1. Cardinalité

Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ ont-ils le même nombre d'éléments ?

Une approche possible, pour répondre à cette question, serait de répondre à trois questions : (1) quel est le nombre d'éléments de $\mathbb{N}$? (2) quel est le nombre d'éléments de $\mathbb{Q}$? (3) ces deux nombres sont-ils égaux ? Cependant cette approche nous forcerait à développer une théorie des nombres infiniment grands ; c'est possible, mais c'est un peu compliqué.

C'est une autre approche que nous allons développer, une approche plus simple basée sur l'idée de bijection. Nous allons répondre à la première question ($\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ ont-ils le même nombre d'éléments ?) sans jamais parler du nombre d'éléments de ces ensembles. En fait, nous nous interdirons de parler du nombre d'éléments d'un ensemble infini.

1.1. **Définition.** Étant donnés des ensembles A et B, on utilisera l'abbréviation suivante:

$$A \sim B \text{ signifie: } \quad \text{“\textit{il existe au moins une bijection de } } A \text{ \textit{vers} } B.\text{”}$$

1.2. **Exemple.** Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$ alors il n'existe aucune bijection de A vers B donc $A \not\sim B$ (c'est la négation de $A \sim B$). Si $C = \{7, 8, 9\}$ alors il existe au moins une bijection de A vers C donc $A \sim C$.

Remarque. Si A, B sont des ensembles finis, alors l'énoncé $A \sim B$ est vrai si et seulement si A et B ont le même nombre d'éléments.

1.3. **Exemple.** Considérons le sous-ensemble $P = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ (les nombres pairs) de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Soit $f : \mathbb{N} \to P$ définie par $f(x) = 2x$. Alors f est bijective, ce qui démontre que $\mathbb{N} \sim P$.

1.4. **Proposition.** *Quels que soient les ensembles A, B, C, on a:*

(1) $A \sim A$
(2) $A \sim B \quad \Longrightarrow \quad B \sim A$
(3) $A \sim B$ *et* $B \sim C \quad \Longrightarrow \quad A \sim C$.

1.5. **Définition.** Des ensembles A, B qui satisfont $A \sim B$ sont dits *équipotents* (on dit parfois que A et B *ont la même cardinalité*).

1.6. **Proposition.** *Si $A \subseteq \mathbb{N}$ et A est infini, alors $\mathbb{N} \sim A$.*

Démonstration. On peut énumérer les éléments de A en ordre croissant : soit a_0 le plus petit élément de A, soit a_1 le plus petit élément de $A \setminus \{a_0\}$, soit a_2 le plus petit élément de $A \setminus \{a_0, a_1\}$, etc. Ainsi, les éléments de A sont :

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

Soit $f : \mathbb{N} \to A$ définie par $f(n) = a_n$. Ceci est une bijection, donc $\mathbb{N} \sim A$. $\square$

1.7. **Exemple.** Soit $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $A \sim \mathbb{N}$.

Solution : On a $A \subset \mathbb{N}$, et on sait que A est un ensemble infini. En vertu de 1.6, on a $\mathbb{N} \sim A$. Alors 1.4 implique $A \sim \mathbb{N}$.

1.8. **Proposition.** $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

Démonstration. On définit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ par $f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -(n+1)/2, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
Vous pouvez vérifier que f est bijective, donc $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. □

1.9. **Proposition.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$

Remarque. En classe je démontrerai la proposition à l'aide d'un dessin. Ci-dessous je donne une autre démonstration, mais plusieurs détails sont omis et c'est à vous de compléter le travail.

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on définit $T_k = \frac{k(k+1)}{2} \in \mathbb{N}$. Vous pouvez vérifier que $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$, donc l'assertion suivante est vraie :

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe exactement un $k \in \mathbb{N}$ tel que $T_k \leq n < T_{k+1}$.

Donc une fonction $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par la règle suivante :

$$\alpha(n) = \text{l'unique } k \in \mathbb{N} \text{ qui satisfait } T_k \leq n < T_{k+1}.$$

Par exemple, pour calculer $\alpha(8)$, on calcule quelques valeurs de T_k et on constate que $T_3 \leq 8 < T_4$; alors la définition de α donne $\alpha(8) = 3$. Il est clair que

$$\textit{pour chaque } n \in \mathbb{N}, \ T_{\alpha(n)} \leq n < T_{\alpha(n)+1},$$

donc

$$\textit{pour chaque } n \in \mathbb{N}, \ \big(T_{\alpha(n)+1} - n - 1, n - T_{\alpha(n)}\big) \in \mathbb{N}^2.$$

On peut donc définir une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ par $g(n) = \big(T_{\alpha(n)+1} - n - 1, n - T_{\alpha(n)}\big)$.

On définit aussi $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ par $f(x, y) = y + T_{x+y}$. Vous pouvez vérifier que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont les fonctions identités sur $\mathbb{N}$ et sur $\mathbb{N}^2$ respectivement. Donc $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est une bijection. □

1.10. **Proposition.** *Quels que soient les ensembles A, A', B, B', on a:*

$$A \sim A' \text{ et } B \sim B' \quad \Longrightarrow \quad A \times B \sim A' \times B'.$$

Démonstration. Supposons que $A \sim A'$ et $B \sim B'$. On choisit deux bijections $f : A \to A'$ et $g : B \to B'$, et on définit une fonction $h : A \times B \to A' \times B'$ par $h(a, b) = \big(f(a), g(b)\big)$. Vérifiez que h est bijective. Donc $A \times B \sim A' \times B'$. □

1.11. **Corollaire.** $\mathbb{Z}^n \sim \mathbb{N}$, *pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. Par induction sur n. Le cas $n = 1$ est vrai, en vertu de 1.8. Supposons que $n \geq 1$ est un entier pour lequel $\mathbb{Z}^n \sim \mathbb{N}$ est vrai, et montrons que $\mathbb{Z}^{n+1} \sim \mathbb{N}$.

En vertu de 1.10, $\mathbb{Z}^n \sim \mathbb{N}$ et $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ impliquent $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, donc

$$\mathbb{Z}^{n+1} \ \sim \ \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} \ \sim \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \sim \ \mathbb{N},$$

donc $\mathbb{Z}^{n+1} \sim \mathbb{N}$. $\square$

1.12. **Définition.** Étant donnés des ensembles A et B, on utilisera l'abbréviation suivante:

$$A \preceq B \text{ signifie: } \quad \text{“\textit{il existe au moins une injection de } } A \text{ \textit{vers} } B.\text{”}$$

Par exemple, les assertions $\{1,2\} \preceq \{6,7,8\}$ et $\{1,2\} \preceq \{6,7\}$ sont vraies mais $\{6,7,8\} \preceq \{1,2\}$ est fausse. Le symbole $\preceq$ a quelques propriétés évidentes:

1.13. **Proposition.** *Quels que soient les ensembles A, B, C, on a:*
(1) $A \preceq A$
(2) $A \preceq B$ *et* $B \preceq C \quad \Longrightarrow \quad A \preceq C$
(3) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A \preceq B$
(4) $A \sim B \quad \Longrightarrow \quad A \preceq B$ *et* $B \preceq A$.

Remarquez que la proposition ci-dessus **ne répond pas** aux questions suivantes :

- *L'implication*
$$A \preceq B \text{ et } B \preceq A \quad \Longrightarrow \quad A \sim B$$
est-elle vraie ?
- *Est-il vrai que, quels que soient les ensembles A et B, au moins une des conditions*
$$A \preceq B, \quad B \preceq A$$
doit être satisfaite ?

Ces questions sont difficiles et nous remettons à plus tard leur solution (nous verrons que la réponse est “oui” dans les deux cas). Remarquez que la première question demande si la réciproque de 1.13(4) est vraie. Concernant cette question, considérez l'exemple suivant.

1.14. **Exemple.** Soient les intervalles $A = (0,1) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \,\}$ et $B = [0,1] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \,\}$.

- Puisque $A \subseteq B$, il est clair que $A \preceq B$.
- Si $x \in B$ alors $(x+1)/3 \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, donc $(x+1)/3 \in A$. Ainsi, une fonction $g : B \to A$ est définie par $g(x) = (x+1)/3$. Cette fonction est strictement croissante, donc injective, donc $B \preceq A$.

On a montré que $(0,1) \preceq [0,1]$ et $[0,1] \preceq (0,1)$. S'ensuit-il que $(0,1) \sim [0,1]$? Autrement dit, existe-t-il une bijection de $(0,1)$ vers $[0,1]$? Nous verrons plus tard un théorème qui répond “oui” à cette question, mais si vous essayez de définir une bijection de $(0,1)$ vers $[0,1]$ vous verrez que c'est loin d'être évident.

