que $x \leq y$), $z \leq y$. Donc on a $y \leq z$ et $z \leq y$. Par l'antisymétrie de $\leq$, on a $z = y$ qui contredit le fait que $y < z$. Donc $x \neq z$ et puis $x < z$.

(ii) *Irréflexive.* La relation $<$ est irréflexive par définition : pout tout $x \in X$, $x \not< x$ parce que $x = x$.

(b) Supposons que $<$ est un ordre partiel strict sur X et définissons $\leq$ comme ci-dessus. On doit montrer que $\leq$ est réflexive, transitive, et antisymétrique.

(i) *Réflexive.* La relation $\leq$ est réflexive par définition : $x \leq x$ parce que $x = x$.

(ii) *Transitive.* Soient $x, y, z \in X$ tels que $x \leq y$ et $y \leq z$. Il y a quatre cas :

(i) $x = y$ et $y = z$. Alors $x = z$ et donc $x \leq z$.

(ii) $x = y$ et $y < z$. Alors $x < z$ et donc $x \leq z$.

(iii) $x < y$ et $y = z$. Alors $x < z$ et donc $x \leq z$.

(iv) $x < y$ et $y < z$. Alors $x < z$ par la transitivité de $<$ et donc $x \leq z$.

(iii) *Antisymétrique.* On prouve que $\leq$ est antisymétrique par contradiction. Soient $x, y \in X$ tels que $x \leq y$, $y \leq x$ et $x \neq y$. Donc $x < y$ et $y < x$. Mais cela contredit la deuxième propriété dans la définition d'un ordre partiel strict.

$\square$

Lemme 4.3.4 nous montre qu'il y a une relation entre les ordres partiels et les ordres partiels stricts. On peut changer entre les deux lorsqu'on veut.

DÉFINITION 4.3.5. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné.

(a) Un *élément maximum* de $(X, \leq)$ est un $x_0 \in X$ satisfaisant $\forall_{x \in X}\, (x \leq x_0)$.

(b) Un *élément maximal* de $(X, \leq)$ est un $x_0 \in X$ satisfaisant $\nexists_{x \in X}\, (x_0 < x)$.

(c) Un *élément minimum* de $(X, \leq)$ est un $x_0 \in X$ satisfaisant $\forall_{x \in X}\, (x_0 \leq x)$.

(d) Un *élément minimal* de $(X, \leq)$ est un $x_0 \in X$ satisfaisant $\nexists_{x \in X}\, (x < x_0)$.

EXEMPLE 4.3.6. Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et soit $X_1 = \wp(A)$. Alors $\subseteq$ est un ordre partiel sur X_1, donc $(X_1, \subseteq)$ est un ensemble partiellement ordonné. L'élément A de X_1 est élément maximum (et maximal) de $(X_1, \subseteq)$. Soit aussi

$$X_2 = X_1 \setminus \{A\} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Alors $\subseteq$ est un ordre partiel sur X_2, donc $(X_2, \subseteq)$ est un ensemble partiellement ordonné. On voit que $(X_2, \subseteq)$ n'a aucun élément maximum. Cependant, $(X_2, \subseteq)$ possède trois éléments maximaux : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$.

EXEMPLE 4.3.7. Soit $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors

$$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \iff x_1 < x_2$$

définit un ordre partiel strict sur X. Donc

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff [x_1 < x_2 \;\vee\; (x_1, y_1) = (x_2, y_2)]$$

définit un ordre partiel sur X. On voit que X n'a pas d'élément maximum, maximal, minimum ou minimal. Soit

$$Y = \{(-1, 5), (0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 3), (2, -3), (2, 0), (2, 4)\} \subseteq X.$$

Alors $\preceq$ induit un ordre sur Y. L'élément $(-1, 5)$ est un élément minimum et minimal. L'ensemble Y n'a aucun élément maximum mais il a trois éléments maximaux : $(2, -3)$, $(2, 0)$ et $(2, 4)$.

Important : On a vu qu'un ensemble partiellement ordonné peut avoir plusieurs éléments maximaux (ou minimaux), ou en avoir un seul, on n'en avoir aucun.

LEMME 4.3.8. *Si un ensemble partiellement ordonné possède un élément maximum (resp. minimum), alors cet élément est unique, est maximal (resp. minimal), et est en fait le seul élément maximal (resp. minimal).*

Preuve. On prouve seulement le lemme pour les éléments maximum/maximal. Le résultat pour les élément minimum/minimal est analogue. Supposons que $(X, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et x_0 est un élément maximum. On prouve premièrement que x_0 est l'unique élément maximum. Supposons que x_0' est maximum. Alors $x_0 \leq x_0'$ (parce que x_0' est maximum) et $x_0 \leq x_0'$ (parce que x_0 est maximum). Alors, par l'antisymétrie de $\leq$, on a $x_0 = x_0'$. Donc x_0 est l'unique élément maximum.

Maintenant on prouve que x_0 est maximal. Puisque x_0 est maximum, pour chaque élément $x \in X$, on a $x \leq x_0$. Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $x_0 < x$. Alors $x_0 \leq x$ et donc, par l'antisymétrie de $\leq$, on a $x = x_0$. Mais cela contredit le fait que $x_0 \neq x$ (parce que $x_0 < x$. Donc x_0 est maximal.

Finalement, on prouve que x_0 est l'unique élément maximal. Supposons que $y \in X$ tel que $y \neq x_0$. Puisque x_0 est maximum, on a $y \leq x_0$ et donc $y < x_0$ parce que $y \neq x_0$. Par conséquent, y n'est pas maximal. Donc x_0 est l'unique élément maximal. □

En particulier remarquez qu'un élément maximum est nécessairement maximal, mas que la réciproque n'est pas vraie.

