

Logique propositionnelle

1. LES PROPOSITIONS ET LES CONNECTIFS

Une *proposition* est une phrase qui est soit vraie, soit fausse.

1.1. Exemples.

- (1) “*Le tableau est noir*” est une proposition puisque cette phrase est soit vraie, soit fausse.
- (2) L’expression mathématique “ $2^5 - 1 = 24$ ” est une proposition, car c’est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse (en fait c’est une proposition fausse).
- (3) L’expression mathématique “ $2^5 - 1$ ” n’est pas une proposition. En effet, “ $2^5 - 1$ ” est le nombre 31, et 31 n’est ni vrai ni faux.

Les mots *proposition*, *affirmation*, *assertion* sont synonymes.

Lorsqu’une proposition est vraie, on dit que sa *valeur de vérité* est **V** ; lorsqu’elle est fausse, sa valeur de vérité est **F**.

Les propositions sont souvent représentées par des lettres. Par exemple, on peut écrire :

$$A = \text{“le nombre 6 est pair”}, \quad B = \text{“le nombre 4 est impair”}, \quad C = \text{“}\sqrt[3]{100} < 2\text{”}.$$

Alors la proposition A est vraie, B est fausse et C est vraie.

LES CINQ CONNECTIFS LOGIQUES

Connectif de conjonction (\wedge). La formule $X \wedge Y$ se lit “ X et Y ”. Le connectif \wedge est défini par la table suivante, appelée la *table de vérité* de \wedge :

X	Y	$X \wedge Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.2. **Exemple.** La phrase “6 est pair et 4 est impair” est fausse, car cette phrase est

$$(6 \text{ est pair}) \wedge (4 \text{ est impair}) = \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$$

(la deuxième ligne de la table ci-dessus nous indique que $\mathbf{V} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$).

Connectif de disjonction (\vee). La formule $X \vee Y$ se lit “ X ou Y ”.

X	Y	$X \vee Y$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3. **Exemple.** La phrase “6 est pair ou 4 est impair” est **vraie**, car cette phrase est

$$(6 \text{ est pair}) \vee (4 \text{ est impair}) = \mathbf{V} \vee \mathbf{F} = \mathbf{V}.$$

Connectif de négation (\neg). La formule $\neg X$ se lit “non X ”.

X	$\neg X$
\mathbf{V}	\mathbf{F}
\mathbf{F}	\mathbf{V}

Lorsqu’on veut remplacer une formule $\neg X$ par une phrase française, on peut dire “il est faux que X ” plutôt que “non X ”. Par exemple, si X est la proposition “tout entier impair est divisible par 3”, alors $\neg X$ est “il est faux que tout entier impair est divisible par 3”. (Dans cet exemple, X est \mathbf{F} et $\neg X$ est \mathbf{V} .)

Connectif d’implication (\Rightarrow). La formule $X \Rightarrow Y$ est appelée une *implication* ; elle se lit “ X implique Y ”, ou encore “si X alors Y ”. On dit que X est l’*hypothèse* de cette implication et que Y est sa *conclusion*. L’implication est définie par :

X	Y	$X \Rightarrow Y$
\mathbf{V}	\mathbf{V}	\mathbf{V}
\mathbf{V}	\mathbf{F}	\mathbf{F}
\mathbf{F}	\mathbf{V}	\mathbf{V}
\mathbf{F}	\mathbf{F}	\mathbf{V}

Retenir :

<input type="checkbox"/> Le seul cas où l’implication est fautive est celui où l’hypothèse est vraie et la conclusion est fautive. <input type="checkbox"/> L’implication est vraie à chaque fois que l’hypothèse est fautive. <input type="checkbox"/> L’implication est vraie à chaque fois que la conclusion est vraie.
--

1.4. **Exemple.** En campagne électorale, un politicien déclare :

“Si je suis élu, il y aura une réduction d’impôts.”

Supposons qu’il n’est pas élu et qu’il n’y a pas réduction d’impôts. Alors peut-on l’accuser d’avoir menti ?

Intuitivement, on voit bien qu’il n’a pas menti, puisqu’il n’avait rien promis du tout dans le cas où il ne serait pas élu. Donc notre intuition nous dit que la phrase qu’il a prononcée est vraie (sinon il aurait menti). Cette intuition est en accord avec la table de vérité, puisque la phrase prononcée est une implication du type $(\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F})$, qui est \mathbf{V} selon la table.