Voici une autre propriété de “$\preceq$” qu'il vaut la peine de souligner :

1.15. **Proposition.** *Étant donnés des ensembles A et B non vides, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe au moins une injection de A vers B (autrement dit, $A \preceq B$)*
(2) *Il existe au moins une surjection de B vers A.*

Démonstration. ($1 \Rightarrow 2$) Supposons qu'il existe une injection $f : A \to B$. Remarquons que si $y \in f(A)$ alors $f^{-1}(y)$ est un élément bien défini de A, car f est injective. Puisque $A \neq \varnothing$ par hypothèse, on peut choisir un élément $a_0 \in A$ et définir une fonction $g : B \to A$ par

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{si } y \in f(A), \\ a_0, & \text{si } y \in B \setminus f(A). \end{cases}$$

On a alors $g\big(f(x)\big) = x$ pour tout $x \in A$, donc $g : B \to A$ est surjective, donc (2) est satisfaite.

($2 \Rightarrow 1$) Supposons qu'il existe une surjection $g : B \to A$. Alors pour chaque $x \in A$ on peut choisir un élément $b_x \in B$ qui satisfait $g(b_x) = x$. En vertu de l'axiome du choix, $x \mapsto b_x$ définit une fonction $f : A \to B$, $f(x) = b_x$. On a alors $g\big(f(x)\big) = g(b_x) = x$ pour tout $x \in A$, donc $f : A \to B$ est injective, donc (1) est satisfaite. □

1.16. **Exercice.** Considérez les intervalles $I = [0, 1]$ et $J = (0, 1)$. On a vu en 1.14 qu'il existe une injection $I \to J$, donc en vertu de 1.15 il existe une surjection $J \to I$. Donnez un exemple concret d'une telle surjection. (Suggestion: imitez la démonstration de 1.15.)

2. Les ensembles dénombrables

2.1. **Définition.** Un ensemble A est *dénombrable* s'il satisfait $A \preceq \mathbb{N}$.

Par exemple, tout ensemble fini est dénombrable. Le Corollaire 1.11 implique que $\mathbb{Z}^n$ est dénombrable (quel que soit n). Notons aussi que tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

2.2. **Proposition.** *Si A est dénombrable et infini alors $A \sim \mathbb{N}$.*

Démonstration. Supposons que A est dénombrable et infini. Puisque $A \preceq \mathbb{N}$, il existe une injection $f : A \to \mathbb{N}$. Soit $B = f(A)$, alors $A \sim B$. Puisque B est une partie infinie de $\mathbb{N}$, on a $B \sim \mathbb{N}$ en vertu de 1.6. Donc $A \sim \mathbb{N}$. □

Voici une autre façon d'énoncer 2.2 :

Un ensemble est dénombrable si et seulement si il est fini ou équipotent à $\mathbb{N}$.

2.3. **Théorème.** $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z}^2$. En effet, si ceci est vrai alors

$$\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z}^2 \text{ et } \mathbb{Z}^2 \sim \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z}^2 \text{ et } \mathbb{Z}^2 \preceq \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{Q} \preceq \mathbb{N},$$

donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable et infini, donc $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ en vertu de 2.2.

Il reste à montrer que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z}^2$. Il est bien connu que tout nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ peut s'écrire comme une fraction a/b où $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ et a, b sont relativement premiers. De manière précise, on peut énoncer :

> *Pour chaque $x \in \mathbb{Q}$, il existe une et une seule paire $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ satisfaisant les conditions*
>
> (i) $b > 0$ (ii) *a, b sont relativement premiers* (iii) $x = \dfrac{a}{b}$.

Ceci signifie que nous pouvons définir une fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^2$ par la règle suivante :

$$f(x) = \text{l'unique } (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ satisfaisant les conditions (i,ii,iii) ci-dessus.}$$

Remarquons en particulier que si $f(x) = (a, b)$ alors $x = a/b$, puisque (a, b) satisfait (iii). On en déduit que f est injective (si $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ sont tels que $f(x_1) = (a, b) = f(x_2)$, alors $x_1 = a/b = x_2$, ce qui prouve que f est injective).

On a montré que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z}^2$, donc la démonstration est terminée. $\square$

2.4. **Corollaire.** *$\mathbb{Q}^n \sim \mathbb{N}$ pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. Imiter la démonstration de 1.11. $\square$

2.5. **Proposition.** *Quels que soient les ensembles A, A', B, B', on a:*

$$A \preceq A' \text{ et } B \preceq B' \quad \Longrightarrow \quad A \times B \preceq A' \times B'.$$

Démonstration. Imiter la démonstration de 1.10, en remplaçant "$\sim$" par "$\preceq$", "bijection" par "injection", etc. $\square$

2.6. **Corollaire.** *Si A, B sont des ensembles dénombrables, alors $A \times B$ est dénombrable.*

Démonstration. En vertu de 2.5, $A \preceq \mathbb{N}$ et $B \preceq \mathbb{N} \implies A \times B \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Puisque $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, on obtient $A \times B \preceq \mathbb{N}$. $\square$

2.7. **Proposition.** *Soit $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ où I est dénombrable et chacun des A_i est dénombrable. Alors A est dénombrable.*

Démonstration. Pour chaque $x \in A$, on peut choisir un élément $j(x)$ de I tel que $x \in A_{j(x)}$. Donc, en vertu de l'axiome du choix, il existe une fonction $j : A \to I$, $x \mapsto j(x)$, qui satisfait :

$$\text{Pour tout } x \in A, \;\; x \in A_{j(x)}.$$

D'autre part, pour chaque $i \in I$ il existe une injection $f_i : A_i \to \mathbb{N}$. On définit une fonction $F : A \to I \times \mathbb{N}$ par

$$F(x) = \big(j(x),\ f_{j(x)}(x)\big) \quad \text{pour chaque } x \in A.$$

Vérifiez que F est injective ; donc $A \preceq I \times \mathbb{N}$. Puisque 2.6 donne $I \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$, et puisque "$\preceq$" est transitive, $A \preceq \mathbb{N}$. $\square$

2.8. **Exemple.** Montrer que l'ensemble $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \in \mathbb{Q} \}$ est dénombrable.
Solution. Si c est un nombre réel quelconque, alors on définit

$$S_c = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = c \}.$$

En utilisant les propriétés connues de sin, on peut voir que S_c est dénombrable (pour chaque valeur fixée de $c \in \mathbb{R}$). On remarque aussi que

$$S = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} S_c.$$

Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable et chacun des S_c est dénombrable, 2.7 implique que S est dénombrable.

2.9. **Exercice.** Supposons que $f : A \to B$ est une fonction satisfaisant : pour chaque $b \in B$, l'ensemble $\{ x \in A \mid f(x) = b \}$ est dénombrable. Montrez que si B est dénombrable alors A l'est aussi.

Existe-t-il des ensembles non-dénombrables ? En 1873 Cantor montra que l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Avant de voir sa preuve, discutons un peu de la représentation décimale des nombres réels.

Considérons l'intervalle $I = [0, 1)$.

Chaque $x \in I$ a **au moins une** représentation décimale $x = 0.c_1c_2c_3\ldots$. Remarquez que la notation "$x = 0.c_1c_2c_3\ldots$" signifie que $(c_1, c_2, c_3, \ldots)$ est une suite infinie d'éléments de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ satisfaisant l'égalité $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}$.

Chaque $x \in I$ a **au plus deux** représentations décimales. Si x a deux représentations, alors l'une d'elles a une queue de 0 et l'autre a une queue de 9. Par exemple,

$$\tfrac{1}{4} = 0.250000\cdots = 0.249999\ldots.$$

Convention : Nous rejetons les représentations qui ont une queue de 9.

Cette convention nous permet d'écrire :

$$\boxed{\text{Chaque } x \in I \text{ a une et une seule représentation décimale.}}$$

Ceci nous permet de parler de **la** représentation décimale d'un nombre $x \in I$. Par exemple, la représentation décimale de $\frac{1}{4}$ est $0.25000\ldots$.

2.10. **Lemme.** *Il n'existe aucune fonction surjective* $\mathbb{N} \to I$.

Démonstration. Il revient au même de montrer qu'il n'existe aucune fonction surjective $A \to I$, où $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $f : A \to I$ une fonction quelconque. Montrons que f n'est pas surjective.