Définition 4.3.9. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Deux éléments $x, y \in X$ sont *comparable* s'ils satisfont $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exemple 4.3.10. Considérez $(X_2, \subseteq)$ comme dans Exemple 4.3.6, et soient $x = \{1, 2\}$, $y = \{1, 3\}$ et $z = \{1\}$. Alors $x \nsubseteq y$ et $y \nsubseteq x$, donc les éléments x et y de X_2 ne sont pas comparables. Cependant $z \subseteq x$ et donc x et z sont comparables.

Notation. Si $(X, \leq)$ est un ordre partiel, et $x, y \in X$, $x \geq y$ signifie $y \leq x$ et $x > y$ signifie $y < x$.

Définition 4.3.11. Un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ qui satisfait

$$\forall_{x,y \in X} \, (x \leq y \ \vee \ x \geq y)$$

est appelé *totalement ordonné* ou *linéairement ordonné* est $\leq$ est appelé un *ordre total.*

Exemple 4.3.12. $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné. (*Remarque :* Ici nous trichons. Nous n'avons défini ni $\mathbb{R}$ ni sa relation d'ordre, donc nous ne devrions pas en parler. Nous allons continuer à tricher, parce que cela nous permet de donner des exemples intéressants.)

Exercice 4.3.13. Supposons que x_0 est un élément maximal de l'ensemble totalement ordonné $(X, \leq)$. Montrez que x_0 est élément maximum de $(X, \leq)$.

Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et soit $A \subseteq X$. Alors la restriction de $\leq$ à A (c.-à.d. $\leq \cap (A \times A)$) est un ordre partiel sur A, donc $(A, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné. Il se peut que $(A, \leq)$ ait un élément minimum, comme il se peut qu'il n'en ait pas. Remarquez qu'un élément minimum de $(A, \leq)$, s'il existe, est un x_0 qui satisfait

$$x_0 \in A \quad \text{et} \quad \forall_{x \in A} \, (x_0 \leq x).$$

S'il existe un x_0 qui satisfait ces propriétés, on écrit $x_0 = \min(A)$.

Définition 4.3.14. Si $(X, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné qui satisfait

tout sous-ensemble non vide de X possède un élément minimum,

on dit que $(X, \leq)$ est *bien ordonné* et on dit que $\leq$ est un *bon ordre*.

Exemples 4.3.15.

(a) Soit $X = \{0, 1, 2\}$ et soit $\leq$ la relation “inférieur ou égal à”. Alors $(X, \leq)$ est bien ordonné parce que tout sous-ensemble non vide de X possède un élément minimum comme on peut voir dans la table suivante.

Sous-ensemble	Minimum
{0}	0
{1}	1
{2}	2
{0,1}	0
{0,2}	0
{1,2}	1
{1,2,3}	1

(b) On va voir que $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien ordonné.

(c) $(\mathbb{R}, \leq)$ n'est pas bien ordonné. Par exemple $(0, 1)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'a aucun élément minimum.

Proposition 4.3.16. *Tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné.*

Preuve. Soit $(X, \leq)$ un ensemble bien ordonné. On doit monter $\forall_{x,y \in X} (x \leq y \ \vee \ y \leq x)$. Soit $x, y \in X$. Alors $\{x, y\}$ est un sous-ensemble non vide de X. Puisque $(X, \leq)$ est bien ordonné, ce sous-ensemble a un élément minimum qui doit être x ou y. Si x est minium, alors $x \leq y$. Si y est minimum, alors $y \leq x$. $\square$

Remarquez qu'il existe des ensembles totalement ordonné qui ne sont pas bien ordonné (par exemple $(\mathbb{R}, \leq)$).

Définition 4.3.17. Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et $A \subseteq X$.

(a) $x \in X$ est un *minorant* de A si $\forall_{a \in A}\, x \leq a$.

(b) $x \in X$ est un *majorant* de A si $\forall_{a \in A}\, a \leq x$.

Si A possède un majorant (resp. minorant), alors on dit que A est une *partie majorée* (resp. *partie minorée*). Remarquez que un minorant/majorant de $A \subseteq X$ n'est pas nécessairement un élément de A.

(c) x est un *infimum* (ou *plus grande limite inférieure*) de A si

- x est un minorant de A : $\forall_{a \in A}\, x \leq a$, et

- x est plus grand que ou égal à tous les minorants de A : $\forall_{y \in X} [(\forall_{a \in A}\, y \leq a) \Rightarrow (y \leq x)]$.

On écrit $x = \inf A$.

(d) x est un *supremum* (ou *plus petite limite supérieure*) de A si
- x est un majorant de A : $\forall_{a \in A}\, a \leq x$, et
- x est plus petit que ou égal à tous les majorants de A : $\forall_{y \in X} [(\forall_{a \in A}\, a \leq y) \Rightarrow (x \leq y)]$.

On écrit $x = \sup A$.

Exemples 4.3.18.

(a) $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et $A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Chaque $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq 0$ est un minorant de A. Donc $x = 0$ est l'infimum de A. Chaque $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 1$ est un minorant de A. Donc $x = 1$ est le supremum de A.

(b) Soit $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, l'infimum de A est 0 est le supremum est 1. Comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}_{>0}$, le supremeum de A est 1 est A n'a pas d'infimum.

(c) Comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'a ni un infimum ni un supremum.

Exercices 4.3.19.