1.5. **Exemple.** La phrase

$$\text{Si } 2^3 = 16 \text{ alors } 1 + 1 = 3$$

est-elle vraie ou fautive ? C’est un autre exemple d’implication du type “ $\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F}$ ”, donc cette phrase est vraie.

1.6. **Exemple.** Montrons que l’implication $x > 1 \Rightarrow x^2 > 3$ est vraie **pour tout** $x \in \mathbb{Z}$. En effet, si $x \in \mathbb{Z}$ alors x satisfait $x \leq 1$ ou $x > 1$.

- Dans le premier cas ($x \leq 1$), on a une implication avec hypothèse \mathbf{F} , donc l’implication est \mathbf{V} .

- Dans le deuxième cas ($x > 1$), on a $x \geq 2$, donc $x^2 \geq 4$, donc $x^2 > 3$, donc on a une implication avec conclusion **V**, donc l'implication est **V**.

Ainsi, l'implication est **V** pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

Le connectif biconditionnel (\Leftrightarrow).

La formule $X \Leftrightarrow Y$ se lit “ X si et seulement si Y ”.

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Retenir :

- La formule $X \Leftrightarrow Y$ est vraie lorsque X et Y ont la même valeur de vérité (ce qui signifie que X et Y sont toutes les deux **V** ou toutes les deux **F**).
- La formule $X \Leftrightarrow Y$ est fausse lorsque X et Y ont des valeurs de vérité différentes.

Nous verrons plus tard que la formule $X \Leftrightarrow Y$ est équivalente à $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$.

Exercices. Répondez par **V** ou **F**.

- (1) $2^3 = 8$ et $5 \times 6 = 40$.
- (2) $2 + 3 = 6$ ou $2 + 7 = 9$.
- (3) Si $2 + 7 = 9$ alors $2 + 3 = 9$.
- (4) $2 + 7 = 5$ si et seulement si $2 + 3 = 9$.
- (5) Si 1027 est un entier positif alors $1 + 1 = 2$.
- (6) Si $17^{231} + 2$ est un nombre premier alors $3 + 4 = 7$.
- (7) Si $3 + 4 = 13$ alors $17^{231} + 2$ est un nombre premier.
- (8) Si $17^{231} + 2$ est un nombre premier ou $3 + 4 = 7$, alors $2^5 = 8$.
- (9) Si $17^{231} + 2$ est un nombre premier alors $17^{231} + 2$ est un nombre premier.
- (10) Si ($17^{231} + 2$ est un nombre premier si et seulement si $1 + 1 = 2$), alors $17^{231} + 2$ est un nombre premier.

Formules complexes ou atomiques. Une formule logique qui contient au moins un connectif est appelée une *formule complexe*, ou encore une *formule composée*. Une formule qui n'a aucun connectif est appelée une *formule atomique* ou, plus simplement, un *atome*. Par exemple, X est une formule atomique et $\neg X$ est une formule complexe. On considère aussi que les symboles \mathbf{V} et \mathbf{F} sont des formules atomiques. La formule $X \vee \mathbf{F}$ est complexe.

Connectif principal. Considérons la formule $\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$. On dit que \Rightarrow est le *connectif principal* de cette formule. On entend par là que $\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$ est une implication : son hypothèse est $\neg Z$ et sa conclusion est $\neg(X \wedge Y)$. Autrement dit, $\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$ est une formule du type $\varphi \Rightarrow \psi$. Les formules $\neg Z$ et $\neg(X \wedge Y)$ sont appelées les *composantes immédiates* de la formule.

Chaque formule complexe possède **exactement un** connectif principal, et ce connectif détermine soit une, soit deux composantes immédiates (dans le cas de \neg il n'y a qu'une composante, dans les autres cas il y en a deux). Quelques exemples :

	formule	connectif principal	composantes immédiates	
1	$\neg Z \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$	\Rightarrow	$\neg Z$	$\neg(X \wedge Y)$
2	$(X \vee Y) \wedge Z$	\wedge	$(X \vee Y)$	Z
3	$X \vee (Y \wedge Z)$	\vee	X	$(Y \wedge Z)$
4	$\neg(X \vee (Y \wedge Z))$	\neg	$(X \vee (Y \wedge Z))$	

Remarquez que les composantes immédiates sont elles-mêmes des formules.