Pour chaque $n \in A$, on considère la représentation décimale (unique, en vertu de la convention) du nombre $f(n) \in I$,

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 0.c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}\dots \\ f(2) & = & 0.c_{21}c_{22}c_{23}c_{24}\dots \\ & \vdots & \\ f(n) & = & 0.c_{n1}c_{n2}c_{n3}c_{n4}\dots \\ & \vdots & \end{array}$$

On définit une suite infinie $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ par la règle $c_n = \begin{cases} 2 & \text{si } c_{nn} \neq 2 \\ 3 & \text{si } c_{nn} = 2. \end{cases}$

Alors :

(i) $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ est une suite d'éléments de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ qui n'a pas une "queue de 9"

(ii) $c_n \neq c_{nn}$ pour tout $n \geq 1$.

En vertu de (i), il existe un nombre $y \in I$ dont la représentation décimale est $y = 0.c_1c_2c_3\dots$. Montrons que $y \notin f(A)$.

Supposons qu'il existe $n \in A$ tel que $y = f(n)$. Alors $y = 0.c_1c_2c_3\dots$ et $y = 0.c_{n1}c_{n2}c_{n3}\dots$. Puisque y a une seule représentation décimale, il s'ensuit que $c_1 = c_{n1}$, $c_2 = c_{n2}$, etc., et en particulier $c_n = c_{nn}$. Ceci contredit la définition de la suite $(c_1, c_2, \dots)$, et cette contradiction montre qu'il n'existe aucun $n \in A$ tel que $f(n) = y$. Donc f n'est pas surjective. $\square$

Remarque. Dans la preuve ci-dessus, la définition de la suite $(c_1, c_2, \dots)$ utilise une idée de Cantor qu'on appelle "l'argument de la diagonale."

2.11. **Théorème** (Cantor, 1873). $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Si $\mathbb{R}$ est dénombrable alors I l'est aussi, donc $I \sim \mathbb{N}$ en vertu de 2.2. En particulier il existe une fonction surjective $\mathbb{N} \to I$, ce qui contredit 2.10. $\square$

3. Le théorème de Schröder-Bernstein

3.1. **Théorème** (Schröder-Bernstein). *Quels que soient les ensembles A et B,*

$$A \preceq B \text{ et } B \preceq A \quad \Longrightarrow \quad A \sim B.$$

Démonstration. Il y a deux parties à la démonstration :

(i) Montrer que si le théorème est vrai dans le cas particulier où $A \cap B = \varnothing$, alors il est vrai en général.

(ii) Montrer que le théorème est vrai dans le cas particulier où $A \cap B = \varnothing$.

On commence par (i). Supposons que le théorème est vrai dans le cas particulier où $A \cap B = \varnothing$. Considérons des ensembles A, B satisfaisant $A \preceq B$ et $B \preceq A$. On doit montrer que $A \sim B$, sans supposer que A, B sont disjoints. Définissons des ensembles

A' et B' par $A' = \{0\} \times A$ et $B' = \{1\} \times B$. Alors $A' \cap B' = \varnothing$. On a aussi $A' \sim A$ et $B' \sim B$, donc:

$$\begin{aligned} A' \sim A \text{ et } A \preceq B \text{ et } B \sim B' \quad &\Longrightarrow \quad A' \preceq B' \\ B' \sim B \text{ et } B \preceq A \text{ et } A \sim A' \quad &\Longrightarrow \quad B' \preceq A'. \end{aligned}$$

On a donc $A' \preceq B'$, $B' \preceq A'$ et $A' \cap B' = \varnothing$. Puisque le théorème est supposé vrai dans le cas particulier des ensembles disjoints, on déduit que $A' \sim B'$. Mais alors

$$A \sim A' \text{ et } A' \sim B' \text{ et } B' \sim B \quad \Longrightarrow \quad A \sim B,$$

donc on a montré que $A \sim B$, et la preuve de la partie (i) est terminée.

Pour la partie (ii), on suppose que les ensembles A, B satisfont

$$A \preceq B,\ B \preceq A \text{ et } A \cap B = \varnothing$$

et on doit montrer que $A \sim B$. Puisque $A \preceq B$ et $B \preceq A$, il existe une injection $f : A \to B$ et il existe une injection $g : B \to A$. Remarquez que ces fonctions ne sont pas nécessairement surjectives (voir l'exemple 1.14).

Soit $x_0 \in A$; s'il existe $x_1 \in B$ tel que $g(x_1) = x_0$, alors x_1 est unique (puisque g est injective) et nous dirons que x_1 est *le parent de* x_0. Notez que si $x_0 \notin g(B)$, alors x_0 n'a aucun parent.

Soit $x_0 \in B$; s'il existe $x_1 \in A$ tel que $f(x_1) = x_0$, alors x_1 est unique et est appelé *le parent de* x_0. Comme dans le premier cas, il se peut que x_0 n'ait aucun parent.

Ainsi, chaque élément x_0 de $A \cup B$ a *au plus un* parent (car $A \cap B = \varnothing$). Si x_0 a un parent, désignons-le par $x_1 \in A \cup B$; si x_1 a un parent, désignons-le par $x_2 \in A \cup B$; etc. Ainsi, chaque élément x_0 de $A \cup B$ détermine une suite $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ d'éléments de $A \cup B$ telle que chaque terme x_{i+1} de la suite est le parent du terme précédent x_i. Cette suite peut être finie ou infinie, et on la désignera par le symbole $\alpha(x_0)$. Par exemple, supposons que $x_0 \in A \cup B$ a un parent x_1, que x_1 a un parent x_2, et que x_2 n'a aucun parent ; alors $\alpha(x_0) = (x_0, x_1, x_2)$. Autre exemple : si $x_0 \in A \cup B$ n'a aucun parent alors $\alpha(x_0) = (x_0)$. Lorsque $\alpha(x_0)$ est une suite finie, $\alpha(x_0) = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, alors x_n n'a aucun parent. Lorsque la suite est infinie, $\alpha(x_0) = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, alors chaque x_i a un parent.

On définit ensuite le “type” de chaque élément x_0 de $A \cup B$ (il y a trois types possibles). On dira que x_0 est de type ∞ si $\alpha(x_0)$ est une suite infinie ; que x_0 est de type A si $\alpha(x_0) = (x_0, \dots, x_n)$ et $x_n \in A$; et que x_0 est de type B si $\alpha(x_0) = (x_0, \dots, x_n)$ et $x_n \in B$. Remarquez que nous avons eu besoin du fait que $A \cap B = \varnothing$ pour définir le type de x_0. En effet, si $\alpha(x_0) = (x_0, \dots, x_n)$ alors x_n appartient soit à A soit à B, mais ne peut pas appartenir aux deux ensembles, donc le type de x_0 est bien défini. Enfin, on définit

$$\begin{aligned} A_\infty &= \{\, x \in A \mid x \text{ est de type } \infty \,\} & B_\infty &= \{\, x \in B \mid x \text{ est de type } \infty \,\} \\ A_A &= \{\, x \in A \mid x \text{ est de type } A \,\} & B_A &= \{\, x \in B \mid x \text{ est de type } A \,\} \\ A_B &= \{\, x \in A \mid x \text{ est de type } B \,\} & B_B &= \{\, x \in B \mid x \text{ est de type } B \,\} \end{aligned}$$

et on note que ces six ensembles sont deux à deux disjoints. Vérifiez les affirmations suivantes :

$$f\big(A_\infty\big) = B_\infty, \qquad f\big(A_A\big) = B_A, \qquad g\big(B_B\big) = A_B.$$

Donc les trois fonctions suivantes sont bien définies et bijectives :

$$\begin{array}{rcl} A_\infty & \to & B_\infty \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} A_A & \to & B_A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} B_B & \to & A_B \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

Puisque A est la réunion disjointe $A = A_\infty \cup A_A \cup A_B$ et que B est la réunion disjointe $B = B_\infty \cup B_A \cup B_B$, on conclut que la fonction suivante est bien définie et est bijective :

$$h : A \to B, \quad h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A_\infty \\ f(x) & \text{si } x \in A_A \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in A_B. \end{cases}$$

Donc $A \sim B$. □

3.2. **Exercice.** Après avoir lu la preuve ci-dessus, considérez l'exemple suivant. Soient $A = (-\infty, 0) = \big\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \,\big\}$ et $B = [0, \infty) = \big\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \,\big\}$. Vérifiez que

$$\begin{array}{rrcl} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & -x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrcl} g: & B & \to & A \\ & x & \mapsto & -x-1 \end{array}$$

sont des fonctions bien définies et sont injectives. Remarquez que $A \preceq B$, $B \preceq A$ et $A \cap B = \varnothing$. Suivez pas à pas la partie (ii) de la démonstration de 3.1 en utilisant A, B, f, g que nous venons de définir. En particulier, vérifiez :

$$\begin{array}{ll} A_\infty = \varnothing & B_\infty = \varnothing \\ A_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n-1, -n) & B_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1) \\ A_B = \{-1, -2, -3, -4, \dots\} & B_B = \mathbb{N} \end{array}$$

et décrivez la bijection $h : A \to B$ donnée par la preuve.