(a) Soient $(X, \leq)$ et $(Y, \leq)$ deux ensembles partiellement ordonnés. On définit une relation $\preceq$ sur l'ensemble $X \times Y$ par la condition suivante : étant donnés $(x,y), (x',y') \in X \times Y$,

$$(x,y) \preceq (x',y') \iff [x < x' \ \vee \ (x = x' \ \wedge \ y \leq y')].$$

(i) Montrez que $\preceq$ est un ordre partiel sur $X \times Y$. (On l'appelle *l'ordre lexicographique.*)

(ii) Montrez que si $(X, \leq)$ et $(Y, \leq)$ sont totalement ordonnés, alors $(X \times Y, \preceq)$ est totalement ordonné.

(iii) Montrez que si $(X, \leq)$ et $(Y, \leq)$ son bien ordonnés, alors $(X \times Y, \preceq)$ est bien ordonné.

(b) Soit $<$ un ordre partiel strict sur un ensemble Y. Soit $f : X \to Y$ une fonction. Montrez que la relation $<$ sur X défini par

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

est un ordre partiel strict sur X.

(c) Soit $<$ un ordre partiel strict sur un ensemble Y. Soient X un ensemble et $A \subseteq X$. Montrez que

$$f < g \iff \forall_{a \in A} [f(a) < g(a)]$$

définit un ordre partiel strict sur $\mathrm{Fonc}(X, Y)$.

(d) Trouvez le supremum et infimum (s'ils existent) des ensemble suivants :

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 < 0\}$,

(ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 > 0\}$,

(iii) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$,

(iv) $\{\frac{1}{1-x} \mid x \in \mathbb{R},\ x > 1\}$,

(v) $\{\frac{1}{1-x} \mid x \in \mathbb{R},\ x < 1\}$.

(e) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si chaque partie non vide de A possède un élément minimum (relativement à la relation d'ordre $\leq$ de $\mathbb{R}$), alors on dit que A est une *partie bien ordonnée* de $\mathbb{R}$. On définit

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{A \in \wp(\mathbb{R}) \mid A \text{ est une partie bien ordonnée de } \mathbb{R}\}.$$

Remarquez que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \wp(\mathbb{R})$. Par exemple on a $\mathbb{N} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, mais $\mathbb{R} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(i) Montrez que si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $A \cup B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(ii) Supposons que $\{A_i\}_{i\in I}$ est une famille de parties bien ordonnées de $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall_{i\in I}\, A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. S'ensuit-il nécessairement que $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$? Si oui, donnez une preuve ; si non, donnez un contre-example.

(iii) Montrez qui si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors toute partie de A est élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

CHAPITRE 5

Induction

5.1. L'induction transfinie

Si $(X, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et $a \in X$, on définit

$$(-\infty, a) = \{x \in X \mid x < a\}.$$

THÉORÈME 5.1.1. *Soit $(X, \leq)$ un ensemble bien ordonné. Supposons que S est une partie de X ($S \subseteq X$) qui satisfait*

$$\forall_{a \in X} \, [(-\infty, a) \subseteq S \implies a \in S]. \tag{2}$$

Alors $S = X$.

Preuve. Supposons que S satisfait (2) et montrons que $S = X$. Par contradiction, supposons que $S \neq X$. Alors $X \setminus S$ est une partie non vide de X, donc possède un élément minimum : il existe $a \in X \setminus S$ tel que $\forall_{x \in X \setminus S} \, (a \leq x)$. On a alors $(-\infty, a) \subseteq S$. Puisque S satisfait (2), il s'ensuit que $a \in S$, ce qui contredit $a \in X \setminus S$. $\square$

Le théorème ci-dessus est appelé le **principe d'induction transfinie**. C'est un principe d'induction valide dans n'importe quel ensemble bien ordonné. On peut le reformuler de la manière suivante :

COROLLAIRE 5.1.2. *Soit $(X, \leq)$ un ensemble bien ordonné et soit $P(x)$ une condition sur x. Supposons que pour chaque $a \in X$, l'implication suivante est vraie :*

$$\textit{Si } P(x) \textit{ est vrai pour tout } x \in (-\infty, a), \textit{ alors } P(a) \textit{ est vrai.} \tag{3}$$

Alors $\forall_{x \in X} \, P(x)$.

Preuve. Supposons que (3) est vraie pour chaque $a \in X$. Alors l'ensemble

$$S = \{x \in X \mid P(x)\}$$

est une partie de X qui satisfait (2), donc le Théorème 5.1.1 implique que $S = X$, donc $\forall_{x \in X} \, P(x)$. $\square$

REMARQUE. Supposons que $(X, \leq)$ est un ensemble bien ordonné et que $X \neq \varnothing$. Remarquez que X possède un élément minimum ; soit $a_0 = \min(X)$. Si vous voulez utiliser Corollaire 5.1.2 pour démontrer que $\forall_{x \in X} \, P(x)$, vous devez vérifier que chaque $a \in X$ satisfait (3), donc en particulier vous devez montrer que a_0 satisfait (3), ce qui revient à montrer que $P(a_0)$ est vrai (en effet, a_0 satisfait (3) $\iff$ $P(a_0)$ est vrai, montrez ceci en exercice). Autrement dit, la vérification que chaque $a \in X$ satisfait (3) peut se diviser en deux parties :

(a) montrer que $P(a_0)$ est vrai,

(b) montrer que chaque $a \in X \setminus \{a_0\}$ satisfait (3).

5.2. Induction

Puisque $\mathbb{N}$ est un ensemble bien ordonné, on peut appliquer le principe d'induction transfinie avec $X = \mathbb{N}$ dans Théorème 5.1.1. Si on veut démontrer la proposition

$$\phi(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

on peut faire ce qui suit :

(a) On montre que $\phi(n)$ est vraie pour $n = 0$ (c.-à.-d. on montre $\phi(0)$).