Tables de vérité. Si $X = \mathbf{V}$, $Y = \mathbf{V}$ et $Z = \mathbf{F}$, quelle est la valeur de vérité de la formule $(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$?

$$(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$$

$$(\mathbf{V} \wedge \mathbf{F}) \Rightarrow \neg(\mathbf{V} \wedge \mathbf{V})$$

$$\mathbf{F} \Rightarrow \neg \mathbf{V}$$

$$\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F}$$

$$\mathbf{V}$$

Ainsi, lorsque $(X, Y, Z) = (\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{F})$, la formule $(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$ est \mathbf{V} . On vient de calculer la deuxième ligne de la table suivante :

X	Y	Z	$(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$
\mathbf{V}	\mathbf{V}	\mathbf{V}	\mathbf{F}
\mathbf{V}	\mathbf{V}	\mathbf{F}	\mathbf{V}
\mathbf{V}	\mathbf{F}	\mathbf{V}	\mathbf{V}
\mathbf{V}	\mathbf{F}	\mathbf{F}	\mathbf{V}
\mathbf{F}	\mathbf{V}	\mathbf{V}	\mathbf{V}
\mathbf{F}	\mathbf{V}	\mathbf{F}	\mathbf{V}
\mathbf{F}	\mathbf{F}	\mathbf{V}	\mathbf{V}
\mathbf{F}	\mathbf{F}	\mathbf{F}	\mathbf{V}

La table ci-dessus est la *table de vérité* de $(X \wedge Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$. Toute formule a une table de vérité.

2. ÉQUIVALENCE DE FORMULES

2.1. **Définition.** Deux formules sont *équivalentes* si elles ont la même table de vérité. Pour indiquer que des formules φ et ψ sont équivalentes, on écrit $\varphi \equiv \psi$.

2.2. **Exemple.** Les formules $X \Rightarrow Y$ et $\neg X \vee Y$ ont la même table de vérité :

X	Y	$X \Rightarrow Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

X	Y	$\neg X \vee Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

donc les deux formules ci-dessus sont équivalentes : $X \Rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$.

2.3. **Exemple.** Les tables

X	Y	$X \Rightarrow Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

X	Y	$Y \Rightarrow X$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

montrent que les formules $X \Rightarrow Y$ et $Y \Rightarrow X$ ne sont pas équivalentes : $X \Rightarrow Y \not\equiv Y \Rightarrow X$.

2.4. **Exemple.** Les tables

X	$\neg\neg X$
V	V
F	F

X	X
V	V
F	F

montrent que $\neg\neg X \equiv X$.

2.5. **Exemple.** Les tables

X	Y	$(X \vee \neg X) \wedge Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

X	Y	Y
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

montrent que $(X \vee \neg X) \wedge Y \equiv Y$.

2.6. **Exemple.** Les tables de vérité

X	Y	$(X \vee \mathbf{V}) \wedge Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

X	Y	Y
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

montrent que $(X \vee \mathbf{V}) \wedge Y \equiv Y$.

Voici maintenant une liste d'équivalences très utiles.

	Équivalence	Nom ou commentaire
(1)	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
(3)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
(4)	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	
(5)	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$	Tiers exclu
(6)	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	Contradiction
(7)	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$	\mathbf{F} est neutre pour \vee
(8)	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	\mathbf{V} est neutre pour \wedge
(9)	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$	\mathbf{V} est “absorbant” pour \vee
(10)	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	\mathbf{F} est “absorbant” pour \wedge
(11)	$P \vee P \equiv P$	Idempotence
(12)	$P \wedge P \equiv P$	Idempotence
(13)	$\neg \neg P \equiv P$	Double négation
(14)	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	Commutativité de \vee
(15)	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	Commutativité de \wedge
(16)	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	Associativité de \vee
(17)	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	Associativité de \wedge
(18)	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Distributivité de \vee sur \wedge
(19)	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Distributivité de \wedge sur \vee
(20)	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	Loi de De Morgan
(21)	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	Loi de De Morgan

2.7. Exercice. Chacune des équivalences ci-dessus peut être prouvée en utilisant les tables de vérité, comme dans les exemples qu'on a vus. Par exemple, prouvez la distributivité de \vee sur \wedge .