Nous écrirons "TSB" pour abréger "Théorème de Schröder-Bernstein." Remarquons que en combinant 1.13 et TSB on obtient

$$\boxed{A \sim B \quad \iff \quad A \preceq B \text{ et } B \preceq A.}$$

Applications du théorème de Schröder-Bernstein

3.3. **Corollaire.** *Supposons que E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ satisfaisant :*

Il existe des nombres réels $a < b$ tels que $(a, b) \subseteq E$.

Alors $E \sim \mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction arctan : $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ est strictement croissante, donc injective. En fait c'est une bijection, car pour tout $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ on a $\arctan(\tan y) = y$. Donc $\mathbb{R} \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. On voit facilement que $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim (a, b)$, donc $\mathbb{R} \sim (a, b)$. Puisque $(a, b) \subseteq E$ on a $(a, b) \preceq E$, donc $\mathbb{R} \preceq E$. On a aussi $E \preceq \mathbb{R}$ (car $E \subseteq \mathbb{R}$), donc TSB implique que $E \sim \mathbb{R}$. □

3.4. **Lemme.** *Soit S un ensemble tel que $S \sim \mathbb{N}$. Alors il existe des sous-ensembles S_0, S_1 de S satisfaisant*

$$S = S_0 \cup S_1, \quad S_0 \cap S_1 = \varnothing, \quad S_0 \sim \mathbb{N} \sim S_1.$$

Démonstration. Soient $P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ et $I = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. On choisit une bijection $f : \mathbb{N} \to S$, alors les ensembles $S_0 = f(P)$ et $S_1 = f(I)$ satisfont la condition du lemme. □

3.5. **Proposition.** *Soit A un ensemble infini. Alors pour tout ensemble dénombrable D on a $D \cup A \sim A$.*

Démonstration. Puisque A est infini, il existe[1] une injection $f : \mathbb{N} \to A$. On définit $S = f(\mathbb{N})$ et (voir 3.4) on choisit des sous-ensembles S_0, S_1 de S satisfaisant $S = S_0 \cup S_1$, $S_0 \cap S_1 = \varnothing$ et $S_0 \sim \mathbb{N} \sim S_1$. Alors $D \setminus A \preceq D \preceq \mathbb{N} \preceq S_0$, donc il existe une injection $g_0 : D \setminus A \to S_0$. D'autre part, $S \sim \mathbb{N} \sim S_1$ implique qu'il existe une bijection $g_1 : S \to S_1$. On définit $g : D \cup A \to A$ par

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x), & \text{si } x \in D \setminus A, \\ g_1(x), & \text{si } x \in S, \\ x, & \text{si } x \in A \setminus S, \end{cases}$$

Puisque g est injective, on a $D \cup A \preceq A$; puisque $A \subseteq D \cup A$, on a $A \preceq D \cup A$; alors TSB implique $D \cup A \sim A$. □

3.6. **Corollaire.** *Soit A un ensemble non dénombrable et soit D une partie dénombrable de A. Alors $A \setminus D \sim A$.*

3.7. **Exemple.** Si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} \setminus D \sim \mathbb{R}$.
En particulier, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$.

Démonstration de 3.6. On écrit A comme union de deux ensembles :

$$A = D \cup (A \setminus D).$$

Puisque D est dénombrable mais $D \cup (A \setminus D)$ ne l'est pas, 2.7 implique que $A \setminus D$ n'est pas dénombrable ; en particulier, $A \setminus D$ est infini. Puisque D est dénombrable et $A \setminus D$ est infini, 3.5 implique que $D \cup (A \setminus D) \sim A \setminus D$. Autrement dit, $A \sim A \setminus D$. □

[1] L'existence de cette injection est évidente du point de vue intuitif, mais nous donnerons une démonstration plus tard, voir 5.2.

4. Les nombres transcendants

Un *polynôme à coefficients dans* $\mathbb{Q}$ est une somme finie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ où x est une variable et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$. Le symbole $\mathbb{Q}[x]$ désigne l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, $\frac{1}{2} - 3x + 5x^2 \in \mathbb{Q}[x]$. Le polynôme $0 + 0x + 0x^2 + \cdots$ dont tous les coefficients sont nuls est appelé le *polynôme nul.* Donc un polynôme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ est *non nul* si au moins un coefficient a_i est non nul.

Chaque polynôme détermine une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Par exemple, $\frac{1}{2} - 3x + 5x^2 \in \mathbb{Q}[x]$ détermine la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(r) = \frac{1}{2} - 3r + 5r^2$.

4.1**. Définition.** Un nombre réel r est *algébrique* s'il existe un polynôme non nul $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ satisfaisant $f(r) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est appelé un *nombre transcendant.*

4.2**. Exemple.** Chaque nombre rationnel est algébrique. En effet, si $r \in \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x - r$ est un élément de $\mathbb{Q}[x]$, est non nul, et satisfait $f(r) = 0$.

4.3**. Exemple.** Le nombre irrationnel $r = \sqrt[5]{3}$ est algébrique. En effet, $f(x) = x^5 - 3$ est un élément de $\mathbb{Q}[x]$, est non nul, et satisfait $f(r) = 0$.

4.4**. Exemple.** Montrons que le nombre $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ r - \sqrt{2} &= \sqrt{3} \\ (r - \sqrt{2})^2 &= 3 \\ r^2 - (2\sqrt{2})r + 2 &= 3 \\ r^2 - 1 &= (2\sqrt{2})r \\ (r^2 - 1)^2 &= 8r^2 \\ r^4 - 2r^2 + 1 &= 8r^2 \\ r^4 - 10r^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Donc si on définit $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ alors $f(x)$ est un élément de $\mathbb{Q}[x]$, est non nul, et satisfait $f(r) = 0$.

Vers l'an 1800, aucun nombre transcendant n'était connu et les mathématiciens se demandaient si tous les nombres réels étaient algébriques. Un peu d'histoire :

- **1806:** Legendre conjecture que π est transcendant. À ce moment, on ne sait même pas s'il existe des nombres transcendants.
- **1844:** Liouville démontre qu'il existe des nombres transcendants et donne quelques exemples, par exemple : $10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + \cdots$.
- **1873:** Hermite démontre que e est transcendant.
- **1874:** Cantor démontre que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable (donc l'ensemble des nombres transcendants est non dénombrable).

1882: Lindemann démontre que π est transcendant.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres algébriques, $\mathcal{A} = \{ r \in \mathbb{R} \mid r \text{ est algébrique} \}$. Nous allons démontrer (comme Cantor) que $\mathcal{A}$ est dénombrable. La première étape de la preuve est :

4.5**. Lemme.** $\mathbb{Q}[x]$ *est dénombrable.*

Démonstration. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = \{ f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg(f) \leq n \}$. Alors

$$\mathbb{Q}^{n+1} \to P_n, \qquad (a_0, \dots, a_n) \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

est une bijection, donc $P_n \sim \mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{N}$. Ainsi, chaque P_n est dénombrable. D'autre part,

$$\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

Le fait que $\mathbb{Q}[x]$ est dénombrable est donc une conséquence de 2.7. □

4.6**. Théorème** (Cantor, 1874)**.** *L'ensemble* $\mathcal{A}$ *est dénombrable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ (l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{Q}$). En vertu de 4.5, $\mathcal{F}$ est dénombrable. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ on considère l'ensemble des zéros de f,

$$Z(f) = \{ r \in \mathbb{R} \mid f(r) = 0 \},$$

qui est un ensemble fini car un polynôme non nul de degré d a au plus d racines. En particulier, $Z(f)$ est dénombrable pour chaque $f \in \mathcal{F}$. Par définition de $\mathcal{A}$ on a

$$\mathcal{A} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} Z(f).$$

Puisque $\mathcal{F}$ est dénombrable et chaque $Z(f)$ est dénombrable, 2.7 implique que $\mathcal{A}$ est dénombrable. □

Le Théorème 4.6 a la conséquence suivante pour l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ des nombres transcendants :

4.7**. Corollaire.** $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A} \sim \mathbb{R}$

Démonstration. Conséquence immédiate de 4.6 et 3.6. □

5. Le principe de trichotomie

5.1. **Théorème.** *Toute paire d'ensembles A, B satisfait $A \preceq B$ ou $B \preceq A$.*

Démonstration. Soient A, B des ensembles. Soit Ω l'ensemble de toutes les fonctions f qui satisfont :

$$\operatorname{dom} f \subseteq A \quad \wedge \quad \operatorname{codom} f = B \quad \wedge \quad f \text{ est injective.}$$

Si $f, g \in \Omega$ satisfont

$$\operatorname{dom} f \subseteq \operatorname{dom} g \ \text{ et } \ \forall_{x \in \operatorname{dom} f}\ (f(x) = g(x))$$

alors on dit que f *est une restriction de* g et on écrit $f \leq g$. Alors $(\Omega, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné. Vérifions que $(\Omega, \leq)$ satisfait les deux hypothèses du Lemme de Zorn.