(b) On montre $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ (*induction simple*).

ou

On montre $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[(\forall_{k\leq n}\,P(k)) \Rightarrow P(n+1)]$ (*induction forte*).

Exemple 5.2.1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit $\phi(n)$ la proposition

$$\text{“ } 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}. \text{ ”}$$

(a) $\phi(0)$ **est vraie.** Puisque la somme des nombre naturels de 0 à 0 est $0 = 0(0+1)/2$, on voit que $\phi(0)$ est vraie.

(b) **Si** $\phi(n)$ **est vraie, alors** $\phi(n+1)$ **est vraie.** Supposons que $\phi(n)$ est vraie. Donc

$$0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Par conséquent,

$$0 + 1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $\phi(x)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{N}$.

Exemple 5.2.2. Montrons que tout nombre naturel plus grand que 1 est un produit de nombres premiers. Donc on veut montrer que

$$P(n) = \text{“}n \text{ est un produit de nombres premiers”}$$

est vraie pour tout entier $n > 1$.

On sait que 2 est un nombre premier (et donc un produit de nombres premiers). Donc $P(2)$ est vraie. Supposons que $P(k)$ est vraie pout tout k tel que $1 \leq k < n$. C'est-à-dire, chaque nombre naturel plus grand que 1 est plus petit que n est un produit de nombres premiers. On veut montrer que n est un produit de nombres premiers. Si n est premier, on a finit. Sinon, $n = ab$ pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a, b > 1$ (par la définition d'un nombre premier). Il s'ensuit que $a, b < n$. Par supposition, a et b sont produits de nombres premiers. Par conséquent, $n = ab$ est un produit de nombres premiers. On a montré que

$$[\forall_{1 \leq k < n} P(k)] \implies P(n)$$

et donc on a montrer $\forall_{n>1} P(n)$ par l'induction forte.

Remarquez que dans Exemple 5.2.2 on a utilisé vraiment l'induction avec l'ensemble $\mathbb{N}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ qui est bien ordonné.

Exercices 5.2.3.

(a) Montrez que pour tout nombre naturel n et pour tout nombre réel $x \in [0, 1]$,

$$(1 - x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

(b) Montrez que $n! > 2^n$ pour tous n suffisamment grands.

(c) Montrez que $(x - 1)^n \geq x^n - nx^{n-1}$ pour tous choix de $n \in \mathbb{N}$ et $x > 1$.

(d) Montrez que si $0 < x < 1$ et $n > 0$ est un nombre naturel, alors $(1 - x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$.

(e) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $1^3 + 2^3 + \ldots n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

(f) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$.

(g) On définit la *suite de Finonacci* par $F_1 = F_2 = 1$ et

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pour} \quad n \geq 3.$$

Soient

$$\phi_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \phi_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Montrez que

$$F_n = \frac{(\phi_+)^n - (\phi_-)^n}{\phi_+ - \phi_-} = \frac{(\phi_+)^n - (\phi_-)^n}{\sqrt{5}}.$$

CHAPITRE 6

La théorie axiomatique des ensembles

Ce chapitre est basé sur les notes "La théorie ZFC des ensembles" de Daniel Daigle. On va seulement parler brièvement de la théorie axiomatique des ensembles. Si vous voulez voir plus, consultez les notes "La théorie ZFC des ensembles" (disponible sur le site internet).

6.1. La théorie des ensembles de Cantor

George Cantor (1845–1918) est considéré comme l'inventeur de la théorie des ensembles. La théorie de Cantor reposait sur deux principes, que nous avons accepté.

I. Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

II. Étant donnée une condition P, il existe un et un seul ensemble dont les éléments sont précisément tous les objets qui satisfont P.

6.2. Paradoxe de Russell

En 1901, Bertrand Russell a trouvé le paradoxe suivant :

Paradoxe de Russell. Soit P la propriété

$$P(X) = \text{“}X \text{ est un ensemble et } X \notin X\text{”}$$

D'après le principe II ci-dessus, l'ensemble

$$R = \{X \mid P(X)\} = \{X \mid X \text{ est un ensemble et } X \notin X\}$$

existe. R est l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-même. Il y a alors deux possibilités : soit $R \in R$, soit $R \notin R$.

Si $R \in R$ alors R satisfait P (car chaque élément de R satisfait cette condition par définition). Donc R est un ensemble qui n'est pas élément de lui-même, donc $R \notin R$, donc

$$R \in R \quad \text{et} \quad R \notin R.$$

Si $R \notin R$ alors R est un ensemble qui n'est pas élément de lui-même, autrement dit R satisfait P. Mais alors $R \in R$ car tout objet qui satisfait la condition P est élément de R. Donc on arrive à la même conclusion :

$$R \in R \quad \text{et} \quad R \notin R.$$

Donc, dans un cas comme dans l'autre, R satisfait $R \in R$ et $R \notin R$.

En résumé, le principe ci-dessus implique qu'il existe un ensemble R qui satisfait les deux condition $R \in R$ et $R \notin R$, ce qui est impossible (la loi de contradiction dans la logique propositionnelle).

D'autres paradoxes ont été découverts, dont au moins un par Cantor lui-même. Au tournant de siècle, il était devenu clair que la théorie des ensembles se contredisait elle-même et qu'il était nécessaire de la reconstruire sur des bases logiques plus solides. Cette période est connue sous le nom de la crise des fondements (parce que toutes les mathématiques s'appuient sur la théorie des ensembles).