PREUVES PAR MANIPULATIONS ALGÈBRIQUES.

Nous allons maintenant utiliser une nouvelle méthode pour démontrer des équivalences de formules $\varphi \equiv \psi$. Au lieu de vérifier que les deux formules ont la même table de vérité on va plutôt procéder par “manipulations algébriques”, en utilisant des équivalences du tableau ci-dessus.

Voici deux exemples de preuves par manipulations algébriques.

Montrons que $\neg(X \Rightarrow Y) \equiv (X \wedge \neg Y)$:

$$\begin{aligned} \neg(X \Rightarrow Y) &\stackrel{(1)}{\equiv} \neg(\neg X \vee Y) \\ &\stackrel{(21)}{\equiv} \neg \neg X \wedge \neg Y \\ &\stackrel{(13)}{\equiv} X \wedge \neg Y \end{aligned}$$

Voici une preuve que $X \vee (X \wedge Y) \equiv X$:

$$\begin{aligned} X \vee (X \wedge Y) &\stackrel{(8)}{\equiv} (X \wedge \mathbf{V}) \vee (X \wedge Y) \\ &\stackrel{(19)}{\equiv} X \wedge (\mathbf{V} \vee Y) \\ &\stackrel{(9)}{\equiv} X \wedge \mathbf{V} \\ &\stackrel{(8)}{\equiv} X \end{aligned}$$

Les équivalences de formules sont parfois utiles pour travailler avec des phrases écrites en français. Voici quelques exemples.

2.8. Exemple. L'équivalence $\neg(X \Rightarrow Y) \equiv (X \wedge \neg Y)$ nous permet d'affirmer que la négation de la phrase

$$\text{si } x \neq 0 \text{ alors } x = 1$$

est la phrase : $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

2.9. Exemple. Cherchons la négation de la phrase

$$\text{"}f \text{ est continue et } f(0) = 0\text{"}.$$

Si vous répondez " f est discontinue et $f(0) \neq 0$ ", vous commettez une erreur. En effet, une des lois de De Morgan dit que $\neg(X \wedge Y) \equiv (\neg X \vee \neg Y)$, donc :

$$\begin{aligned} \neg(f \text{ est continue et } f(0) = 0) &\equiv \neg(f \text{ est continue}) \text{ ou } \neg(f(0) = 0) \\ &\equiv f \text{ est discontinue ou } f(0) \neq 0, \end{aligned}$$

donc la bonne réponse est " f est discontinue ou $f(0) \neq 0$ ".

2.10. Exercice. Quelle est la négation de la phrase " $x = 1$ ou $y = 3$ " ?

3. CONTRAPOSÉE ET RÉCIPROQUE D'UNE IMPLICATION

3.1. Définition. La *contraposée* de $(X \Rightarrow Y)$ est $(\neg Y \Rightarrow \neg X)$.

La *réci-proque* de $(X \Rightarrow Y)$ est $(Y \Rightarrow X)$.

Comparons les tables de vérité des trois formules $X \Rightarrow Y$, $\neg Y \Rightarrow \neg X$ et $Y \Rightarrow X$:

X	Y	$X \Rightarrow Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Contraposée de $X \Rightarrow Y$		
X	Y	$\neg Y \Rightarrow \neg X$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Réci-proque de $X \Rightarrow Y$		
X	Y	$Y \Rightarrow X$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Ces tables de vérité montrent que :

$X \Rightarrow Y$ est équivalente à sa contraposée mais pas à sa réci-proque.

3.2. Exemple. Les deux phrases :

- (i) *Si une matrice est inversible, alors elle n'a aucune ligne nulle.*
- (ii) *Si une matrice a une ligne nulle, alors elle n'est pas inversible.*

sont deux manières de dire la même chose. Ceci illustre le fait qu'une implication est équivalente à sa contraposée (chacune des phrases est la contraposée de l'autre). Comparez ensuite les deux phrases suivantes:

- (i) *Si une matrice est inversible, alors elle n'a aucune ligne nulle.*
- (iii) *Si une matrice n'a aucune ligne nulle, alors elle est inversible.*

Remarquez que (iii) est la réci-proque de (i). Ces deux phrases ne disent pas la même chose ; en fait, (i) est **V** et (iii) est **F**.