La première hypothèse est que $\Omega \neq \varnothing$. Ceci est vrai, car l'unique fonction de $\varnothing$ vers B est un élément de Ω.

Pour vérifier la deuxième hypothèse on considère un sous-ensemble $C \subseteq \Omega$ qui satisfait $C \neq \varnothing$ et $\forall_{f,g \in C}\, (f \leq g \ \vee \ g \leq f)$; on doit montrer qu'il existe $h \in \Omega$ tel que $\forall_{f \in C}\, (f \leq h)$. Soit $U = \bigcup_{f \in C} \operatorname{dom} f$ et soit $h : U \to B$ la fonction définie par :

> *Étant donné $x \in U$, on définit $h(x) = f(x)$ où f est n'importe quel élément de C satisfaisant $x \in \operatorname{dom} f$.*

Pour s'assurer que $h : U \to B$ est une fonction bien définie, on doit vérifier que pour chaque $x \in U$ les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) il existe au moins un $f \in C$ satisfaisant $x \in \operatorname{dom} f$

(ii) si $f_1, f_2 \in C$ satisfont $x \in \operatorname{dom} f_1$ et $x \in \operatorname{dom} f_2$, alors $f_1(x) = f_2(x)$.

La condition (i) est satisfaite, en vertu de la définition de U. Pour la condition (ii) on remarque d'abord que $f_1, f_2 \in C$ implique $f_1 \leq f_2$ ou $f_2 \leq f_1$, donc la définition de $\leq$ implique $f_1(x) = f_2(x)$, donc (ii) est satisfaite. Ainsi, $h : U \to B$ est une fonction bien définie.

Montrons que h est injective. Supposons que $x_1, x_2 \in U$ satisfont $h(x_1) = h(x_2)$. Pour chaque $i = 1, 2$, il existe $f_i \in C$ telle que $x_i \in \operatorname{dom} f_i$. On a alors $f_1 \leq f_2$ ou $f_2 \leq f_1$, donc $\operatorname{dom} f_1 \subseteq \operatorname{dom} f_2$ ou $\operatorname{dom} f_2 \subseteq \operatorname{dom} f_1$. Donc on a $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f_j$ pour un choix approprié de $j \in \{1, 2\}$. Mais alors la définition de h nous permet d'écrire $h(x_1) = f_j(x_1)$ et $h(x_2) = f_j(x_2)$, d'où

$$f_j(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = f_j(x_2).$$

Puisque $f_j \in C \subseteq \Omega$ est une fonction injective, on obtient $x_1 = x_2$. Donc h est injective et il s'ensuit que $h \in \Omega$. On a donc prouvé l'existence d'un élément $h \in \Omega$ qui satisfait $\forall_{f \in C}\, (f \leq h)$.

On conclut que $(\Omega, \leq)$ satisfait les deux hypothèses du Lemme de Zorn. Conséquemment, il existe un élément maximal $F \in \Omega$. Il y a deux possibilités : $\mathrm{dom}(F)$ est, ou n'est pas égal à A.

i) Si $\mathrm{dom}(F) = A$ alors F est une injection de A vers B, donc $A \preceq B$.

ii) Supposons que $\mathrm{dom}(F) \neq A$ et écrivons $A_0 = \mathrm{dom}(F)$. Alors $F : A_0 \to B$ doit être surjective. En effet, si F n'est pas surjective alors on peut choisir $a \in A \setminus A_0$ et $b \in B \setminus F(A_0)$, et définir une fonction $G : A_0 \cup \{a\} \to B$ par

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in A_0 \\ b & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Alors $G : A_0 \cup \{a\} \to B$ est injective, donc $G \in \Omega$ et $F < G$, contredisant la maximalité de F. Ainsi, $F : A_0 \to B$ doit être surjective, donc bijective, donc $B \sim A_0 \preceq A$.

On a montré que si $\mathrm{dom}(F) = A$ alors $A \preceq B$, et que si $\mathrm{dom}(F) \neq A$ alors $B \preceq A$. □

5.2**. Corollaire.** *Si A est un ensemble infini alors $\mathbb{N} \preceq A$.*

Démonstration. En vertu de 5.1, on a $\mathbb{N} \preceq A$ ou $A \preceq \mathbb{N}$. Si $A \preceq \mathbb{N}$ alors A est infini et dénombrable, donc 2.2 implique $A \sim \mathbb{N}$, donc $\mathbb{N} \preceq A$. □

5.3**. Définition.** Étant donnés des ensembles A et B,

$$A \prec B \text{ signifie:} \quad A \preceq B \text{ et } A \not\sim B.$$

Autrement dit, $A \prec B$ signifie qu'il existe au moins une injection $A \to B$, mais aucune bijection. Par exemple, les assertions $\varnothing \prec \{1, 2\} \prec \{1, 2, 3\}$ sont vraies, et si F est un ensemble fini alors $F \prec \mathbb{N}$. Autre exemple :

5.4**. Proposition.** $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$

Démonstration. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ implique $\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$ et 2.11 implique $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$. □

Attention : l'assertion $\mathbb{N} \prec \mathbb{Z}$ est fausse, puisqu'il existe une bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

On va montrer que "$\prec$" est transitive (voir partie (1) de 5.5). On pourrait penser que c'est évident, mais en fait c'est assez délicat puisqu'on a besoin de TSB pour le démontrer.

5.5**. Proposition.** *Quels que soient les ensembles A, B, C,*

(1) $A \prec B$ *et* $B \prec C \implies A \prec C$ *(transitivité de $\prec$)*
(2) $A \prec B$ *et* $B \preceq C \implies A \prec C$
(3) $A \preceq B$ *et* $B \prec C \implies A \prec C$

Démonstration. Démontrons l'implication (3). On procède par contradiction : supposons que $A \preceq B$ et $B \prec C$ et $\neg(A \prec C)$.

On a $A \preceq B$ et $B \prec C \implies A \preceq B$ et $B \preceq C \implies A \preceq C$, donc on obtient $A \preceq C$ et $\neg(A \prec C)$, donc $A \sim C$ (par définition de $\prec$). En particulier, la condition suivante est satisfaite : $A \preceq B$ et $B \preceq C$ et $C \preceq A$. On déduit :

$$B \preceq C \text{ et } (C \preceq A \text{ et } A \preceq B) \implies B \preceq C \text{ et } C \preceq B \overset{\text{TSB}}{\implies} B \sim C,$$

qui contredit l'hypothèse $B \prec C$. Donc l'implication (3) est vraie. Puisque

$$A \prec B \text{ et } B \prec C \implies A \preceq B \text{ et } B \prec C \overset{(3)}{\implies} A \prec C,$$

l'implication (1) est également vraie. La preuve de l'implication (2) est presqu'identique à celle de (3). ☐

Voici maintenant un corollaire du Théorème 5.1.

5.6. **Principe de Trichotomie.** *Toute paire d'ensembles A, B satisfait exactement une des conditions suivantes :*

$$A \prec B, \qquad A \sim B, \qquad B \prec A.$$

Démonstration. En vertu de 5.1, au moins une des trois conditions est satisfaite. Par définition de $\prec$, il n'est pas possible que ($A \prec B$ et $A \sim B$) soit vraie ou que ($A \sim B$ et $B \prec A$) soit vraie. Si ($A \prec B$ et $B \prec A$) est vraie alors par transitivité on obtient $A \prec A$, donc $A \not\sim A$, qui est absurde. ☐

6. Les cardinalités infinies

On a vu que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Si un ensemble A satisfait $A \sim \mathbb{N}$, on dit que A est "infini dénombrable"; si $A \sim \mathbb{R}$, on dit que A "a la puissance du continu." Est-ce que tout ensemble infini est d'un de ces deux types ?