6.3. Introduction à la théorie ZFC

On a vu que les principes I et II de Cantor donnent lieu à une théorie des ensembles qui se contredit elle-même. Pour résoudre cette difficulté, Zermelo proposa en 1908 une liste d'axiomes destinée à remplacer les deux principes de Cantor ; en 1922 Fraenkel et Skolem apportèrent quelques améliorations aux axiomes de Zermelo et le système d'axiomes qui en résulta est connu sous le nom de la théorie "ZF" des ensembles (pour Zermelo-Fraenkel). Plus tard on ajouta un axiome supplémentaire à la liste : l'axiome du choix. "ZFC" désigne le système d'axiomes ZF auquel on a ajouté l'axiome du choix. C'est le système qui est utilisé aujourd'hui, donc toutes les mathématiques s'appuient sur ZFC.

Dans notre système on a deux choses :

- des objets
- une relation $\in$ entre ces objets.

Ces objets et cette relation forment ce que on appellera *l'univers*. Pour l'instant, la seule chose qu'on sait à propos de cet univers c'est que si x et y sont des objets quelconques alors on a soit $x \in y$, soit $\neg(x \in y)$ par la loi de tier exclu. On écrit "$x \notin y$" comme abréviation de $\neg(x \in y)$. Les axiomes de ZFC sont des conditions que les objets et la relation $\in$ doivent satisfaire. La théorie des ensembles est l'étude des univers qui satisfont **tous** les axiomes de ZFC.

Pour parler de l'univers il est commode d'utiliser des mots connus : les objets seront appelés des *ensembles*, et lorsque $x \in y$, on dira que *x est un élément de y*. Il vaut la peine d'insister : **tous** les objets de l'univers sont des ensembles, donc il n'existe rien d'autre que des ensembles et nous ne rencontrerons jamais une "chose" qui n'est pas un ensemble. En particulier tous les éléments d'un ensemble donné sont eux-mêmes des ensembles. Lorsqu'on écrit "$x \in y$", non seulement y est un ensemble mais x aussi. Une formule $\forall_x\,(\dots)$ doit toujours être interprétée de la manière suivante :

"tout objet x de l'univers satisfait la condition $(\dots)$"

et puisque "ensemble" est synonyme de "objet", la même formule peut aussi être traduite par

"tout ensemble x satisfait la condition $(\dots)$".

Similairement, $\exists_x\,(\dots)$ se traduit par "il existe au moins un objet x de l'univers qui satisfait la condition $(\dots)$", ou encore par "il existe au moins un ensemble x qui satisfait la condition $(\dots)$."

On a dit que "$\in$" était la seule relation entre les objets mais évidemment on a aussi la relation d'égalité : deux objects x et y peuvent être égaux, $x = y$, et comme d'habitude ceci signifie que x et y sont en fait le même objet (on n'a pas deux objets mais un seul, qu'on a nommé deux fois).

6.4. Les trois premiers axiomes de ZFC

Le premier axiome est exactement le principe I de Cantor :

ZFC Axiome 1 (Axiome d'extensionalité). Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

$$\forall_{x,y}\,[x = y \iff \forall_z\,(z \in x \iff z \in y)]$$

Exemple 6.4.1. Considérez un univers que a précisément trois objets distincts a, b_1, b_2 et tel que $\in$ est définie par :

$$a \in b_1, \quad a \in b_2, \quad a \notin a, \quad \forall_i\,(b_i \notin a), \quad \forall_{i,j}\,(b_i \notin b_j).$$

Alors $b_1 \notin b_2$ mais b_1, b_2 ont les mêmes éléments, donc cet univers ne satisfait pas l'Axiome 1.

Le deuxième axiome est une version affaiblie du principe II de Cantor :

ZFC Axiome 2 (Axiome de spécification). Étant donnés un ensemble A et une condition $P(x)$ sur x, il existe un ensemble B dont les éléments sont précisément les éléments x de A qui satisfont la condition $P(x)$.

Ainsi, étant donnés A et $P(x)$, l'axiome affirme l'existence d'un ensemble B qui satisfait

$$\forall_x\,(x \in B \iff [x \in A \ \wedge\ P(x)]).$$

Cet ensemble B est unique, en vertu de l'axiome d'extensionalité. On le désigne par la notation suivante :

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}.$$

La différence entre l'Axiome 2 et le principe II de Cantor est celle-ci : au lieu de former un ensemble avec *tous les objets x de l'univers* qui satisfont la condition $P(x)$, on se restreint maintenant aux éléments d'un ensemble A.

Exemple 6.4.2. L'axiome de spécification implique que si A est un ensemble alors l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin x\}$ existe, mais l'axiome ne permet pas d'affirmer que $\{x \mid x \notin x\}$ existe.

Exemple 6.4.3. Considérez un univers dans lequel il y a exactement trois objets, a, b, c, et tel que $\in$ est définie par

$$a \in c,\ b \in c,\ b \in b \quad \text{(et } x \notin y \text{ dans tous les cas qui ne sont pas nommés).}$$

- Remarquez que a n'a aucun élément, b a un seul élément, et c at deux éléments ; donc il n'existe pas deux objets différents qui ont les mêmes éléments, donc cet univers satisfait l'Axiome 1.
- Dans cet univers il n'existe aucun objet x qui satisfait : "$a \in x$ et a est le seul élément de x" ; autrement dit, le singleton $\{a\}$ n'existe pas.
- Cet univers ne satisfait pas l'Axiome 2. En effet, si cet axiome était satisfait alors l'ensemble $B = \{x \in c \mid x \notin x\}$ existerait, et en fait B serait le singleton $\{a\}$ (car il existe exactement un élément x de c que satisfait $x \notin x$, et cet élément est $x = a$). Puisque $\{a\}$ n'existe pas, l'Axiome 2 n'est pas satisfait.