Exercices. Pour chacune des implications suivantes, donnez (a) la contraposée et (b) la réci-proque.

- (1) Si $x = 0$ alors $xy = 0$.
- (2) Si $s > 0$ alors $s^2 > 0$. (Remarque : la négation de $x > 0$ est $x \leq 0$.)
- (3) Si d est un diviseur de 6, alors d est un diviseur de 30.
- (4) Si la matrice A est inversible, alors elle est carrée et ne contient aucune ligne nulle.
- (5) Si deux entiers sont pairs, alors leur somme est paire.
- (6) Si une fonction est différentiable en $x = 2/3$, alors elle est continue en $x = 2/3$.
- (7) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge et sa limite est 0.
- (8) Si les fonctions f et g sont continues, alors la fonction $f - g$ est continue.

4. OMISSION DE PARENTHÈSES

Pourquoi l'expression $8 \div 4 \div 2$ est-elle ambiguë, tandis que $8 + 4 + 2$ ne l'est pas ? L'ambiguïté de $8 \div 4 \div 2$ vient du fait que cette expression peut être interprétée de deux manières : $(8 \div 4) \div 2 = 2 \div 2 = 1$, ou $8 \div (4 \div 2) = 8 \div 2 = 4$. Autrement dit, on ne sait pas si $8 \div 4 \div 2$ est égal à 1 ou à 4. Dans le cas de $8 + 4 + 2$, les deux interprétations donnent le même résultat : $(8 + 4) + 2 = 14$ et $8 + (4 + 2) = 14$, donc on sait que $8 + 4 + 2$ est égal à 14 et il n'y a pas d'ambiguïté. En résumé, il est permis d'écrire $8 + 4 + 2$ sans parenthèses parce que l'addition est une opération associative : $(a + b) + c = a + (b + c)$ quels que soient a, b, c . Mais la division n'est pas associative, donc on doit écrire soit $(8 \div 4) \div 2$, soit $8 \div (4 \div 2)$.

Le connectif \wedge est associatif, ce qui signifie que $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$. Ceci nous donne le droit d'écrire $X \wedge Y \wedge Z$ sans parenthèses. On peut aussi écrire $T \wedge X \wedge Y \wedge Z$ sans parenthèses, parce que les cinq formules

$$(T \wedge X) \wedge (Y \wedge Z), \quad [(T \wedge X) \wedge Y] \wedge Z, \quad [T \wedge (X \wedge Y)] \wedge Z, \quad T \wedge [(X \wedge Y) \wedge Z], \quad T \wedge [X \wedge (Y \wedge Z)]$$

sont toutes équivalentes. Les connectifs \vee et \Leftrightarrow sont eux aussi associatifs, donc on peut écrire $X \vee Y \vee Z$ et $X \Leftrightarrow Y \Leftrightarrow Z$ sans parenthèses. Ainsi, le fait que \vee soit associatif nous permet d'écrire $(X \Rightarrow Y) \vee (X \Leftrightarrow Z) \vee (X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z)$, et puisque \Leftrightarrow est associatif on peut écrire $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \Leftrightarrow Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \Leftrightarrow (Y \wedge Z)$.

Par contre, $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z \not\equiv X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$, donc \Rightarrow n'est pas associatif et les parenthèses sont obligatoires : il n'est pas permis d'écrire $X \Rightarrow Y \Rightarrow Z$.

Remarquez aussi que la formule $X \vee Y \wedge Z$ n'est pas "légale" : il faut écrire soit $(X \vee Y) \wedge Z$, soit $X \vee (Y \wedge Z)$.

On adopte la convention suivante, qui nous permet d'omettre certaines parenthèses :

Le connectif de négation \neg a un niveau de priorité plus élevé que les autres connectifs.

Par exemple, $\neg X \wedge Y$ signifie $(\neg X) \wedge Y$ et non $\neg(X \wedge Y)$. Remarquez qu'on a déjà utilisé cette convention sans le dire : par exemple lorsqu'on a dit que la contraposée de $X \Rightarrow Y$ est $\neg Y \Rightarrow \neg X$, on n'a pas eu besoin d'écrire $(\neg Y) \Rightarrow (\neg X)$.