Le principe de trichotomie a la conséquence suivante :

6.1. **Proposition.** *Supposons que A est un ensemble infini qui ne satisfait ni $A \sim \mathbb{N}$ ni $A \sim \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \prec A$.*

Démonstration. Puisque A est infini, on a $\mathbb{N} \preceq A$; puisque $\mathbb{N} \not\sim A$, on a donc

$$\mathbb{N} \prec A. \tag{1}$$

D'autre part, le principe de trichotomie appliqué à A et $\mathbb{R}$ implique

$$A \prec \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{R} \prec A \tag{2}$$

(puisque $A \not\sim \mathbb{R}$ par hypothèse). Enfin, (1) et (2) impliquent que A satisfait $\mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \prec A$. ☐

La question posée au début de la section se subdivise donc en deux :

(i) Existe-t-il un ensemble A tel que $\mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$?
(ii) Existe-t-il un ensemble A tel que $\mathbb{R} \prec A$?

On reviendra plus tard à la question (i) ; pour l'instant considérons (ii). Pendant un certain temps Cantor a essayé de montrer que $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^2$, mais il a fini par démontrer le contraire !

6.2. Théorème (Cantor)**.** $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$

Démonstration. On considère la représentation décimale des éléments de $I = [0, 1)$ (voir 2.10). On définit une fonction $f : I \times I \to I$ de la manière suivante. Si $(x, y) \in I \times I$, et si $x = 0.x_1x_2x_3\dots$ et $y = 0.y_1y_2y_3\dots$ sont les représentations décimales de x et y, alors on définit

$$f(x, y) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots.$$

Puisque l'expression $0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots$ détermine la paire (x, y) de manière unique, f est injective. Ainsi, $I^2 \preceq I$. La fonction $g : I \to I^2$, $g(x) = (x, 0)$, est injective, donc $I \preceq I^2$; alors TSB implique $I^2 \sim I$. On a $\mathbb{R} \sim I$ en vertu de 3.3, donc on a aussi $\mathbb{R}^2 \sim I^2$ (voir 1.10). On conclut que $\mathbb{R}^2 \sim I^2 \sim I \sim \mathbb{R}$. $\square$

6.3. Corollaire. $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ *pour tout* $n \geq 1$.

Donc, si on cherche un ensemble A tel que $\mathbb{R} \prec A$, on doit chercher ailleurs que parmi les $\mathbb{R}^n$. C'est encore Cantor qui a résolu ce problème, et la solution est d'une simplicité déconcertante :

6.4. Théorème (Cantor)**.** *Quel que soit l'ensemble A, on a* $A \prec \wp A$.

Démonstration. Soit A un ensemble. La fonction $A \to \wp A$, $a \mapsto \{a\}$, est injective, donc $A \preceq \wp A$. Pour montrer que $A \prec \wp A$, il suffit de montrer qu'il n'existe aucune fonction surjective $A \to \wp A$ (car alors $A \not\sim \wp A$).

Soit $f : A \to \wp A$ une fonction quelconque ; montrons que f n'est pas surjective. On définit un élément Y de $\wp A$ par

$$Y = \big\{\, a \in A \mid a \notin f(a) \,\big\}.$$

Montrons que $Y \notin f(A)$. Par contradiction : supposons que $Y \in f(A)$. Donc il existe $a_0 \in A$ tel que $f(a_0) = Y$. Il y a deux cas : soit $a_0 \in Y$, soit $a_0 \notin Y$. On montre que dans chaque cas on obtient une contradiction.

Si $a_0 \in Y = f(a_0)$ alors $a_0 \in f(a_0)$ donc $a_0 \notin \big\{\, a \in A \mid a \notin f(a) \,\big\} = Y$, donc $a_0 \in Y$ et $a_0 \notin Y$, contradiction.

Si $a_0 \notin Y = f(a_0)$ alors $a_0 \notin f(a_0)$ donc $a_0 \in \big\{\, a \in A \mid a \notin f(a) \,\big\} = Y$, donc $a_0 \in Y$ et $a_0 \notin Y$, contradiction.

Ceci montre que $Y \notin f(A)$, donc f n'est pas surjective. $\square$

6.5. Corollaire. $\mathbb{R} \prec \wp\mathbb{R} \prec \wp\wp\mathbb{R} \prec \wp\wp\wp\mathbb{R} \prec \dots$

Ceci répond à la question (ii). Voyons maintenant la question (i), qui demande si l'énoncé suivant est vrai ou faux :

(HC) *Il n'existe aucun ensemble A satisfaisant* $\mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$.

L'énoncé (HC) est appelé "l'hypothèse du continu." La question de savoir si il est vrai ou faux est très difficile et subtile. Cantor y a consacré une bonne partie de sa vie (et de sa santé mentale) sans parvenir à y répondre. La raison de l'échec de Cantor a été comprise au vingtième siècle :

6.6. **Théorème** (Gödel, 1938)**.** *Si ZFC est non contradictoire, alors $ZFC + (HC)$ est non contradictoire.*

6.7. **Théorème** (Cohen, 1963)**.** *Si ZFC est non contradictoire, alors $ZFC + \neg(HC)$ est non contradictoire.*

Ceci signifie que, à partir des axiomes de ZFC, il est impossible de prouver (HC) et il est impossible de prouver ¬(HC). On dit que l'assertion (HC) est *indécidable.*

7. Les parties de ℕ

Le principe de trichotomie implique qu'exactement une des conditions

$$\wp(\mathbb{N}) \prec \mathbb{R}, \quad \wp(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \prec \wp(\mathbb{N})$$

est vraie, et nous aimerions savoir laquelle. Le but de cette section est de démontrer :

7.1. **Théorème.** $\wp(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$

Considérons l'intervalle

$$J = [0, 2)$$

et rappelons que $\mathbb{R} \sim J$, donc il suffit de montrer que $J \sim \wp(\mathbb{N})$.

Chaque $x \in J$ a **au moins une** représentation binaire $x = x_0.x_1x_2x_3\dots$. Ici, on a $x_n \in \{0, 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$.

Chaque $x \in J$ a **au plus deux** représentations binaires. Si x a deux représentations, alors l'une d'elles a une queue de 0 et l'autre a une queue de 1. Par exemple,

$$\frac{11}{8} = \frac{1}{2^0} + \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1.0110000\dots$$

$$\frac{11}{8} = \frac{1}{2^0} + \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.01011111\dots$$

Remarquez qu'une représentation a une queue de 1 si et seulement si elle contient un nombre fini de 0. Nous déclarons que les représentations qui ont une queue de 1 sont *"illégales"*. Autrement dit,

> une représentation binaire est *légale* si et seulement si elle contient une infinité de 0.

On peut alors affirmer :

7.2. **Lemme.** *Soit* $J = [0, 2)$.

(1) *Chaque élément de* J *possède une et une seule représentation binaire légale.*

(2) *Si* $x_0.x_1x_2x_3\ldots$ *est la représentation binaire légale d'un élément de* J *alors* $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ *est une suite infinie d'éléments de* $\{0, 1\}$ *contenant une infinité de zéros.*

(3) *Si* $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ *est une suite infinie d'éléments de* $\{0, 1\}$ *contenant une infinité de zéros, alors il existe un et un seul* $x \in J$ *dont la représentation binaire légale est* $x = x_0.x_1x_2x_3\ldots$.

Chaque élément $x \in J$ détermine un ensemble A_x défini comme suit :

$$A_x = \big\{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n = 1 \,\big\}, \qquad \text{où } x = x_0.x_1x_2x_3\ldots \text{ est la représentation binaire légale de } x.$$

Puisque la suite $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ contient une infinité de zéros, il s'ensuit que $A_x^c = \mathbb{N} \setminus A_x$ est un ensemble infini. Donc on a défini une fonction

$$\begin{array}{rcl} f \;:\; J & \longrightarrow & \big\{\, A \in \wp(\mathbb{N}) \mid A^c \text{ est infini} \,\big\} \\ x & \longmapsto & A_x \end{array}$$

Par exemple, soit $x = 1/3 \in J$. Alors $x = x_0.x_1x_2x_3\ldots = 0.0101010101\ldots$ (périodique), donc $x_n = 1$ lorsque $n \in \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, donc $f(\frac{1}{3}) = A_{1/3} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres pairs positifs.