Pour compléter la présentation de l'Axiome 2 il nous reste à préciser qu'est-ce qu'on entend par "une condition $P(x)$ sur x". Nous dirons que $P(x)$ est une condition sur x si $P(x)$ est une formule dont la seule variable libre est x. Par exemple, "$x \notin x$" est une formule dont la seule variable libre est x, donc est une condition sur x. Voici un exemple plus compliqué : l'expression

$$\exists_{y,z}\, (x \in y \ \wedge\ y \in z)$$

est une condition sur x (car c'est une formule dont la seule variable libre est x). On peut donc utiliser cette condition avec l'Axiome 2 pour définir des ensembles : l'axiome affirme que si A est un ensemble alors l'ensemble $\{x \in A \mid \exists_{y,z}\, (x \in y \ \wedge\ y \in z)\}$ existe.

Voici un autre exemple. La formule $x \notin y$ a deux variables libres x, y, mais si on remplace la variable y par un ensemble spécifique B on obtient une formule $x \notin B$ dont la seule variable libre est x. Donc $x \notin B$ est une condition sur x et peut donc être utilisée avec l'Axiome 2 pour définir des ensembles : si A est un ensemble alors l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$ existe. L'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$ est désigné par $A \setminus B$. Remarquez que

$$\forall_x\, [x \in A \setminus B \iff (x \in A \ \wedge\ x \notin B)].$$

Similairement, l'Axiome 2 implique que si A et B sont des ensembles alors l'ensemble $\{x \in A \mid x \in B\}$ existe et il est désigné par $A \cap B$. Il satisfait :

$$\forall_x\, [x \in A \cap B \iff (x \in A \ \wedge\ x \in B)].$$

Remarque. Les axiomes qu'on a vus jusqu'ici ne nous permettent **pas** d'affirmer que si A et B sont des ensembles alors l'ensemble $A \cup B$ existe. En effet, considérez un univers avec trois objets a_0, a_1, a_2 et tel que $a_i \in a_j \iff j = i + 1$. Cet univers satisfait les axiomes 1 et 2 (et aussi 3 ci-dessous), mais $a_1 \cup a_2$ n'existe pas.

Proposition 6.4.4. *Il n'existe pas d'ensemble A qui satisfait $\forall_x (x \in A)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un ensemble A tel que $\forall_x (x \in A)$. Puisque A est un ensemble et puisque $x \notin x$ est un condition sur x, l'axiome de spécification implique que l'ensemble $R = \{x \in A \mid x \notin x\}$ existe. R est l'ensemble de tous les ensembles qui ne contiennent pas eux-même. Mais on a deja vu que l'existence de cet ensemble est une contradiction. $\square$

L'univers vide (aucun objet) satisfait les axiomes 1 et 2. Donc pour s'assurer qu'il existe au moins un ensemble, nous avons besoin d'un nouvel axiome :

ZFC Axiome 3 (Axiome d'existence). Il existe au moins un ensemble.

$$\exists_x (x = x)$$

Proposition 6.4.5. *Il existe un et un seul ensemble qui n'a aucun élément. On l'appelle l'ensemble vide, et on le désigne par le symbole $\varnothing$.*

Preuve. En vertu de l'axiome d'existence, il existe au moins un ensemble ; disons que A est un ensemble. Alors l'axiome de spécification affirme que l'ensemble suivant existe :

$$B = \{t \in A \mid t \neq t\}.$$

Les éléments de B sont les éléments t de A qui satisfont $t \neq t$, donc B n'a aucun élément. Ceci montre qu'il existe *au moins un* ensemble qui n'a aucun élément. Si B, B' sont des ensembles qui n'ont aucun élément alors $B = B'$ en vertu de l'axiome d'extensionalité. Donc il existe *exactement un* ensemble qui n'a aucun élément. $\square$

Proposition 6.4.6. *Si A est un ensemble non vide alors il existe un et un seul ensemble V dont les éléments sont précisément tous les ensembles x qui satisfont :*

x est élément de chaque élément de A.

On écrit $V = \cap A$ ou $V = \bigcap_{X \in A} X$.

Preuve. Puisque $A = \varnothing$, on peut choisir E tel que $E \in A$. Puisque E est un ensemble et $\forall_a (a \in A \implies x \in a)$ est une condition sur x, l'axiome de spécification implique que

$$V = \{x \in E \mid \forall_a (a \in A \implies x \in a)\}$$

est un ensemble. Pour un ensemble x quelconque, on a :

$$\begin{aligned} x \in V &\iff x \in E \text{ et } \forall_a (a \in A \implies x \in a) \\ &\iff x \in E \text{ et } x \text{ est élément de chaque élément de } A \\ &\iff x \text{ est élément de chaque élément de } A. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble V a la propriété voulue. L'axiome d'extensionalité implique que V est unique. □

Exercices 6.4.7.

(a) Imaginez un univers avec un seul objet a, et tel que $a \in a$. Montrez que les axiomes 1 et 3 sont satisfaits mais pas 2.

(b) Considérez un univers avec un seul objet a, et tel que $a \notin a$ (autrement dit, le seul objet de l'univers est l'ensemble vide). Montrez que les trois axiomes 1, 2 et 3 sont satisfaits.