5. TAUTOLOGIES ET CONTRADICTIONS

5.1. Définitions.

- Une *tautologie* est une formule dont la table de vérité ne contient que des “**V**”.
- Une *contradiction* est une formule dont la table de vérité ne contient que des “**F**”.

Remarquez que la plupart des formules ne sont ni des tautologies ni des contradictions.

5.2. Exemple. La table

X	Y	$(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

montre que $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$ est une tautologie.

5.3. Exemple. La table

X	$X \vee \neg X$
V	V
F	V

montre que $X \vee \neg X$ est une tautologie.

5.4. Exemple. La table

X	$X \wedge \neg X$
V	F
F	F

montre que $X \wedge \neg X$ est une contradiction.

5.5. Exercice. La formule $X \Rightarrow \neg X$ est-elle une contradiction ? (Ne répondez pas trop vite !)

Remarque. La formule **V** est une tautologie (quelles que soient les valeurs de vérité de X, Y, Z, \dots , la formule est vraie). Similairement, la formule **F** est une contradiction. En fait :

*Une tautologie est une formule équivalente à la formule **V** ;
une contradiction est une formule équivalente à la formule **F**.*

5.6. Exercice. À l'aide de tables de vérité, décidez si les formules suivantes sont des tautologies, contradictions, ou ni l'une ni l'autre :

- (a) $(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)$ (b) $(X \Rightarrow Y) \vee (Y \Rightarrow X)$ (c) $(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)$
 (d) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$
 (e) $(A \Rightarrow (B \vee C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))$

Quelques méthodes de preuve

6. PREUVE DE $P \Rightarrow Q$

Nous allons voir deux techniques : la preuve directe et la preuve de la contraposée.

PREUVE DIRECTE

On suppose que P est vraie et on en déduit que Q est vraie.

Assertion: $P \Rightarrow Q$
Preuve. Supposons que P est vraie.
 \vdots
 Donc Q est vraie. □

Voici un exemple.

6.1. Proposition. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $-1 < x < 0$ alors $x^3 > x$.*

Preuve. Supposons que $-1 < x < 0$.

Donc $x > -1$ et $x < 0$. En multipliant l'inégalité $x > -1$ par le nombre négatif x , on obtient

$$x^2 < -x.$$

En multipliant l'inégalité $x > -1$ par -1 , on obtient

$$-x < 1.$$

Donc $x^2 < -x < 1$, donc $x^2 < 1$. En multipliant cette dernière inégalité par x , on obtient enfin $x^3 > x$. □

PREUVE DE LA CONTRAPOSÉE

Pour prouver que $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de prouver que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie. En effet ces deux formules sont équivalentes, donc si une est vraie alors l'autre l'est aussi. La *preuve de la contraposée* consiste à faire une preuve directe de l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Assertion: $P \Rightarrow Q$
Preuve. Supposons que $\neg Q$ est vraie.
 \vdots
 Donc $\neg P$ est vraie.
 Ceci montre que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie, donc $P \Rightarrow Q$ est vraie. □

6.2. Proposition. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve. La contraposée est:

(1) *Si n est impair, alors n^2 est impair.*

On fait une preuve directe de (1). Supposons que n est impair. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2a + 1$. Alors $n^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$, donc $n^2 = 2N + 1$ où N est un entier (en fait $N = 2a^2 + 2a$), donc n^2 est impair. Ceci démontre (1), donc la proposition est démontrée. \square

Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Démontrez l'implication

Si ab est pair, alors au moins un des entiers a, b est pair.

7. PREUVE DE $P \Leftrightarrow Q$

Pour prouver $P \Leftrightarrow Q$, on doit prouver les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

8. PREUVE PAR SÉPARATION DES CAS

Supposons qu'on veut prouver une assertion Q , sachant qu'une assertion $P_1 \vee P_2$ est vraie. La méthode par séparation des cas consiste à faire deux preuves :

- on prouve que si P_1 est vraie, alors Q est vraie
- on prouve que si P_2 est vraie, alors Q est vraie.

Assertion: Q

Preuve. On sait que $P_1 \vee P_2$ est vraie.