De plus, la partie (3) de 7.2 implique que pour chaque élément A de $\big\{\, A \in \wp(\mathbb{N}) \mid A^c \text{ est infini} \,\big\}$, il existe exactement un $x \in J$ tel que $f(x) = A$. Autrement dit, f est bijective. Donc :

$$\mathbb{R} \sim J \sim W \overset{\text{def}}{=} \big\{\, A \in \wp(\mathbb{N}) \mid A^c \text{ est infini} \,\big\}.$$

Remarquez que $W \subset \wp(\mathbb{N})$. Il ne reste plus qu'à montrer que :

$$\wp(\mathbb{N}) \setminus W \text{ est dénombrable} \tag{3}$$

En effet, si (3) est vrai alors 3.5 implique que $W \cup (\wp(\mathbb{N}) \setminus W) \sim W$, donc $\wp(\mathbb{N}) = W \cup (\wp(\mathbb{N}) \setminus W) \sim W \sim \mathbb{R}$. Démontrons (3). Remarquons d'abord que

$$\wp(\mathbb{N}) \setminus W = \big\{\, A \in \wp(\mathbb{N}) \mid A^c \text{ est fini} \,\big\}. \tag{4}$$

Soit $\wp_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Les deux fonctions

$$\begin{array}{rcl} C_1 \;:\; \big\{\, A \in \wp(\mathbb{N}) \mid A^c \text{ est fini} \,\big\} & \longrightarrow & \wp_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \\ A & \longmapsto & A^c \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} C_2 \;:\; \wp_{\text{fin}}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \big\{\, A \in \wp(\mathbb{N}) \mid A^c \text{ est fini} \,\big\} \\ A & \longmapsto & A^c \end{array}$$

satisfont $C_1 \circ C_2 = \text{id}$ et $C_2 \circ C_1 = \text{id}$, donc ces fonctions sont bijectives et conséquemment

$$\wp(\mathbb{N}) \setminus W = \big\{\, A \in \wp(\mathbb{N}) \mid A^c \text{ est fini} \,\big\} \sim \wp_{\text{fin}}(\mathbb{N}).$$

On a aussi
$$\wp_{\text{fin}}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \wp\{0,1,2,\ldots,n\},$$
donc $\wp_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc $\wp_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$ en vertu de 2.7. On a donc $\wp(\mathbb{N}) \setminus W \sim \wp_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$, ce qui démontre (3).

Ceci complète la démonstration du Théorème 7.1.

Remarque. Puisque $\wp(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, l'Hypothèse du Continu peut être reformulée comme suit :

(HC) *Il n'existe aucun ensemble A satisfaisant* $\mathbb{N} \prec A \prec \wp(\mathbb{N})$.

Il existe aussi une Hypothèse du Continu Généralisée, qui s'énonce ainsi :

(HCG) *S*i E est un ensemble infini alors il n'existe aucun ensemble A satisfaisant $E \prec A \prec \wp(E)$.

8. Réunions et produits d'ensembles infinis

Dans cette section nous montrons que plusieurs résultats que nous avons démontrés pour les ensembles dénombrables ou pour $\mathbb{R}$ sont en fait valables pour tous les ensembles infinis. Par exemple on sait que $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ et que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$; on va montrer dans cette section que $A^2 \sim A$ est vrai pour tout ensemble infini A.

8.1. **Lemme.** *Si A est un ensemble infini alors $A \times \{0,1\} \sim A$.*

Démonstration. Soit Ω l'ensemble des fonctions f satisfaisant
$$\exists_{X\subseteq A} \quad f \text{ est une injection de } X \times \{0,1\} \text{ vers } X.$$
Si $f, g \in \Omega$ satisfont $\operatorname{dom} f \subseteq \operatorname{dom} g$ et $\forall_{x\in\operatorname{dom} f}\ [f(x) = g(x)]$, on écrit $f \leq g$. Alors $(\Omega, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et le lecteur peut vérifier que $(\Omega, \leq)$ satisfait les hypothèses du Lemme de Zorn (c'est essentiellement la même preuve que dans la démonstration de 5.1). Donc il existe un élément maximal $f \in \Omega$. Alors $f : X \times \{0,1\} \to X$ est une injection et $X \subseteq A$.

Supposons que $A \setminus X$ est infini. Alors il existe une partie Y de $A \setminus X$ telle que $Y \sim \mathbb{N}$. On a alors $Y \times \{0,1\} \preceq Y \times Y \sim Y$, donc il existe une injection $g : Y \times \{0,1\} \to Y$. On peut alors définir une fonction $h : (X \cup Y) \times \{0,1\} \to (X \cup Y)$ par
$$h(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in X \times \{0,1\} \\ g(z), & \text{si } z \in Y \times \{0,1\}. \end{cases}$$
Il est clair que h est injective, que $h \in \Omega$ et que $f < h$, ce qui contredit la maximalité de f. Cette contradiction montre que $A \setminus X$ est fini.

Puisque A est infini et $A \setminus X$ est fini,
$$X \text{ est infini et } A \setminus X \text{ est dénombrable} \overset{3.5}{\Longrightarrow} (A \setminus X) \cup X \sim X,$$

donc $X \sim A$. Puisque $f : X \times \{0,1\} \to X$ est une injection on a $X \times \{0,1\} \preceq X$, donc $A \times \{0,1\} \sim X \times \{0,1\} \preceq X \sim A$. Puisque $A \preceq A \times \{0,1\}$ est évident, TSB donne $A \times \{0,1\} \sim A$. □

8.2. **Corollaire.** *Si $A \cup B$ est un ensemble infini et $A \preceq B$, alors $A \cup B \sim B$.*

Démonstration. Notons que B est infini (sinon A et B sont tous les deux finis, ce qui est impossible). Puisque $A \preceq B$, on peut choisir une injection $f : A \to B$. Alors on définit une fonctin $g : A \cup B \to B \times \{0,1\}$ par

$$g(x) = \begin{cases} (f(x), 0), & \text{si } x \in A \\ (x, 1), & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Il est clair que g est injective, donc $A \cup B \preceq B \times \{0,1\}$. Puisque B est infini, 8.1 implique que $B \times \{0,1\} \sim B$, donc $A \cup B \preceq B$. Il est évident que $B \preceq A \cup B$, donc TSB implique $A \cup B \sim B$. □

8.3. **Corollaire.** *Si $A \prec B$ et B est infini, alors $B \setminus A \sim B$.*

Démonstration. Notons que $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ est infini.

Si $B \setminus A \preceq A$ alors 8.2 implique que $(B \setminus A) \cup A \sim A$, donc $A \cup B \sim A \prec B \preceq A \cup B$, ce qui est impossible (voir 5.5).

Puisque $B \setminus A \preceq A$ est impossible, le principe de trichotomie implique que $A \prec B \setminus A$. Alors 8.2 implique que $A \cup (B \setminus A) \sim B \setminus A$, donc $A \cup B \sim B \setminus A$. Mais 8.2 implique aussi que $A \cup B \sim B$, donc $B \setminus A \sim B$. □

8.4. **Théorème.** *Si A est un ensemble infini alors $A^2 \sim A$.*

Démonstration. Soit Ω l'ensemble des fonctions f satisfaisant

$$\exists_{X \subseteq A} \quad f \text{ est une injection de } X^2 \text{ vers } X.$$

Alors $(\Omega, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné, où $\leq$ est définie comme dans les démonstrations de 5.1 et de 8.1. Le lecteur peut vérifier que $(\Omega, \leq)$ satisfait les hypothèses du Lemme de Zorn (voir la démonstration de 5.1). Donc il existe un élément maximal $f \in \Omega$. Alors $f : X^2 \to X$ est une injection et $X \subseteq A$. Remarquons que $X^2 \sim X$ en vertu de TSB (on a $X^2 \preceq X$, et $X \preceq X^2$ est évident). Montrons que

$$A \setminus X \preceq X. \tag{5}$$

Par contradiction, supposons que l'assertion (5) est fausse. Alors le Principe de Trichotomie implique que $X \prec A \setminus X$. Conséquemment, il existe un sous-ensemble $Y \subseteq A \setminus X$ tel que $X \sim Y$. On a alors $Y^2 \sim X^2 \sim X \sim Y$. Puisque $X \cap Y = \varnothing$, les quatre ensembles

$$X \times X, \quad X \times Y, \quad Y \times X, \quad Y \times Y$$

sont deux à deux disjoints et, clairement, la réunion de ces ensembles est $(X \cup Y)^2$. Si on définit $W = (X \times Y) \cup (Y \times X) \cup (Y \times Y)$ alors

$$(X \cup Y)^2 = X^2 \cup W \quad \text{et} \quad X^2 \cap W = \varnothing. \tag{6}$$

De plus, on a
$$X \times Y \sim Y \quad \text{et} \quad Y \times X \sim Y \quad \text{et} \quad Y \times Y \sim Y,$$
donc 8.2 implique $W \sim Y$. On choisit une bijection $g : W \to Y$. L'énoncé (6) et les injections $f : X^2 \to X$ et $g : W \to Y$ nous permettent de définir une fonction $h : (X \cup Y)^2 \to X \cup Y$ par
$$h(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in X^2 \\ g(z), & \text{si } z \in W. \end{cases}$$
Il est clair que h est injective, donc $h \in \Omega$ et $f < h$, ce qui contredit la maximalité de f. Cette contradiction montre que (5) est vraie.