(c) Considérez un univers avec deux objets $a \neq b$, et tel que

$$a \in b, \quad a \notin a, \quad b \notin b, \quad b \notin a.$$

Montrez que les trois axiomes 1, 2 et 3 sont satisfaits.

6.5. Axiomes 4–6 de ZFC

ZFC Axiome 4 (Axiome de la paire). Étant donnés des ensembles x et y, il existe un ensemble z tel que $x \in z$ et $y \in z$.

$$\forall_{x,y} \exists_z (x \in z \ \wedge \ y \in z)$$

Proposition 6.5.1.

(a) *Si a est un ensemble alors l'ensemble $\{a\}$ existe.*

(b) *Si a et b sont des ensembles alors l'ensemble $\{a, b\}$ existe.*

Preuve. Prouvons d'abord l'assertion (b). Soient a et b des ensembles. En vertu de l'axiom de la paire, il existe un ensemble c' qui satisfait $a \in c'$ et $b \in c'$. Alors l'axiome de spécification affirme que l'ensemble suivant existe :

$$c = \{x \in c' \mid x = a \ \vee \ x = b\}.$$

Alors a et b sont éléments de c, et sont les seuls éléments de c. Donc $c = \{a, b\}$, donc l'ensemble $\{a, b\}$ existe et (b) est démontré. Pour démontrer (a) il suffit de remarquer que l'assertion (b) est aussi valide dans le cas où $a = b$. □

Exercice 6.5.2. Montrez que $\{\varnothing\} \neq \{\{\varnothing\}\}$ et que $\{\{\varnothing\}\} \neq \{\{\{\varnothing\}\}\}$.

ZFC Axiome 5 (Axiome de la réunion). Quel que soit l'ensemble A, il existe au moins un ensemble W qui satisfait : tout élément d'un élément de A est élément de W.

$$\forall_A \exists_W \forall_x (\exists_a (a \in A \ \wedge \ x \in a) \implies x \in W)$$

Proposition 6.5.3. *Si A est un ensemble alors il existe un et un seul ensemble W dont les éléments sont précisément tous les ensembles x qui satisfont :*

x est élément d'au moins un élément de A.

On écrit $W = \cup A$ ou encore $W = \bigcup_{X \in A} X$.

Preuve. En vertu de l'axiome de la réunion, il existe un ensemble W' qui satisfait : tout élément d'un élément de A est élément de W'. Autrement dit, pour tout objet x l'implication suivante est vraie :

$$\exists_a (a \in A \ \wedge \ x \in a) \implies x \in W'. \tag{4}$$

Puisque W' est un ensemble et $\exists_a (a \in A \ \wedge \ x \in a)$ est une condition sur x, l'axiome de spécification affirme que l'ensemble suivant existe :

$$W = \{x \in W' \mid \exists_a (a \in A \ \wedge \ x \in a)\}.$$

Alors quel que soit l'objet x on a

$$\begin{aligned} x \in W &\iff x \in W' \text{ et } \exists_a (a \in A \ \wedge \ x \in a) \\ &\overset{(4)}{\iff} \exists_a (a \in A \ \wedge \ x \in a) \\ &\iff x \text{ est élément d'au moins un élément de } A. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble W a la propriété voulue. En vertu de l'axiome d'extensionalité, il ne peut y avoir qu'un seul W ayant cette propriété. $\square$

Exercice 6.5.4. Par induction sur n, démontrez que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des ensembles, alors l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ existe.

Remarque. On peut montrer avec Axiomes 1–4 que $\wp(z)$ existe pour tout ensemble fini z (voir Proposition 7.5 dans les notes “La théorie ZFC des ensembles” disponibles sur le site web). Mais pour les ensembles infinis, on a besoin d'un autre axiome.

ZFC Axiome 6 (Axiome de l'ensemble des parties). Quel que soit l'ensemble z, il existe au moins un ensemble p ayant la propriété suivante : tout sous-ensemble de z est élément de p.

$$\forall_z \exists_p \forall_x (x \subseteq z \implies x \in p)$$

Proposition 6.5.5. *Quel que soit l'ensemble z, $\wp(z)$ existe.*

Preuve. Soit z un ensemble. L'Axiome 6 implique qu'il existe au moins un ensemble p' qui satisfait : tout sous-ensemble de z est élément de p'. On choisit un tel ensemble p', alors on a :

$$\forall_x (x \subseteq z \implies x \in p'). \tag{5}$$

Puisque p' est un ensemble et “$x \subseteq z$” est une condition sur x, l'axiome de spécification implique que l'ensemble suivant existe :

$$p = \{x \in p' \mid x \subseteq z\}.$$

Pour un ensemble x quelconque,

$$x \in p \iff (x \in p' \ \wedge \ x \subseteq z) \overset{5}{\iff} x \subseteq z$$

donc l'ensemble p satisfait la condition $\forall_x\,(x \in p \iff x \subseteq z)$, donc $p = \wp(z)$. $\square$

6.6. Axiome de l'infini

En vertu des cinq premiers axiomes, si y est un ensemble quelconque alors l'ensemble $y \cup \{y\}$ existe et est unique. Écrivons $y^+ = y \cup \{y\}$ comme abréviation. On dit que y^+ est le *successeur* de y. Par exemple, on a

$$\varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \quad \wedge \quad \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Exercice 6.6.1. Montrez que pour tout ensemble y on a $y \in y^+$ et $y \subseteq y^+$.

Définition 6.6.2. On dit qu'un ensemble A est *inductif* s'il satisfait les deux conditions

$$\varnothing \in A \quad \text{et} \quad \forall_y\,(y \in A \implies y^+ \in A).$$

Exercice 6.6.3. Montrez que si A et B sont des ensembles inductifs alors $A \cap B$ est un ensemble inductif.