- Supposons que P_1 est vraie, alors \dots , donc Q est vraie.
- Supposons que P_2 est vraie, alors \dots , donc Q est vraie.

Donc Q est démontrée. \square

Voici deux exemples de preuves par séparation des cas.

8.1. Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Preuve. On sait que $x \geq 0$ ou $x < 0$.

- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$, donc $\frac{x+|x|}{2} = \frac{x+x}{2} = x = |x|$, donc $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.
- Si $x < 0$ alors $|x| = -x$, donc $\frac{x+|x|}{2} = \frac{x-x}{2} = 0$, donc $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Donc $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$. \square

8.2. Proposition. *Soit n un entier qui n'est pas divisible par 3. Alors $n^2 - 1$ est divisible par 3.*

Preuve. Puisque n n'est pas un multiple de 3, on a :

n est 1 de plus qu'un multiple de 3 **ou** n est 2 de plus qu'un multiple de 3.

- Supposons que n est 1 de plus qu'un multiple de 3. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3a + 1$. Alors $n^2 - 1 = (3a + 1)^2 - 1 = 9a^2 + 6a + 1 - 1 = 3(3a^2 + 2a)$, donc $n^2 - 1$ est divisible par 3.
- Supposons que n est 2 de plus qu'un multiple de 3. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3a + 2$. Alors $n^2 - 1 = (3a + 2)^2 - 1 = 9a^2 + 12a + 4 - 1 = 3(3a^2 + 4a + 1)$, donc $n^2 - 1$ est divisible par 3.

Donc $n^2 - 1$ est divisible par 3. □

9. PREUVE PAR CONTRADICTION

Si on veut démontrer l'assertion P en utilisant la technique de preuve "par contradiction", on commence par supposer que P est fausse et on déduit de cette hypothèse une conséquence impossible. Ceci montre qu'il est impossible que P soit fausse, donc P est prouvée.

Assertion: P
Preuve. Supposons $\neg P$.
 ⋮
 Contradiction. □

Voici un exemple classique de preuve par contradiction. Cette preuve a été donnée par Aristote il y a plus de 2300 ans.

9.1. Proposition. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Dans la démonstration de 9.1 nous utiliserons le fait suivant, qui a été démontré en 6.2 :

(‡) Si k est un entier tel que k^2 est pair, alors k est pair.

Preuve de 9.1. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.

Alors il existe des entiers m et n tels que $\sqrt{2} = m/n$ (où $n \neq 0$). On peut choisir m et n de telle sorte que la fraction m/n soit réduite, ce qui signifie que le seul diviseur commun de m, n est 1. En particulier, m et n ne sont pas tous les deux pairs.

Mais $\sqrt{2} = m/n$ implique $2 = m^2/n^2$, donc $m^2 = 2n^2$, donc m^2 est pair. En vertu de (‡), on déduit que m est pair. Puisque m et n ne sont pas tous les deux pairs, on obtient:

n est impair.

Puisque m est pair, on a $m = 2a$ où a est un entier. Alors $4a^2 = m^2 = 2n^2$, donc $n^2 = 2a^2$, donc n^2 est pair et (‡) implique:

n est pair.

On a donc démontré que l'entier n est à la fois pair et impair ; autrement dit, l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est rationnel a une conséquence impossible. Ceci termine la preuve par contradiction. □

PREUVE D'UNE IMPLICATION $P \Rightarrow Q$ PAR CONTRADICTION

Ici on suppose que l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse et on en déduit une impossibilité. Rappelez-vous que $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse.

Assertion: $P \Rightarrow Q$
Preuve. Supposons que P est vraie et que Q est fausse.
 \vdots
 Contradiction. □

Redémontrons 6.2 en utilisant cette technique.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 est pair, alors n est pair.*

Preuve. Procédons par contradiction : supposons que n^2 est pair et que n est impair. Alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$n^2 = 2a \quad \text{et} \quad n = 2b + 1.$$

Alors $2a = n^2 = (2b + 1)^2 = 4b^2 + 4b + 1$, donc

$$2(a - 2b^2 - 2b) = 1.$$

Ceci est absurde, car 2 fois un entier ne peut pas être égal à 1. Cette contradiction complète la démonstration. □