Puisque $(A \setminus X) \cup X = A$ est infini et $A \setminus X \preceq X$, 8.2 implique que $(A \setminus X) \cup X \sim X$, donc $A \sim X$. On conclut que $A^2 \sim X^2 \sim X \sim A$. □

8.5. **Corollaire.** *Si A est un ensemble infini alors $A^n \sim A$ pour tout entier $n \geq 1$.*

8.6. **Exercice.** Montrez que si $V \neq 0$ est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{Q}$, alors $V \sim \mathbb{N}$ (*indice :* on a un isomorphisme d'espaces vectoriels $V \cong \mathbb{Q}^n$ où n est un entier positif). Plus généralement, montrez que si $V \neq 0$ est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps infini K, alors $V \sim K$.

8.7. **Théorème.** *Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Si M est un ensemble infini tel que $I \preceq M$ et $\forall_{i \in I} (A_i \preceq M)$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \preceq M$.*

Démonstration. Exactement comme dans la démonstration de 2.7, l'axiome du choix nous permet de montrer l'existence d'une injection $\bigcup_{i \in I} A_i \to I \times M$. Alors
$$\bigcup_{i \in I} A_i \preceq I \times M \preceq M \times M \sim M$$
en vertu de 2.5 et 8.4. □

Avant d'aller plus loin, rappelons un fait qu'on a déjà vu :

8.8. **Lemme.** *S'il existe une surjection $X \to Y$, alors $Y \preceq X$.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ une surjection. En vertu de l'axiome du choix, il existe une fonction $g : Y \to X$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ (voir la section sur l'axiome du choix dans les notes sur ZFC). Alors $f \circ g$ est injective, donc g est injective, donc $Y \preceq X$. □

8.9. **Notation.** Étant donné un ensemble A, $\wp_{\mathrm{fin}}(A)$ désigne l'ensemble des parties finies de A et $\wp_{\leq n}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A qui contiennent au plus n éléments. On a donc $\wp_{\mathrm{fin}}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \wp_{\leq n}(A)$.

8.10. **Proposition.** *Si A est un ensemble infini, alors $\wp_{\mathrm{fin}}(A) \sim A$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. La fonction $f : A^n \to \wp_{\leq n}(A)$ définie par $f(a_1, \ldots, a_n) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est surjective, donc $\wp_{\leq n}(A) \preceq A^n$ (voir 8.8). En vertu de 8.5 on a $A^n \sim A$, donc $\wp_{\leq n}(A) \preceq A$. On a donc

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \wp_{\leq n}(A) \preceq A.$$

On a aussi $\mathbb{N} \preceq A$, puisque A est infini. Donc 8.7 implique $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \wp_{\leq n}(A) \preceq A$. Puisque $\wp_{\text{fin}}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \wp_{\leq n}(A)$, on obtient $\wp_{\text{fin}}(A) \preceq A$. Il est clair que $A \preceq \wp_{\text{fin}}(A)$, donc TSB implique $\wp_{\text{fin}}(A) \sim A$. $\square$

8.11. **Corollaire.** *Soit V un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps K, et soit $\mathcal{B}$ une base de V.*

(a) *si $K \preceq \mathcal{B}$ alors $V \sim \mathcal{B}$*
(b) *si $\mathcal{B} \preceq K$ alors $V \sim K$*
(c) *si $K \prec V$ alors $V \sim \mathcal{B}$.*

Démonstration. Si F est une partie finie de $\mathcal{B}$ alors $\langle F \rangle$ désigne le sous-espace de V engendré par F. Si $v \in V$ alors v est une combinaison linéaire (finie) des vecteurs de $\mathcal{B}$, donc il existe $F \in \wp_{\text{fin}}(\mathcal{B})$ tel que $v \in \langle F \rangle$. Ceci implique que

$$V = \bigcup_{F \in \wp_{\text{fin}}(\mathcal{B})} \langle F \rangle. \tag{7}$$

Puisque V est de dimension infinie, $\mathcal{B}$ est un ensemble infini et 8.10 implique que $\wp_{\text{fin}}(\mathcal{B}) \sim \mathcal{B}$. D'autre part, si $F \in \wp_{\text{fin}}(\mathcal{B})$ et F contient n vecteurs alors on a un isomorphisme d'espaces vectoriels $\langle F \rangle \cong K^n$, donc $\langle F \rangle \sim K^n$.

Si $K \preceq \mathcal{B}$ alors pour chaque entier $n > 0$ on a $K^n \preceq \mathcal{B}^n \sim \mathcal{B}$, donc $\langle F \rangle \preceq \mathcal{B}$ pour tout $F \in \wp_{\text{fin}}(\mathcal{B})$. Comme on a aussi $\wp_{\text{fin}}(\mathcal{B}) \sim \mathcal{B}$, on obtient $V \preceq \mathcal{B}$ de (7) et 8.7. Puisque $\mathcal{B} \subseteq V$ on a aussi $\mathcal{B} \preceq V$, donc TSB implique $V \sim \mathcal{B}$ et (a) est démontré.

Si $\mathcal{B} \preceq K$ alors K est infini, donc $K^n \sim K$ pour tout n, donc $\langle F \rangle \sim K$ pour tout $F \in \wp_{\text{fin}}(\mathcal{B})$. On a aussi $\wp_{\text{fin}}(\mathcal{B}) \sim \mathcal{B} \preceq K$, on obtient $V \preceq K$ de (7) et 8.7. Il est clair que $K \preceq V$, donc TSB implique $V \sim K$ et (b) est démontré.

L'assertion (c) est une conséquence de (a) et (b) : supposons que $K \prec V$. Alors (b) implique $\neg(\mathcal{B} \preceq K)$, donc le principe de trichotomie implique que $K \prec \mathcal{B}$ et on obtient $V \sim \mathcal{B}$ de (a). $\square$

8.12. **Exercice.** Considérez l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{Q}$.

(1) Montrez que cet espace vectoriel est de dimension infinie (voir 8.6).
(2) On sait que tout espace vectoriel possède une base. Montrez que si $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$, alors $\mathcal{B} \sim \mathbb{R}$.

8.13. **Exercice.** Soit K un corps **infini** (par exemple $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) et soit $V \neq 0$ un espace vectoriel de dimension **finie** sur K. Soit S l'ensemble des sous-espaces de V,

$$S = \big\{ U \in \wp(V) \mid U \text{ est un sous-espace de } V \big\}.$$

Montrez que $S \preceq K$ (*indice :* pouvez-vous définir une surjection $\wp_{\text{fin}}(V) \to S$?) Remarquez que si $\dim V = 1$ alors S contient seulement deux éléments. Montrez que si $\dim V > 1$ alors $S \sim K$.

8.14. **Exercice.** Montrez que si A est un ensemble infini alors l'ensemble des parties infinies de A est équipotent à $\wp(A)$. Autrement dit, montrez :

$$\wp(A) \setminus \wp_{\text{fin}}(A) \;\sim\; \wp(A).$$

9. 2^U

Soit U un ensemble.

On s'intéresse à l'ensemble $\{0,1\}^U$ de toutes les fonctions de U vers $\{0,1\}$. Remarquez qu'on peut écrire 2^U au lieu de $\{0,1\}^U$, car $2 = \{0,1\}$.

Pour chaque sous-ensemble A de U, on définit la fonction $\chi_A : U \to \{0,1\}$ par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \qquad \text{pour chaque } x \in U.$$

On dit que $\chi_A : U \to \{0,1\}$ est la *fonction caractéristique* de A. Puisque χ_A est un élément de l'ensemble $\{0,1\}^U$, une fonction $F : \wp(U) \to \{0,1\}^U$ est définie par :

$$F(A) = \chi_A, \qquad \text{pour chaque } A \in \wp(U).$$

Réciproquement, si $f \in \{0,1\}^U$ alors l'ensemble

$$f^{-1}(\{1\}) = \{\, x \in U \mid f(x) = 1 \,\}$$

est un élément de $\wp(U)$. Donc une fonction $G : \{0,1\}^U \to \wp(U)$ est définie par :

$$G(f) = f^{-1}(\{1\}), \qquad \text{pour chaque } f \in \{0,1\}^U.$$

9.1. **Exercice.** Vérifiez que $G \circ F$ est la fonction identité de $\wp(U)$ et que $F \circ G$ est la fonction identité de $\{0,1\}^U$.

Cet exercice implique que $F : \wp(U) \to \{0,1\}^U$ est bijective, ce qui démontre :

9.2. **Proposition.** *Quel que soit l'ensemble U, on a $\wp(U) \sim 2^U$.*