Lemme 6.6.4. *Supposons que E est un ensemble non vide qui satisfait :*

Chaque élément de E est un ensemble inductif.

Alors $\cap E$ est un ensemble inductif.

Exercice 6.6.5. Démontrez le Lemme 12.4.

ZFC Axiome 7 (Axiome de l'infini). Il existe au moins un ensemble inductif.

Théorème 6.6.6. *Il existe exactement un ensemble ω qui satisfait les deux conditions suivantes :*

- *ω est un ensemble inductif,*
- *ω est inclus ($\subseteq$) dans tout ensemble inductif.*

Preuve. En vertu de l'Axiome 7, il existe un ensemble inductif A. Considérons l'ensemble

$$E = \{x \in \wp(A) \mid x \text{ est un ensemble inductif}\}.$$

Cet ensemble existe par l'axiome de spécification. Notons que $E \neq \varnothing$ (puisque $A \in E$), et que chaque élément de E est un ensemble inductif. Donc le Lemme 6.6.4 implique que $\cap E$ est un ensemble inductif. On définit

$$\omega = \cap E.$$

Il reste à montrer que ω est inclus dans tout ensemble inductif. Soit B un ensemble inductif quelconque. Alors $A \cap B$ est un ensemble inductif (Exercice 6.6.3) et $A \cap B \in \wp(A)$, donc $A \cap B \in E$. Puisque $\cap E \subseteq C$ pour tout $C \in E$, on a $\cap E \subseteq A \cap B \subseteq B$, donc $\omega \subseteq B$.

On a montré l'existence d'au moins au ensemble inductif ω qui est inclus dans tout ensemble inductif. Un tel ensemble est forcément unique. En effet, supposons que ω' est aussi un ensemble inductif inclus dans tout ensemble inductif. Alors on a $\omega \subseteq \omega'$ et $\omega' \subseteq \omega$, donc $\omega = \omega'$. □

DÉFINITION 6.6.7. Les éléments de ω sont appelés les *nombres naturels*.

En particulier, on définit les nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5 de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&0 = \varnothing,\\
&1 = \varnothing^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\},\\
&2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\\
&3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\\
&4 = 3^+,\\
&5 = 4^+.
\end{aligned}$$

EXERCICE 6.6.8. Prouvez que $2 \neq 3$.

Maintenant, avec les axiomes, on peut définir l'ordre $\leq$ sur l'ensemble $\mathbb{N} = \omega$ et prouver que $(\omega, \leq)$ est bien ordonné. Parce que on n'a pas le temps, on ne le fera pas en classe. Mais maintenant vous avez les connaissances pour comprendre les preuves (voir Section 13 des notes "La théorie ZFC des ensembles" disponibles sur le site web). On peut aussi définir l'arithmétique (voir Section 14 des notes "La théorie ZFC des ensembles") et les ensembles de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ (voir Section 15 des notes "La théorie ZFC des ensembles").

6.7. Les deux derniers axiomes de ZF

ZFC Axiome 8 (Axiome de fondation). Pour tout ensemble x non vide, il existe au moins un élément $y \in x$ qui satisfait $y \cap x = \varnothing$.

$$\forall_x \left[x \neq \varnothing \implies \exists_{y \in x} \left(y \cap x = \varnothing \right) \right]$$

PROPOSITION 6.7.1. *Aucun ensemble n'est élément de lui-même.*

Preuve. On procède par contradiction : supposons qu'il existe un ensemble a qui satisfait $a \in a$. On sait que l'ensemble $\{a\}$ existe. Puisque $\{a\} \neq \varnothing$, l'axiome de fondation implique qu'il existe $y \in \{a\}$ tel que $y \cap \{a\} = \varnothing$. On a forcément $y = a$, donc $a \cap \{a\} = \varnothing$. Cependant, $a \in a \cap \{a\}$, contradiction. □

ZFC Axiome 9 (Axiome de remplacement). Étant donnés un ensemble A et une formule $Q(x, y)$ avec variables libres x, y si l'énoncé

$$\forall_{a\in A}\, \exists!_b\, Q(a,b)$$

est vrai alors il existe un ensemble B tel que

$$\forall_{a\in A}\, \exists!_{b\in B}\, Q(a,b).$$

6.8. L'Axiome du Choix

Les 9 axiomes qu'on a vus ci-dessus constituent la théorie "ZF" des ensembles (l'axiomatization de Zermelo et Fraenkel). La théorie ZFC des ensembles est obtenue en ajoutant aux axiomes de ZF un axiome supplémentaire, appelé l'Axiome du Choix. On ne va pas parler beaucoup de l'Axiome du Choix dans ce cours, mais pour être complet, on le donne ici.

Axiome du choix (Version 1). Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille telle que $\forall_{i\in I}\, (A_i \neq \varnothing)$. Alors il existe au moins une famille $(a_i)_{i\in I}$ (indicée par le même ensemble I) satisfaisant $\forall_{i\in I}\, (a_i \in A_i)$.

Axiome du choix (Version 2). Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille telle que $\forall_{i\in I}\, (A_i \neq \varnothing)$. Alors il existe au moins une fonction $c : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ telle que $\forall_{i\in I}, (c(i) \in A_i)$.

Il existe d'autres versions de l'Axiome du Choix (incluant le Lemme de Zorn). L'application la plus connue de l'Axiome du Choix (ou du Lemme de Zorn) est le preuve que tout espace vectoriel possède une base. Voir Sections 17–19 des notes "La théorie ZFC des ensembles" disponibles sur le site web.